1 Números naturales. Divisibilidad

ACTIVIDADES INICIALES

1.I. Cita algunos ejemplos en los que necesites medir cantidades muy grandes o muy pequeñas.

Respuesta abierta.

Ejemplos de medidas muy grandes: masa de la Tierra, peso de una ballena, distancia entre la Tierra y la Luna.

Ejemplos de medidas muy pequeñas: el grosor de un folio, el tiempo de un parpadeo, el peso de una pluma.

1.II. En la fotografía aparece un templo dedicado al dios Shiva en Chidambaram (India). Según los indios, el dios Shiva, llegó a la India hace 100 billones de palyas. ¿Puedes imaginar cuándo es eso?

No, no es una cantidad imaginable. Es demasiado grande para poder hacer una aproximación.

1.III. La comunidad científica acepta actualmente que el universo se originó hace aproximadamente 15 000 millones de años. ¿Crees que esta edad es compatible con las creencias hindúes?

No, la edad estimada del universo es menor que la que le atribuyen las creencias hindúes, que es tan grande que no es posible cuantificarla.

1.IV. Seguramente has oído alguna vez las palabras *legua* y *fanega*. ¿Qué mide cada una de ellas? ¿Qué otras unidades de medida antiguas conoces?

La legua es una medida de distancia, y la fanega, de capacidad.

Otras medidas antiguas son la arroba (de masa y capacidad), el pie, el codo o la vara (de longitud).

1.V. Actualmente, para medir grandes distancias, los astrónomos usan unidades de medida como la *unidad astronómica* o el *año luz*. Averigua qué mide cada una y analiza por qué los astrónomos eligen esas unidades.

La unidad astronómica es una unidad de longitud que equivale a la distancia media entre la Tierra y el Sol. Su valor en el Sistema Internacional es de $1{,}495\,978\,70 \cdot 10^{11}$ m.

El año luz es una medida de longitud que equivale a la distancia que recorre la luz en un año. Un año luz equivale a 9 460 730 472 581 km (menos de 10 billones de km).

Se utilizan estas unidades debido a que las distancias entre cuerpos celestes son muy grandes.

ACTIVIDADES PROPUESTAS

1.1. Copia en tu cuaderno las siguientes expresiones y escribe los números que faltan.

a) $6327 = 6\text{ UM} + \square\text{ C} + 2\text{ D} + \square\text{ U}$ **c)** $3\square\square5 = \square\text{ UM} + 7\text{ C} + 9\text{ D} + \square\text{ U}$

b) $\square\square\square\square = 5\text{ UM} + 1\text{ C} + 0\text{ D} + 4\text{ U}$ **d)** $4\square8\square = \square\text{ UM} + 3\text{ C} + \square\text{ D} + 0\text{ U}$

a) $6327 = 6\text{ UM} + \boxed{3}\text{ C} + 2\text{ D} + \boxed{7}\text{ U}$ c) $3\boxed{7}\boxed{9}5 = \boxed{3}\text{ UM} + 7\text{ C} + 9\text{ D} + \boxed{5}\text{ U}$

b) $\boxed{5}\boxed{1}\boxed{0}\boxed{4} = 5\text{ UM} + 1\text{ C} + 0\text{ D} + 4\text{ U}$ d) $4\boxed{3}8\boxed{0} = \boxed{4}\text{ UM} + 3\text{ C} + \boxed{8}\text{ D} + 0\text{ U}$

1.2. Escribe en cada caso el número que corresponda.

a) 37 centenas, 2 unidades

b) 48 millares, 5 centenas, 16 unidades

c) 37 decenas de millar, 37 decenas

a) 37 centenas, 2 unidades = 3700 + 2 = 3702 = tres mil setecientos dos

b) 48 millares, 5 centenas, 16 unidades = 48 000 + 500 + 16 = 48 516 = cuarenta y ocho mil quinientos dieciséis

c) 37 decenas de millar, 37 decenas = 370 000 + 370 = 370 370 = trescientos setenta mil trescientos setenta

1.3. Escribe con palabras los siguientes números.

a) 678 **c) 23 405** **e) 100 800**

b) 4835 **d) 986 523** **f) 3 000 909**

a) Seiscientos setenta y ocho

b) Cuatro mil ochocientos treinta y cinco

c) Veintitrés mil cuatrocientos cinco

d) Novecientos ochenta y seis mil quinientos veintitrés

e) Cien mil ochocientos

f) Tres millones novecientos nueve

1.4. Escribe con números romanos:

a) 2034 **c) 315** **e) 2012**

b) 1984 **d) 2117** **f) 1990**

a) MMXXXIV c) CCCXV e) MMXII

b) MCMLXXXIV d) MMCXVII f) MCMXC

1.5. Indica de qué número se trata.

a) MMI **b) DXLV** **c) CXXIII**

a) 2001 b) 545 c) 123

1.6. Actividad interactiva.

1.7. Actividad resuelta.

1.8. Observa el mapa de los códigos postales y señala de qué provincias son los siguientes.

a) 27004 **b) 50336** **c) 14260**

a) Lugo b) Zaragoza c) Córdoba

1.9. *Busca en una guía de teléfonos a qué provincias pertenecen los siguientes prefijos telefónicos.

a) 952 **b) 941** **c) 957**

a) Melilla b) La Rioja c) Córdoba

1.10. Realiza las siguientes operaciones.

a) 17 – 10 + 4 – 6 + 11

b) 32 – 31 + 15 – 8 – 6

c) 11 + 13 – 17 + 16 – 10

a) 16

b) 2

c) 13

1.11. Copia y completa en tu cuaderno, indicando la propiedad que aplicas en cada caso.

a) $13 + 7 = \square + 13 = \square$

b) $(8 \cdot \square) \cdot 5 = \square \cdot (3 \cdot 5) = \square$

c) $12 \cdot (3 + 5) = \square + 60 = \square$

a) $13 + 7 = \boxed{7} + 13 = \boxed{20}$ Propiedad conmutativa

b) $(8 \cdot \boxed{3}) \cdot 5 = \boxed{8} \cdot (3 \cdot 5) = \boxed{120}$ Propiedad asociativa

c) $12 \cdot (3 + 5) = \boxed{36} + 60 = \boxed{96}$ Propiedad distributiva

1.12. Halla el resultado de las siguientes operaciones.

a) 4 + (9 – 5) + 8

b) (15 + 7) – (13 – 2)

a) 4 + (9 – 5) + 8 = 4 + 4 + 8 = 16

b) (15 + 7) – (13 – 2) = 22 – 11 = 11

1.13. *Copia en tu cuaderno y sustituye por el número que falta en cada caso.

a) $13 - 7 = \square \Rightarrow 18 - \square = 6$

b) $2 \cdot (6 + \square) = \square + 18$

a) $13 - 7 = \boxed{6} \Rightarrow 18 - \boxed{12} = 6$

b) $2 \cdot (6 + \boxed{9}) = \boxed{12} + 18 = \boxed{30}$

1.14. Actividad interactiva.

1.15. Halla tres múltiplos de 11 comprendidos entre 27 y 90.

33, 44, 55, 66, 77, 88

1.16. Comprueba si 556 es múltiplo de 4.

556: 4 = 139, resto = 0

1.17. Encuentra el primer múltiplo de 17 mayor que 500.

500 : 17 = 29, resto = 7

El primer múltiplo de 17 mayor que 500 será 17 · 30 = 510.

1.18. Escribe tres múltiplos de 9 mayores que 100.

100 : 9 = 11, resto = 10

El primer múltiplo de 9 mayor que 100 será 9 · 12 = 108.

También serán múltiplos: 9 · 13 = 117, 9 · 14 = 126.

1.19. Comprueba si 12 y 18 son divisores de 144.

144 : 12 = 12, resto = 0. Luego 12 es divisor de 144.

144 : 18 = 8, resto = 0. Luego 18 es divisor de 144.

1.20. ¿Cuál de estos números es divisor de 91?

a) 3 **b) 7** **c) 11** **d) 13**

a) 91: 3 = 30, resto = 1; como la división no es exacta, 3 no es divisor de 91.

b) 91: 7 = 13, resto = 0; como la división es exacta, 7 es divisor de 91.

c) 91: 11 = 8, resto = 3; como la división no es exacta, 11 no es divisor de 91.

d) 91: 13 = 7, resto = 0; como la división es exacta, 13 es divisor de 91.

1.21. Encuentra todos los divisores de los siguientes números.

a) 24

b) 27

c) 48

d) 25

e) 7

f) 56

a) 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24

b) 1, 3, 9, 27

c) 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 16, 24, 48

d) 1, 5, 25

e) 1, 7

f) 1, 2, 4, 7, 8, 14, 28, 56

1.22. Señala cuáles de estos números tienen, exactamente, tres divisores.

a) 4

b) 25

c) 15

d) 49

e) 36

f) 72

a) 1, 2, 4. Sí

b) 1, 5, 25. Sí

c) 1, 3, 5, 15. No

d) 1, 7, 49. Sí

e) 1, 2, 4, 3, 6, 9, 12, 18, 36. No

f) 1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 18, 24, 36, 72. No

1.23. ¿De cuántas formas se pueden plantar 54 cerezos de manera que formen un rectángulo?

Se buscan todos los divisores de 54: 1, 2, 3, 6, 9, 18, 27, 54.

Las formas de plantar los cerezos son:

En 2 filas de 27 cerezos cada una

En 3 filas de 18 cerezos cada una

En 6 filas de 9 cerezos cada una

Y las soluciones correspondientes a invertir los términos.

No se ha considerado el caso de los divisores 1 y 54, por tratarse de una fila y no de un rectángulo propio.

1.24. Actividad interactiva.

1.25. Actividad resuelta.

1.26. Aplica los criterios de divisibilidad para rellenar la siguiente tabla.

Divisible por	2	3	4	5	9	10	11	25	100
375									
990									
1 848									
12 300									
14 240									

Divisible por	2	3	4	5	9	10	11	25	100
375	No	Sí	No	Sí	No	No	No	Sí	No
990	Sí	Sí	No	Sí	Sí	Sí	Sí	No	No
1 848	Sí	Sí	Sí	No	No	No	Sí	No	No
12 300	Sí	Sí	Sí	Sí	No	Sí	No	Sí	Sí
14 240	Sí	No	Sí	Sí	No	Sí	No	No	No

1.27. Encuentra dos números de cinco cifras que sean divisibles por 2 y por 5 a la vez, y no lo sean por 100.

Son divisibles por 2 y 5 si terminan en 0, y no lo son por 100 si no terminan en 00.

Por ejemplo: 11 110 y 11 120.

1.28. Escribe dos números de cinco cifras que sean múltiplos de los siguientes.

a) De 3 y de 11, pero no de 9. **b) De 9 y de 11. ¿Lo son de 3?**

a) La forma más sencilla es formar un número tal que la suma de sus cifras pares sea 3, así como la de sus cifras impares: 20 031 y 13 002.

b) La forma más sencilla es formar un número tal que la suma de sus cifras pares sea 9, así como la de sus cifras impares: 26 631 y 53 262.

1.29. El número 58*A* es divisible por 4. Calcula el valor de *A*.

Para que sea divisible por 4, lo debe ser el número formado por sus dos últimas cifras, es decir, el 8*A*, por lo que *A* puede ser 0, 4 u 8.

1.30. Halla el valor de *A* para que el número 7*A*2 sea divisible por 3 y por 11.

Como la suma de las cifras impares es 9, para que el número sea divisible por 11, la suma de sus cifras pares también debe ser 9, por lo que $A = 9$.

Se obtiene el número 792, que también es divisible

1.31. Calcula el valor de *A* para que el número 534*A* sea divisible por 3, pero no sea múltiplo de 9.

La suma de las cifras del número buscado debe ser múltiplo de 3, pero no de 9.

$5 + 3 + 4 + A = 12 + A$, por lo que *A* podrá ser 0, 3 ó 9, para que la suma sea 12, 15 ó 21 respectivamente.

1.32. Busca un número de seis cifras que sea divisible por 3 y por 5. Comprueba que también es divisible por 15.

Debe terminar en 0 o en 5, para ser divisible por cinco, y la suma de sus cifras debe ser múltiplo de 3: 123 450, 110 535, 256 215.

Si son divisibles por 3 y por 5, también lo serán por 15, como se puede comprobar en los tres ejemplos anteriores:

123 450: 15 = 8230, 110 535 : 15 = 7369, 256 215 : 15 = 17 081

1.33. Halla la cifra que falta en cada número para que se cumpla lo indicado.

a) 31$\square$0. Múltiplo de 25, pero no de 100.

b) 45$\square$4. Divisible por 2, pero no por 4.

c) 152$\square$ Múltiplo de 3 y de 4.

a) 31$\boxed{5}$0

b) 45$\boxed{1}$4, 45$\boxed{3}$4, 45$\boxed{5}$4, 45$\boxed{7}$4, 45$\boxed{9}$4

c) 152$\boxed{4}$

1.34. El número de alumnos de primer ciclo de un instituto puede contarse de 3 en 3, de 4 en 4 y de 5 en 5.

Si el número de alumnos matriculados en primer ciclo supera las 2 centenas, ¿cuántos alumnos hay?

Buscamos un número mayor que 200 y múltiplo de 3, 4 y 5.

Para ello deberá ser múltiplo de $3 \cdot 4 \cdot 5 = 60$.

El primer múltiplo de 60 que pasa de 200 es $60 \cdot 4 = 240$.

1.35. Actividad resuelta.

1.36. Actividad resuelta.

1.37. Indica cuál de los siguientes números es primo.

a) 8	**c) 57**	**e) 61**
b) 101	**d) 49**	**f) 63**

a) No: es divisible por 2.

b) Sí es primo: no es divisible por 2, 3, 5, 7 ni por 11.

c) No: es divisible por 3.

d) No: es divisible por 7.

e) Sí es primo: no es divisible por no es divisible por 2, 3, 5, 7 ni por 11. 1, 61.

f) No: es divisible por 3.

1.38. ¿Puede haber algún número primo par? Razona la respuesta.

El único número primo que es par es el 2, porque cualquier otro lo tiene por divisor propio.

1.39. Halla tres números primos entre 500 y 550.

501, 503, 509

1.40. Copia y completa en tu cuaderno e indica la descomposición en factores primos de los números dados.

a) $\begin{array}{r|l} 210 & \square \\ 105 & 3 \\ \square\square & \square \\ \square & \square \\ \square & \end{array}$ **b)** $\begin{array}{r|l} 396 & 2 \\ \square\square 8 & \square \\ \square\square & \square \\ 33 & \square \\ \square\square & 11 \\ 1 & \end{array}$ **c)** $\begin{array}{r|l} 80 & 2 \\ \square\square & \square \\ \square\square & \square \\ 10 & \square \\ \square & 5 \\ 1 & \end{array}$

210 = **396 =** **80 =**

a) $\begin{array}{r|l} 210 & \boxed{2} \\ 105 & 3 \\ \boxed{3}\boxed{5} & \boxed{5} \\ \boxed{7} & \boxed{7} \\ \boxed{1} & \end{array}$ b) $\begin{array}{r|l} 396 & 2 \\ \boxed{1}\boxed{9}8 & \boxed{2} \\ \boxed{9}\boxed{9} & \boxed{3} \\ 33 & \boxed{3} \\ \boxed{1}\boxed{1} & 11 \\ 1 & \end{array}$ c) $\begin{array}{r|l} 80 & 2 \\ \boxed{4}\boxed{0} & \boxed{2} \\ \boxed{2}\boxed{0} & \boxed{2} \\ 10 & \boxed{2} \\ \boxed{5} & 5 \\ 1 & \end{array}$

$210 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$ $396 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3$ $80 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5$

1.41. Factoriza los números menores de 100 que terminen en 3.

$\begin{array}{r|l} 93 & 3 \\ 31 & 31 \\ 1 & 1 \end{array}$ $\begin{array}{r|l} 83 & 83 \\ 1 & \end{array}$ $\begin{array}{r|l} 73 & 73 \\ 1 & \end{array}$ $\begin{array}{r|l} 63 & 3 \\ 21 & 3 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array}$ $\begin{array}{r|l} 53 & 53 \\ 1 & \end{array}$

$93 = 3 \cdot 31$ $83 = 83$ $73 = 73$ $63 = 3 \cdot 3 \cdot 7$ $53 = 53$

$\begin{array}{r|l} 43 & 43 \\ 1 & \end{array}$ $\begin{array}{r|l} 33 & 3 \\ 11 & 11 \\ 1 & \end{array}$ $\begin{array}{r|l} 23 & 23 \\ 1 & \end{array}$ $\begin{array}{r|l} 13 & 13 \\ 1 & \end{array}$ $\begin{array}{r|l} 3 & 3 \\ 1 & \end{array}$

$43 = 43$ $33 = 3 \cdot 11$ $23 = 23$ $13 = 13$ $3 = 3$

1.42. Haz la descomposición en factores primos de los siguientes números.

a) **108** **d)** **37** **g)** **120**

b) **99** **e)** **100** **h)** **2100**

c) **42** **f)** **840** **i)** **2294**

a) $108 = 2^2 \cdot 3^3$ d) $37 = 1 \cdot 37$ g) $120 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5$

b) $99 = 3^2 \cdot 11$ e) $100 = 2^2 \cdot 5^2$ h) $2100 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7$

c) $42 = 2 \cdot 3 \cdot 7$ f) $840 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$ i) $2294 = 2 \cdot 1147$

1.43. Copia y completa estas descomposiciones en factores primos.

a) $360 = 2^{\square} \cdot \square^{2} \cdot 5$ **c)** $520 = 2^{\square} \cdot 5 \cdot \square$

b) $300 = \square^{2} \cdot \square \cdot 5^2$ **d)** $750 = \square \cdot \square \cdot 5^{\square}$

a) $360 = 2^{\boxed{3}} \cdot \boxed{3}^{2} \cdot 5$ c) $520 = 2^{\boxed{3}} \cdot 5 \cdot \boxed{13}$

b) $300 = \boxed{2}^{2} \cdot \boxed{3} \cdot 5^2$ d) $750 = \boxed{2} \cdot \boxed{3} \cdot 5^{\boxed{3}}$

1.44. Actividad interactiva.

1.45. Actividad resuelta.

1.46. Indica los divisores de los siguientes números y calcula su máximo común divisor.

a) 2 y 16

b) 3 y 25

c) 9, 12 y 18

d) 27, 36 y 63

a) Divisores de 2: 1, 2. Divisores de 16: 1, 2, 4, 8, 16.
m.c.d.(2, 16) = 2

b) Divisores de 3: 1, 3. Divisores de 25: 1, 5, 25.
m.c.d.(3, 35) = 1

c) Divisores de 9: 1, 3, 9. Divisores de 12: 1, 2, 3, 4, 6, 12. Divisores de 18: 1, 2, 3, 6, 9, 18.
m.c.d.(9, 12, 18) = 3

d) Divisores de 27: 1, 3, 9, 27. Divisores de 36: 1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36.
Divisores de 63: 1, 3, 7, 9, 21, 63.
m.c.d.(27, 36, 63) = 9

1.47. (TIC) Averigua el máximo común divisor de los siguientes números.

a) 42, 72 y 48

b) 30, 45 y 60

c) 180, 90 y 400

d) 4, 6, 18 y 32

e) 3, 4, 12, 36 y 48

f) 5, 10, 15, 25 y 50

a) 42 $\Rightarrow$ 1, 2, 3, $\underline{6}$, 7, 14, 21, 42
72 $\Rightarrow$ 1, 2, 3, 4, $\underline{6}$, 8, 9, 12, 18, 24, 36, 72
48 $\Rightarrow$ 1, 2, 3, 4, $\underline{6}$, 8, 12, 16, 24, 48
m.c.d.(42, 72, 48) = 6

b) 30 $\Rightarrow$ 1, 2, 3, 5, 6, 10, $\underline{15}$, 30
45 $\Rightarrow$ 1, 3, 5, 9, $\underline{15}$, 45
60 $\Rightarrow$ 1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, $\underline{15}$, 20, 30, 60
m.c.d.(30, 45, 60) = 15

c) 180 $\Rightarrow$ 1, 2, 3, 4, 5, 6, 9, $\underline{10}$, 12, 15, 18, 20, 30, 36, 45, 60, 90, 180
90 $\Rightarrow$ 1, 2, 3, 5, 6, 9, $\underline{10}$, 15, 18, 30, 45, 90
400 $\Rightarrow$ 1, 2, 4, 5, 8, $\underline{10}$, 16, 20, 25, 40, 50, 80, 100, 200, 400
m.c.d.(180, 90, 400) = 10

d) 4 $\Rightarrow$ 1, $\underline{2}$, 4; 6 $\Rightarrow$ 1, $\underline{2}$, 3, 6; 18 $\Rightarrow$ 1, $\underline{2}$, 3, 6, 9, 18; 32 $\Rightarrow$ 1, $\underline{2}$, 4, 8, 16, 32
m.c.d.(4, 6, 18, 32) = 2

e) 3 $\Rightarrow$ $\underline{1}$, 3; 4 $\Rightarrow$ $\underline{1}$, 2, 4; 12 $\Rightarrow$ $\underline{1}$, 2, 3, 4, 6, 12;
36 $\Rightarrow$ $\underline{1}$, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36;
48 $\Rightarrow$ $\underline{1}$, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 16, 24, 48
m.c.d.(3, 4, 12, 36, 48) = 1

f) 5 $\Rightarrow$ 1, $\underline{5}$; 10 $\Rightarrow$ 1, 2, $\underline{5}$, 10; 15 $\Rightarrow$ 1, 3, $\underline{5}$, 15; 25 $\Rightarrow$ 1, $\underline{5}$, 25; 50 $\Rightarrow$ 1, 2, $\underline{5}$, 10, 25, 50
m.c.d.(5, 10, 15, 25, 50) = 5

1.48. Un viñedo de forma rectangular tiene 180 vides a lo ancho y 120 a lo largo. Se quiere dividir en parcelas cuadradas que tengan el mayor número posible de vides.

a) ¿Cuántas vides debe tener cada parcela?

b) ¿Cuántas parcelas se conseguirán?

a) Se busca el divisor común más grande entre 120 y 180:
$120 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5$, $180 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5$
m.c.d.(120, 180) = 60. Cada parcela tiene 60 vides.

b) Para saber cuántas parcelas se consiguen, dividimos cada medida entre el m.c.d. = 60:
120 : 60 = 2 parcelas a lo largo, 180 : 60 = 3 parcelas a lo ancho.
El viñedo queda dividido en $2 \cdot 3 = 6$ parcelas.

1.49. A una cena asisten 20 chicos y 30 chicas.

Si las mesas son todas iguales y los chicos y chicas están separados, ¿cuántas mesas son necesarias?

Buscamos divisores comunes de 20 y 30:

20 = 1, 2, 4, 5, 10 y 20

30 = 1, 2, 3, 5, 6, 10, 15 y 30

Si las mesas son para 2, harán falta 10 mesas para los chicos y 15 mesas para las chicas: 25 mesas.

Si las mesas son para 5, harán falta 4 mesas para los chicos y 6 mesas para las chicas: 10 mesas.

Si las mesas son para 10, harán falta 2 mesas para los chicos y 3 mesas para las chicas: 5 mesas.

1.50. Se quieren empaquetar 48 napolitanas de chocolate y 72 napolitanas de crema en bandejas iguales lo más grandes posible.

¿Cuál será el número de napolitanas en cada bandeja?

Hay que calcular el divisor común mayor de 48 y 72 para saber el tamaño de las bandejas:

48: 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 16, 24, 48; 72 = 1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 18, 24, 36, 72
Se completarán 2 bandejas con 24 napolitanas de chocolate y 3 bandejas con 24 napolitanas de crema.

1.51. Actividad resuelta.

1.52. Calcula el mínimo común múltiplo de los siguientes números.

a) 6 y 18 — **d) 20, 25 y 80**

b) 9, 12 y 18 — **e) 21, 14 y 35**

c) 18, 27 y 54 — **f) 16, 32 y 80**

a) $6 = 2 \cdot 3$, $18 = 2 \cdot 3^2$, m.c.m.$(6, 18) = 2 \cdot 3^2 = 18$

b) $9 = 3^2$, $12 = 2^2 \cdot 3$, $18 = 2 \cdot 3^2$, m.c.m.$(9, 12, 18) = 2^2 \cdot 3^2 = 36$

c) $18 = 2 \cdot 3^2$, $27 = 3^3$, $54 = 2 \cdot 3^3$, m.c.m.$(18, 27, 54) = 2 \cdot 3^3 = 54$

d) $20 = 2^2 \cdot 5$, $25 = 5^2$, $80 = 2^4 \cdot 5$, m.c.m.$(20, 25, 80) = 2^4 \cdot 5^2 = 400$

e) $21 = 3 \cdot 7$, $14 = 2 \cdot 7$, $35 = 5 \cdot 7$, m.c.m.$(21, 14, 35) = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 = 210$

f) $16 = 2^4$, $32 = 2^5$, $80 = 2^4 \cdot 5$, m.c.m.$(16, 32, 80) = 2^5 \cdot 5 = 160$

1.53. Halla el mínimo común múltiplo de estos números.

a) 2, 4, 8 y 16 — **c) 3, 5, 6 y 30**

b) 3, 4, 6 y 12 — **d) 4, 5, 16 y 80**

¿Qué conclusión sacas?

a) $2 = 2$, $4 = 2^2$, $8 = 2^3$, $16 = 2^4$, m.c.m.$(2, 4, 8, 16) = 2^4 = 16$

b) $3 = 3$, $4 = 2^2$, $6 = 2 \cdot 3$, $12 = 2^2 \cdot 3$, m.c.m.$(3, 4, 6, 12) = 2^2 \cdot 3 = 12$

c) $3 = 3$, $5 = 5$, $6 = 2 \cdot 3$, $30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$, m.c.m.$(3, 5, 6, 30) = 2 \cdot 3 \cdot 5 = 30$

d) $4 = 2^2$, $5 = 5$, $16 = 2^4$, $80 = 2^4 \cdot 5$, m.c.m.$(4, 5, 16, 80) = 2^4 \cdot 5 = 80$

Cuando en un conjunto de números, uno de ellos es múltiplo de todos, ese es el m.c.m.

1.54. Jaime observa que los alumnos que participan en las olimpiadas escolares se pueden contar exactamente de 2 en 2, de 3 en 3, de 4 en 4, de 5 en 5 y de 6 en 6. ¿Cuál es el menor número de alumnos que participan en las olimpiadas?

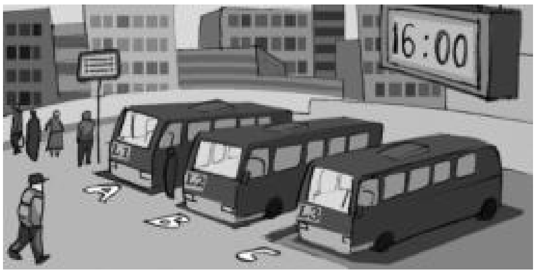
Calculamos el mínimo común múltiplo de 2, 3, 4, 5 y 6:
$2 = 2$, $3 = 3$, $4 = 2^2$, $5 = 5$ y $6 = 2 \cdot 3$
m.c.m.$(2, 3, 4, 5, 6) = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 = 60$ alumnos

1.55. María cuenta de 3 en 3; Marta, de 5 en 5, y Raúl, de 7 en 7.

¿En qué múltiplo coincidirán por primera vez?

Calculamos el mínimo común múltiplo de 3, 5 y 7:
$3 = 3$, $5 = 5$ y $7 = 7$
m.c.m.$(3, 5, 7) = 3 \cdot 5 \cdot 7 = 105$.

1.56. Por una parada de autobuses pasa el autobús de la línea 1 cada 48 minutos; el de la línea 2, cada 36 minutos, y el de la línea 3, cada 60 minutos.



Si los tres autobuses han coincidido en la parada a las 16.00, ¿a qué hora volverán a coincidir?

Calculamos el mínimo común múltiplo de 48, 36 y 60 minutos:
$48 = 2^4 \cdot 3$, $36 = 2^2 \cdot 3^2$ y $60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$
m.c.m.$(48, 36, 60) = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5 = 720$ minutos
Los tres autobuses coinciden cada 720 minutos, es decir, cada 12 horas, por lo que tendrían que volver a coincidir a las 4.00 del día siguiente.

1.57. Un albañil coloca en una pared azulejos rectangulares de 8 por 15 centímetros sin romper ninguno.

¿Cuántos azulejos debe colocar para obtener un cuadrado?

Para obtener un cuadrado, debe tener la misma medida de alto que de ancho, por lo que buscamos el mínimo común múltiplo de 8 y 15 centímetros.

$8 = 2^3$, $15 = 3 \cdot 5$, m.c.m.$(8, 15) = 120$ centímetros

Necesita $120 : 8 = 15$ azulejos a lo alto y $120 : 15 = 8$ azulejos a lo ancho, por lo que el número total de azulejos es de $15 \cdot 8 = 120$.

1.58. Halla el máximo común divisor de los siguientes números, realizando previamente la descomposición en factores primos.

a) 135 y 180

b) 220 y 385

c) 98, 154 y 1715

d) 54, 180 y 216

a) $135 = 3^3 \cdot 5$, $180 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5$, m.c.d.$(135, 180) = 3^2 \cdot 5 = 45$

b) $220 = 2^2 \cdot 5 \cdot 11$, $385 = 5 \cdot 7 \cdot 11$, m.c.d.$(220, 385) = 5 \cdot 11 = 55$

c) $98 = 2 \cdot 7^2$, $154 = 2 \cdot 7 \cdot 11$, $1715 = 5 \cdot 7^3$, m.c.d.$(98, 154, 1715) = 7$

d) $54 = 2 \cdot 3^3$, $180 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5$, $216 = 2^3 \cdot 3^3$, m.c.d.$(54, 180, 216) = 2 \cdot 3^2 = 18$

1.59. Halla el mínimo común múltiplo de los siguientes números, factorizándolos previamente.

a) 108 y 144 **c) 240, 360 y 600**

b) 198 y 484 **d) 250, 625 y 800**

a) $108 = 2^2 \cdot 3^3$, $144 = 2^4 \cdot 3^2$, m.c.m.(108, 144) $= 2^4 \cdot 3^3 = 432$

b) $198 = 2 \cdot 3^2 \cdot 11$, $484 = 2^2 \cdot 11^2$, m.c.m.(198, 484) $= 2^2 \cdot 3^2 \cdot 11^2 = 4356$

c) $240 = 2^4 \cdot 3 \cdot 5$, $360 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5$, $600 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5^2$, m.c.m.(240, 360, 600) $= 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5^2 = 3600$

d) $250 = 2 \cdot 5^3$, $625 = 5^4$, $800 = 2^5 \cdot 5^2$, m.c.m.(250, 625, 800) $= 2^5 \cdot 5^4 = 20\,000$

1.60. Actividad interactiva.

1.61. Copia y completa en tu cuaderno los términos que faltan para que m.c.m.(*a* y *b*) = 4200.

$$\boldsymbol{a = 2^{\square} \cdot 3 \cdot 5} \qquad \boldsymbol{b = 2^2 \cdot 3 \cdot 5^{\square} \cdot 7}$$

$a = 2^{\square} \cdot 3 \cdot 5$, $b = 2^2 \cdot 3 \cdot 5^{\square} \cdot 7$

m.c.m.$(a, b) = 2^{\square} \cdot 3 \cdot 5^{\square} \cdot 7 = 4200$

Descomponemos 4200 en factores primos: $4200 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 7$

Por lo que $a = 2^{\boxed{3}} \cdot 3 \cdot 5 = 120$ y $b = 2^2 \cdot 3 \cdot 5^{\boxed{2}} \cdot 7 = 2100$

1.62. Tres ciclistas tardan en dar la vuelta a un velódromo 54, 56 y 60 segundos, respectivamente.

a) Si salen a la vez, ¿al cabo de cuánto tiempo se cruzarán los tres?

b) ¿Cuántas vueltas habrá dado cada uno?

a) Calculamos el mínimo común múltiplo de 54, 56 y 60:

$54 = 2 \cdot 3^3$, $56 = 2^3 \cdot 7$, $60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$, m.c.m.(54, 56, 60) $= 2^3 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7 = 7560$ segundos tardarán en coincidir los tres ciclistas, es decir, 2 horas 6 minutos.

b) 1.^{er} ciclista: 7560 : 54 = 140 vueltas

2.º ciclista: 7560 : 56 = 135 vueltas

3.^{er} ciclista: 7560 : 60 = 126 vueltas

EJERCICIOS

El sistema de numeración decimal

1.63. Completa la siguiente tabla.

Número	M	C	D	U
7816	**7**	**8**	**1**	**6**
69 513	69	5	1	3
27 540	**27**	**5**	**4**	**0**
2318	2	**3**	**1**	8
1358	0	**13**	**5**	**8**
107 890	107	8	9	0

1.64. Dados los números 345, 2621 y 94 013:

a) ¿Cuántas decenas hay en cada uno?

b) ¿Cuántas unidades habrá que quitar a cada uno para que tengan exactamente una decena menos?

a) 34 decenas, 262 decenas y 9401 decenas, respectivamente

b) 6 unidades, 2 unidades y 4 unidades, respectivamente.

1.65. Escribe de forma numérica estos números expresados con letras.

a) Nueve mil quinientos dos

b) Ocho millones cuatrocientos trece

c) Mil quinientos sesenta y seis

d) Setenta mil setenta

a) 9502

b) 8 000 413

c) 1566

d) 70 070

1.66. Escribe el nombre de los siguientes números.

a) 20 012

b) 234 234 000

c) 33 840

d) 305 305 300

a) Veinte mil doce

b) Doscientos treinta y cuatro millones doscientos treinta y cuatro mil

c) Treinta y tres mil ochocientos cuarenta

d) Trescientos cinco millones trescientos cinco mil trescientos

Números romanos

1.67. Escribe el valor de estos números.

a) XIV

b) DLVI

c) MCMLXIII

d) CCCIII

e) DIX

f) CCXLVII

a) XIV = 14

b) DLVI = 556

c) MCMLXIII = 1963

d) CCCIII = 303

e) DIX = 509

f) CCXLVII = 247

1.68. Expresa en el sistema de numeración romano:

a) 83

b) 278

c) 316

d) 745

e) 999

f) 1637

a) 83 = LXXXIII

b) 278 = CCLXXVIII

c) 316 = CCCXVI

d) 745 = DCCXLV

e) 999 = CMXCIX

f) 1637 = MDCXXXVII

Los números naturales como códigos

1.69. Alejandro ha escrito su fecha de nacimiento: 03/12/2003.

a) ¿Qué día celebrará su cumpleaños?

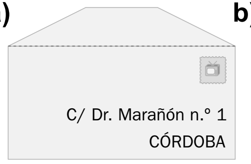
b) ¿Cuántos años tiene hoy?

a) Celebra su cumpleaños el 3 de diciembre.

b) Respuesta abierta. Depende del año en que se realice el ejercicio.

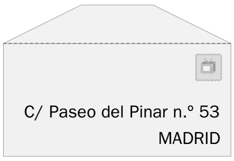
1.70. Asocia cada dirección con su código postal.

a)



b)

c)



d)

40001 **28230** **14004** **46810**

a) Córdoba: 14004

b) Valencia: 46810

c) Madrid: 28230

d) Segovia: 40001

1.71. Busca códigos numéricos en tu entorno.

a) En el supermercado

b) En tu casa

a) En el supermercado: los códigos de barras.

b) En tu casa: el número del portal.

Operaciones con números naturales. Propiedades

1.72. Copia en tu cuaderno las siguientes operaciones y escribe los números que faltan, e indica en cada caso la propiedad que aplicas.

a) $140 - 68 = 72 \Rightarrow 142 - 70 = \square$

b) $431 - 88 = 343 \Rightarrow 421 - \square = 343$

c) $20 \cdot (15 + 2) = \square \cdot 15 + 20 \cdot \square$

d) $5 \cdot (10 + \square) = 5 \cdot 10 + \square \cdot 4$

a) $140 - 68 = 72 \Rightarrow 142 - 70 = \boxed{72}$ Propiedad de la resta

b) $431 - 88 = 343 \Rightarrow 421 - \boxed{78} = 343$ Propiedad de la resta

c) $20 \cdot (15 + 2) = \boxed{20} \cdot 15 + 20 \cdot \boxed{2}$ Propiedad distributiva del producto respecto de la suma

d) $5 \cdot (10 + \boxed{4}) = 5 \cdot 10 + \boxed{5} \cdot 4$ Propiedad distributiva del producto respecto de la suma

1.73. Realiza las siguientes operaciones.

a) $(4 + 6) \cdot 9$

b) $(12 + 23) \cdot 8$

c) $(190 - 80 + 20) : 10$

d) $(39 + 13 + 65) : 13$

a) $(4 + 6) \cdot 9 = 10 \cdot 9 = 90$

b) $(12 + 23) \cdot 8 = 35 \cdot 8 = 280$

c) $(190 - 80 + 20) : 10 = 130 : 10 = 13$

d) $(39 + 13 + 65) : 13 = 117 : 13 = 9$

1.74. **¿Entre qué número hay que dividir 1111 para obtener de cociente exacto 101?**

Aplicamos la propiedad de la división: $D = d \cdot c + r$. $1111 = D$.

$1111 = d \cdot 101 + 0$, por lo que el divisor será igual a 1111 : 101 = 11.

1.75. **Calcula aplicando la propiedad distributiva.**

a) **(76 – 51) · 42**

b) **(93 – 52) · 6**

c) **(101 – 30) · 8**

d) **(384 – 34) · 37**

a) (76 – 51) · 42 = 76 · 42 – 51 · 42 = 3192 – 2142 = 1050

b) (93 – 52) · 6 = 93 · 6 – 52 · 6 = 558 –312 = 246

c) (101 – 30) · 8 = 101 · 8 – 30 · 8 = 808 –240 = 568

d) (384 – 34) · 37 = 384 · 37 – 34 · 37 = 14 208 –1258 = 12 950

1.76. **Completa en tu cuaderno la tabla, sin hacer las divisiones, y explica la propiedad que estás teniendo en cuenta.**

Dividendo	Divisor	Cociente	Resto
364	**148**	**2**	**68**
91	**37**	2	17
888	**444**	**2**	**0**
1564	27	**57**	**25**
2456	**13**	188	**12**

Múltiplos y divisores

1.77. **Averigua los cinco primeros múltiplos de estos números.**

a) **10**

b) **25**

c) **8**

d) **11**

e) **222**

f) **43**

a) 10: 10, 20, 30, 40, 50

b) 25: 25, 50, 75, 100, 125

c) 8: 8, 16, 24, 32, 40

d) 11: 11, 22, 33, 44, 55

e) 222: 222, 444, 666, 888, 1110

f) 43: 43, 86, 129, 172, 215

1.78. **Escribe todos los divisores de los números indicados.**

a) **54**

b) **77**

c) **8**

d) **60**

e) **200**

f) **500**

g) **84**

h) **120**

i) **128**

a) 54: 1, 2, 3, 6, 9, 18, 27, 54

b) 77: 1, 7, 11, 77

c) 8: 1, 2, 4, 8

d) 60: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30, 60

e) 200: 1, 2, 4, 5, 8, 10, 20, 25, 40, 50, 100, 200

f) 500: 1, 2, 4, 5, 10, 20, 25, 50, 100, 125, 250, 500

g) 84: 1, 2, 3, 4, 6, 7, 12, 14, 21, 28, 42, 84

h) 120: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 15, 20, 24, 30, 40, 60, 120

i) 128: 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128

1.79. Copia esta tabla en tu cuaderno y sustituye el símbolo $\square$ por lo que corresponda.

Multiplicación	Divisiones asociadas	Múltiplos	Divisores
5 · 6 = 30	30 : 5 = 6 30 : 6 = 5	30, múltiplo de 5 y 6	5 y 6, divisores de 30
7 · 4 = 28	28 : $\square$ = 4 28 : $\square$ = 7	$\square$, múltiplo de 4 y 7	$\square$ y $\square$, divisores de 28
$\square$ · $\square$ = $\square$	56 : 8 = $\square$ 56 : $\square$ = 8	56, múltiplo de $\square$ y $\square$	$\square$ y $\square$, $\square$ de 72

Multiplicación	Divisiones asociadas	Múltiplos	Divisores
5 · 6 = 30	30 : 5 = 6 30 : 6 = 5	30, múltiplo de 5 y 6	5 y 6, divisores de 30
7 · 4 = 28	28 : $\boxed{7}$ = 4 28 : $\boxed{4}$ = 7	$\boxed{28}$, múltiplo de 4 y 7	$\boxed{7}$ y $\boxed{4}$, divisores de 28
$\boxed{7}$ · $\boxed{8}$ = $\boxed{56}$	56 : 8 = $\boxed{7}$ 56 : $\boxed{7}$ = 8	56, múltiplo de $\boxed{7}$ y $\boxed{8}$	$\boxed{7}$ y $\boxed{8}$, $\boxed{\text{divisores}}$ de 72

1.80. Escribe todos los múltiplos de 7 que estén entre 100 y 150.

100 : 7 = 14, resto 2.

15 · 7 = 105, 112, 119, 126, 133, 140, 147

1.81. Escribe 5 múltiplos de 13 mayores que 1000, pero menores que 1100.

1000 : 13 = 76, resto = 12

13 · 77 = 1001, 13 · 78 = 1014, 13 · 79 = 1027, 13 · 80 = 1040, 13 · 81 = 1053

1.82. Encuentra los divisores de 8, 27, 125 y 343.

¿Existe alguna relación entre el número y su número de divisores?

8: 1, 2, 4, 8

27: 1, 3, 9, 27

125: 1, 5, 25, 125

343: 1, 7, 49, 343

Todos los divisores son el cubo de un primo y sus divisores son las potencias de ese primo hasta llegar al número. Luego todos estos números tienen 4 divisores.

Divisibilidad

1.83. Indica, sin hacer las divisiones, cuáles de los siguientes números son múltiplos de 2.

a) **4576** **b)** **225** **c)** **34 930** **d)** **170**

Son múltiplos de dos los números que terminen en cifra par, es decir, a, c y d.

1.84. Señala, sin dividir, cuáles de los siguientes números son múltiplos de 2 y de 5 a la vez.

a) 552 **b) 3970** **c) 255** **d) 45 670**

Serán múltiplos de 2 los números que terminen en cifra par, y de 5, los números que terminen en 0 ó 5, por lo que serán múltiplos de 2 y de 5 simultáneamente aquellos números que terminen en 0: 3970 y 45 670.

1.85. Determina, aplicando los criterios explicados en la unidad, si los números 3033, 18 951, 21 073 y 90 son múltiplos de los siguientes.

a) 3 **b) 9** **c) 3 y 9**

3033 es múltiplo de 3 y de 9, ya que la suma de sus cifras es 9.

18 951 es múltiplo de 3, porque la suma de sus cifras es múltiplo de 3, pero no de 9.

21 073 no es múltiplo ni de 3 ni de 9, ya que la suma de sus cifras es 13.

90 es múltiplo de 3 y de 9, ya que la suma de sus cifras es 9.

1.86. Averigua, sin hacer la división, si los números 144, 900, 4255 y 1875 son múltiplos de estos otros números.

a) 4 **b) 25** **c) 4 y 25**

144 es múltiplo de 4, ya que el número formado por sus dos últimas cifras es múltiplo de 4.

1875 es múltiplo de 25, porque el número formado por sus dos últimas cifras es múltiplo de 25.

900 es múltiplo de 4 y de 25, ya que termina en 00.

1.87. Aplica el criterio de divisibilidad por 11 para averiguar cuáles de los siguientes números son divisibles por 11.

a) 31
b) 99
c) 2728
d) 5500
e) 528 726
f) 719 290

a) No. 3 – 1 = 2
b) Sí. 9 – 9 = 0
c) Sí. (7 + 8) – (2 + 2) = 11
d) Sí. 5 – 5 = 0
e) Sí. (5 + 8 + 2) – (2 + 7 + 6) = 15 – 15 = 0
f) Sí. (7 + 9 + 9) – (1 + 2) = 25 – 3 = 22

1.88. Indica cuáles de estos números son primos, calculando previamente todos sus divisores.

a) 13
b) 100
c) 49
d) 1
e) 121
f) 65

a) Primo. 13: 1, 13
b) 100: 1, 2, 4, 5, 10, 20, 50, 100
c) 49: 1, 7, 49
d) 1 no es primo ni compuesto.
e) 121: 1, 11, 121
f) 65: 1, 5, 13, 65

1.89. Factoriza los siguientes números.

54	**630**	**2000**	**2200**	**2080**	**864**
420	**2500**	**2250**	**1372**	**2352**	**2160**

$54 = 2 \cdot 3^3$	$2000 = 2^4 \cdot 5^3$	$2080 = 2^5 \cdot 5 \cdot 13$
$420 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$	$2250 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5^3$	$2352 = 2^4 \cdot 3 \cdot 7^2$
$630 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7$	$2200 = 2^3 \cdot 5^2 \cdot 11$	$864 = 2^5 \cdot 3^3$
$2500 = 2^2 \cdot 5^4$	$1372 = 2^2 \cdot 7^3$	$2160 = 2^4 \cdot 3^3 \cdot 5$

1.90. ¿Cuáles de los números siguientes tienen exactamente cuatro divisores? Calcúlalos.

a) 77	**c) 12**	**e) 21**	**g) 27**
b) 6	**d) 8**	**f) 30**	**h) 125**

a) Divisores de 77: 1, 7, 11, 77
b) Divisores de 6: 1, 2, 3, 6
c) Divisores de 12: 1, 2, 3, 4, 6, 12
d) Divisores de 8: 1, 2, 4, 8
e) Divisores de 21: 1, 3, 7, 21
f) Divisores de 30: 1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30
g) Divisores de 27: 1, 3, 9, 27
h) Divisores de 125: 1, 5, 25, 125

1.91. Busca un número de tres cifras que sea múltiplo a la vez de 2, 3 y 5, pero que no lo sea ni de 9 ni de 11.

Lo más fácil es hacer que la suma de las cifras sea múltiplo de 3, pero no de 9; por ejemplo, 3 ó 6.

300, 501, 105, 510, 303, 210…

Además, para que sea múltiplo de 2 y de 5 tiene que terminar en 0.

300, 510, 210…

Y por último, que la diferencia entre la suma de las cifras que ocupan el lugar par y la suma de las cifras que ocupan el lugar impar no sea 0 ni múltiplo de 11.

300, 210, 510…

Máximo común divisor y mínimo común múltiplo

1.92. Calcula el máximo común divisor de los siguientes grupos de números.

a) 27 y 64	**d) 121 y 77**	**g) 10, 15 y 50**	**i) 10, 100 y 50**
b) 44 y 35	**e) 20, 15 y 30**	**h) 9, 12 y 24**	**j) 33, 77 y 121**
c) 25 y 40	**f) 18, 30 y 36**		

a) $27 = 3^3$, $64 = 2^6$, m.c.d.(27, 64) = 1
b) $44 = 2^2 \cdot 11$, $35 = 5 \cdot 7$, m.c.d.(44, 35) = 1
c) $25 = 5^2$, $40 = 2^3 \cdot 5$, m.c.d.(25, 40) = 5
d) $121 = 11^2$, $77 = 7 \cdot 11$, m.c.d.(121, 77) = 11
e) $20 = 2^2 \cdot 5$, $15 = 3 \cdot 5$, $30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$, m.c.d.(20, 15, 30) = 5
f) $18 = 2 \cdot 3^2$, $30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$, $36 = 2^2 \cdot 3^2$, m.c.d.(18, 30, 36) = $2 \cdot 3 = 6$
g) $10 = 2 \cdot 5$, $15 = 3 \cdot 5$, $50 = 2 \cdot 5^2$, m.c.d.(10, 15, 50) = 5
h) $9 = 3^2$, $12 = 2^2 \cdot 3$, $24 = 2^3 \cdot 3$, m.c.d.(9, 12, 24) = 3
i) $10 = 2 \cdot 5$, $100 = 2^2 \cdot 5^2$, $50 = 2 \cdot 5^2$, m.c.d.(10, 100, 50) = 10
j) $33 = 3 \cdot 11$, $77 = 7 \cdot 11$, $121 = 11^2$, m.c.d.(33, 77, 121) = 11

1.93. Halla el mínimo común múltiplo de estos grupos de números.

a) **4 y 9** **d)** **2, 4 y 6** **g)** **10, 100 y 200** **i)** **11, 22 y 20**

b) **6 y 7** **e)** **15, 5 y 35** **h)** **7, 8 y 9** **j)** **33, 77 y 121**

c) **32 y 16** **f)** **9, 6 y 12**

a) $4 = 2^2$, $9 = 3^2$, m.c.m.$(4, 9) = 2^2 \cdot 3^2 = 36$

b) $6 = 2 \cdot 3$, $7 = 7$, m.c.m.$(6, 7) = 42$

c) $32 = 2^5$, $16 = 2^4$, m.c.m.$(16, 32) = 2^5 = 32$

d) $2 = 2$, $4 = 2^2$, $6 = 2 \cdot 3$, m.c.m.$(2, 4, 6) = 2^2 \cdot 3 = 12$

e) $15 = 3 \cdot 5$, $5 = 5$, $35 = 5 \cdot 7$, m.c.m.$(5, 15, 35) = 3 \cdot 5 \cdot 7 = 105$

f) $9 = 3^2$, $6 = 2 \cdot 3$, $12 = 2^2 \cdot 3$, m.c.m.$(6, 9, 12) = 2^2 \cdot 3^2 = 36$

g) $10 = 2 \cdot 5$, $100 = 2^2 \cdot 5^2$, $200 = 2^3 \cdot 5^2$, m.c.m.$(10, 100, 200) = 200$

h) $7 = 7$, $8 = 2^3$, $9 = 3^2$, m.c.m.$(7, 8, 9) = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 7 = 504$

i) $11 = 11$, $22 = 2 \cdot 11$, $20 = 2^2 \cdot 5$, m.c.m.$(11, 20, 22) = 2^2 \cdot 5 \cdot 11 = 220$

j) $33 = 3 \cdot 11$, $77 = 7 \cdot 11$, $121 = 11^2$, m.c.m.$(33, 77, 121) = 3 \cdot 7 \cdot 11^2 = 2541$

PROBLEMAS

1.94. Escribe 56 como diferencia de dos números mayores que 60.

Respuesta abierta. Un ejemplo puede ser: 121– 65 = 56.

1.95. Las distancias entre las ciudades *A*, *B* y *C* son: entre *A* y *B*, 235 kilómetros; entre *A* y *C*, 49, y entre *B* y *C*, 134. Calcula los kilómetros que recorre Silvia en estos casos.

a) **Va de *A* a *C* pasando por *B*.**

b) **Va de *B* a *A* visitando antes a su prima en *C*.**

a) 235 + 134 = 369 km

b) 134 + 49 = 183 km

1.96. Está previsto que asistan 120 personas a una fiesta. ¿De cuántos comensales pueden ser las mesas si todas han de ser iguales y estar completas?

Los divisores de 120 son: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 15, 20, 24, 30, 40, 60 y 120; por tanto, las mesas pueden ser de cualquiera de esos números de comensales.

1.97. Para obtener un número de cuatro cifras divisible por 2, ¿qué números puedes añadir a la derecha de 357?

Se puede añadir cualquier cifra par: 0, 2, 4, 6 y 8.

1.98. Estudia qué cifras tendrías que añadir a la izquierda de 451 para obtener un número de cuatro cifras múltiplo de 3.

Como 4 + 5 + 1 = 10, podría añadir 2, 5 y 8, ya que así las cifras sumarían 12, 15 y 18, que son todos múltiplos de 3.

1.99. Busca un número capicúa de 4 cifras con las siguientes características y, después, descomponlo en factores primos.

- **El valor posicional de 5 es 500.**
- **La cifra de las unidades es igual a 2.**

Si 5 tiene el valor de posición 500, entonces ocupa el lugar de las centenas. Como la cifra de las unidades es 2, el número será de la forma: _ 5 _ 2.
Como el número es capicúa, será 2552.
$2552 = 2^3 \cdot 11 \cdot 29$

1.100. Nuria lleva los papeles al contenedor de reciclaje cada 5 días y Pedro lo hace cada 3. El día 20 de mayo se encontraron allí.

¿Cuándo volverán a coincidir?

Tenemos que calcular el m.c.m.(3, 5) = $3 \cdot 5 = 15$. Tienen que pasar 15 días.
Vuelven a coincidir el 4 de junio.

1.101. En un terreno rectangular de 240 por 360 metros se proyecta colocar placas cuadradas del mayor tamaño posible para recoger energía solar.

¿Qué longitud deben tener los lados de las placas?

$240 = 2^4 \cdot 3 \cdot 5$, $360 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5$

Se calcula el m.c.d.(240, 360) = $2^3 \cdot 3 \cdot 5 = 120$ m de lado deben tener las placas.

1.102. Pedro, al colocar sus fotos en un álbum, se ha dado cuenta de que si coloca 4 en cada página, solo quedan 2 para la última página. Lo mismo ocurre si coloca 5 ó 6 fotos en cada página.

a) ¿Cuántas fotos tiene Pedro?

b) ¿Cuántas debe colocar en cada página para que todas tengan el mismo número y no sobre ninguna?

a) Calculamos el m.c.m.(4, 5, 6) = $2^2 \cdot 5 \cdot 3 = 60$. Ahora, sumando 2 unidades, 60 + 2, hallamos el menor número posible de fotos que tiene Pedro.

b) Los divisores de 62 son 1, 2 y 31, luego con cualquier número de fotos igual a uno de sus divisores se cumple la condición pedida, pero 31 son demasiadas para una página y 1 demasiado pocas, así que las coloca de dos en dos..

1.103. Marta tiene un número de libros comprendido entre 500 y 1000. Está colocándolos en una estantería. Si coloca 12 en cada estante, quedan 11 libros en el último; si pone 14 en cada estante, en el último coloca 13, y cuando los ordena de 15 en 15, en el último estante coloca 14.

¿Cuántos libros tiene Marta?

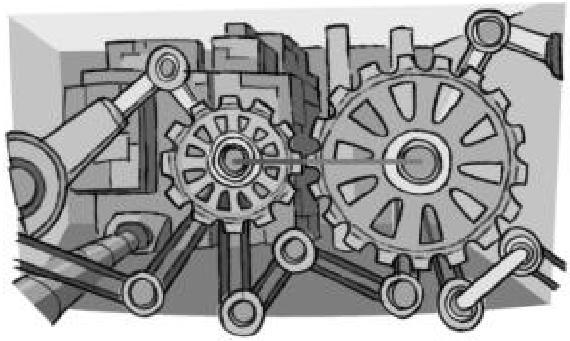
Si sumamos 1 al número de libros que tiene, el número obtenido es divisible por 12, por 14 y por 15. Por tanto, es divisible por el mínimo común múltiplo de 12, 14 y 15.

m.c.m.(12, 14, 15) = $2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 = 420$

El único múltiplo de 420 mayor que 500 y menor que 1000 es 840.

840 – 1 = 839. Marta tiene 839 libros.

1.104. Observa detenidamente el engranaje de la figura.



a) ¿Cuántas vueltas ha de dar la rueda menor para que vuelvan a coincidir las líneas roja y verde? En ese momento, ¿cuántas vueltas ha dado la rueda mayor?

b) Si la rueda menor va a 15 revoluciones por minuto, ¿a cuánto va la rueda mayor?

a) La rueda pequeña tiene 12 dientes y la grande 18. El m. c. m. (12, 18) es 36. Volverán a coincidir cuando la rueda pequeña haya dado 36 : 3 = 3 vueltas y la grande 36 : 18 = 2 vueltas.

b) Si cada 3 vueltas de la rueda menor, la mayor da 2 vueltas, 15 vueltas de la pequeña significan 10 vueltas de la rueda mayor. Es decir, la rueda de mayor tamaño qira a 10 revoluciones por minuto.

1.105. Un número dividido entre 2 da de resto 1. Si se divide entre 4, el resto es 3; al dividirlo entre 6, el resto es 5; al dividirlo entre 7, el resto es 6, y por último, cuando se divide entre 9, el resto que obtenemos es 8.

a) ¿Cuál es el menor número que cumple estas condiciones?

b) ¿Cuáles son los dos siguientes?

a) Si al número se le suma 1, se obtiene otro número que es múltiplo de 4, de 6, de 7 y de 9.

Por tanto, es múltiplo del m.c.m.(4, 6, 7, 9) = 252. El menor número es: 252 – 1 = 251.

b) Los dos siguientes son: 252 · 2 – 1 = 503 y 252 · 3 – 1 = 755.

1.106. Un estadio olímpico tiene capacidad para 30 000 espectadores. En un determinado acontecimiento deportivo hubo un número de asistentes que cumplía las siguientes características:

– **Ser divisible por 2.**

– **Ser divisible por 7.**

– **Ser divisible por 11.**

– **Ser un cuadrado perfecto.**

Calcula el número de espectadores.

Al ser divisible por 2, por 7 y por 11, debe ser múltiplo común de 2, 7 y 11.
Por tanto, múltiplo del m.c.m.(2, 7, 11) = 154.
Como además es un cuadrado perfecto, debe ser múltiplo de 154^2 = 23 716.
Como el siguiente múltiplo es mayor que 30 000, el número de espectadores es igual a 23 716.

1.107. Los antiguos mesopotámicos tenían un sistema de numeración de base 60. ¿Cuántas cifras utilizaban?

Utilizaban 60 cifras.

1.108. Para cualquier par de números naturales, *a* y *b*, se cumple que:

$$a \cdot b = \text{m.c.d.}(a, b) \cdot \text{m.c.m.}(a, b)$$

Utilízalo para hallar un número *a* si se sabe que m.c.d.(*a*, 15) = 3 y m.c.m.(*a*, 15) = 90

$a \cdot b = \text{m.c.d.}(a, b) \cdot \text{m.c.m.}(a, b) \Rightarrow a \cdot 15 = 3 \cdot 90 \Rightarrow a = \dfrac{270}{15} = 18$

AMPLIACIÓN

1.109. El primer año capicúa del siglo XXI fue 2002. ¿En cuántos otros años del siglo XXI volverá a ocurrir esto?

a) En ninguno **b)** En 1 **c)** En 9 **d)** En 81

Como la cifra de los miles es 2, la de las unidades debe ser 2, y, para que sea capicúa, las cifras de las centenas y de las decenas deben ser iguales. Si estas no son cero, habremos cambiado de siglo, luego no volverá a haber un año capicua en el siglo XXI.

1.110. ¿De cuántas formas puedes escribir el número 2009 como suma de dos números primos?

a) De 1 **b)** De 2 **c)** De 3 **d)** De ninguna

Como 2009 es impar, se escribirá como suma de un número par y uno impar. El único primo par es 2, pero 2009 – 2 = 2007, que no es primo, pues es múltiplo de 3 (la suma de sus cifras es múltiplo de 3). La respuesta es d.

1.111. Cuando sumamos los números de tres cifras 6*a*3 y 2*b*5, el resultado es un número divisible entre 9. ¿Cuál es el mayor valor posible para *a* + *b*?

a) 20 **b)** 12 **c)** 11 **d)** 9

La suma es $8 \cdot 100 + (a + b) \cdot 10 + 8 = 8 \cdot 99 + 8 + (a + b) \cdot 9 + (a + b) + 8$.
Para que sea múltiplo de 9, debe ser $8 + (a + b) + 8 = 16 + (a + b)$ un múltiplo de 9, y $a + b$ no puede ser mayor que 18. Luego $a + b$ puede ser 2 u 11.
El máximo valor es 11.

1.112. El producto de las edades de dos personas mayores de edad es 462. ¿Cuál es su suma?

a) 83 **b)** 47 **c)** 43 **d)** 53

$462 = 2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 11$. Buscamos dos números que dividan a 462 y que puedan ser la edad de dos personas mayores. La única posibilidad es que sean 21 y 22, cuya suma es 43.

1.113. El número *N* es el cuadrado de un número entero, siendo 18 un factor de *N*. ¿Cuál es el menor valor posible para $\frac{N}{18}$?

a) 1 **b) 48** **c) 72** **d) 2**

$N = 2 \cdot 3^2 \cdot a$. Para que sea un cuadrado perfecto, $a = 2 \cdot b^2$. El menor valor posible para b es 1 y, por tanto, $N = 18 \cdot 2 \Rightarrow \frac{N}{18} = 2$.

1.114. ¿Cuántos números del 1 al 100 verifican que su factor primo más pequeño es 7?

a) 14 **b) 7** **c) 4** **d) 3**

Pueden ser 7 · 7 = 49, 7 · 11 = 77 ó 7 · 13 = 91.

1.115. Cuando dividimos 26 entre un entero positivo *n*, el resto es 2. ¿Cuál es la suma de todos los valores posibles de *n*?

a) 21 **b) 33** **c) 45** **d) 57**

26 = 24 + 2

Los posibles valores de *n* son los divisores de 24 mayores que 2 (pues el resto es 2). Como los divisores de 24 son 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24, la suma de los posibles valores de *n* es 3 + 4 + 6 + 8 + 12 + 24 = 57.

AUTOEVALUACIÓN

1.A1. Escribe, para cada caso, el número que corresponda y cómo se lee.

a) 15 centenas y 7 unidades.

b) 88 millares, 67 decenas y 29 unidades.

c) 3 millares, 34 centenas y 42 decenas.

a) 15 centenas = 1500 unidades; 1500 + 7 = 1507; mil quinientos siete

b) 88 millares = 88 000 unidades; 67 decenas = 670 unidades; 88 000 + 670 + 29 = 88 699; ochenta y ocho mil seiscientos noventa y nueve.

c) 3 millares = 3000 unidades; 34 centenas = 3400 unidades; 42 decenas = 420 unidades; 3000 + 3400 + 420 = 6820; seis mil ochocientos veinte.

1.A2. Indica alguna propiedad de los números naturales que no se cumple cuando actúan como códigos.

No se pueden realizar operaciones aritméticas con ellos.

1.A3. Copia en tu cuaderno y completa con el número que corresponda, y explica en cada caso la propiedad que aplicas.

a) $44 + 13 = 13 + \square$ **c)** $133 - \square = 86 \Rightarrow 100 - 14 = \square$

b) $5 \cdot (7 + 8) = 35 + \square$ **d)** $12 \cdot (\square + \square) = \square \cdot 5 + 12 \cdot 17$

a) 44 + 13 = 13 + 44. Propiedad conmutativa de la suma

b) 5 · (7 + 8) = 35 + 40. Propiedad distributiva del producto respecto a la suma

c) 133 – 47= 86, 100 – 14 = 86. Si al minuendo y al sustraendo se les suma o resta el mismo número, la diferencia no varía.

d) 12 · (5 + 17) = 12 · 5 + 12 · 17. Propiedad distributiva del producto respecto a la suma

1.A4. Halla los múltiplos de 4 comprendidos entre 50 y 75.

El primero es 52, y a partir de él, sumando cuatro consecutivamente, obtenemos que los números pedidos son: 52, 56, 60, 64, 68 y 72.

1.A5. Aplica los criterios de divisibilidad para indicar cuáles de los siguientes números:

4158 7058 1800 14 727 1530

son divisibles por estos otros números.

a) 2 **d) 5**

b) 3 **e) 9**

c) 4 **f) 11**

a) 4158, 7058, 1800, 1530 d) 1800, 1530

b) 4158, 1800, 14 727, 1530 e) 4158, 1800, 1530

c) 1800 f) 4158

1.A6. Escribe dos números compuestos que sean primos entre sí.

Por ejemplo, 4 y 9, 15 y 8…

1.A7. ¿De cuántas formas distintas pueden agruparse los 40 componentes de un club de montaña de manera que en todos los grupos haya el mismo número de miembros?

Divisores de 40: 1, 2, 4, 5, 8, 10, 20, 40

Luego podrán agruparse en un número igual a cualquiera de los divisores de 40.

1.A8. Descompón en factores primos 729.

$729 = 3^6$

1.A9. Calcula el máximo común divisor y el mínimo común múltiplo de estos números.

a) 28 y 72

b) 4, 16 y 20

a) $28 = 2^2 \cdot 7$, $72 = 2^3 \cdot 3^2$. m.c.m.$(28, 72) = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 7 = 504$. m.c.d.$(28, 72) = 2^2 = 4$

b) $4 = 2^2$, $16 = 2^4$, $20 = 2^2 \cdot 5$. m.c.m.$(4, 16, 20) = 2^4 \cdot 5 = 80$. m.c.d.$(4, 16, 20) = 2^2 = 4$

PON A PRUEBA TUS COMPETENCIAS

Calcula y reflexiona > Los códigos de barras

1.1. El ISBN es un código de tipo EAN que identifica los libros. Copia de tus libros de texto el ISBN y compruebalo. ¿Has obtenido un múltiplo de 10?

El código que aparece en la cubierta de este libro es 9788467539905.

$9 + 8 + 4 + 7 + 3 + 9 + 5 = 45$

$3 \cdot (7 + 8 + 6 + 5 + 9) = 3 \cdot 35 = 105$

$45 + 105 = 150$, que es múltiplo de 10.

1.2. Comprueba que si en el código anterior se cambia un número, por ejemplo, 841011801$\underline{2}$766, ya no es un número de identificación.

$8 + 1 + 1 + 8 + 1 + 7 + 6 = 32$

$4 + 0 + 1 + 0 + 2 + 6 = 13$, $3 \cdot 13 = 39$

$32 + 39 = 71$, que no es múltiplo de 10.

1.3. Comprueba que si en el código anterior se bailan dos números consecutivos, por ejemplo, 8$\underline{14}$0118015766, ya no es un número de identificación.

$8 + 4 + 1 + 8 + 1 + 7 + 6 = 35$

$1 + 0 + 1 + 0 + 5 + 6 = 13$, $3 \cdot 13 = 39$

$35 + 39 = 74$, que no es múltiplo de 10.

1.4. ¿Puede ser 23430900123 el número de identificación de algún artículo?

$2 + 4 + 0 + 0 + 1 + 3 = 10$

$3 + 3 + 9 + 0 + 2 = 173 \cdot 17 = 51$

$10 + 51 = 61$, que no es múltiplo de 10, así que ese número no puede ser el número de identificación de un artículo.

1.5. ¿Cuál es el dígito de control del número de identificación 2343090012∗?

$2 + 4 + 0 + 0 + 1 + * = 7 + *$

$3 + 3 + 9 + 0 + 2 = 17$, $3 \cdot 17 = 51$

$51 + 7 + * = 58 + *$ Para que sea múltiplo de 10, $*$ debe ser 2.

1.6. ¿Por qué crees que es útil añadir un dígito de control en los códigos de barras?

Para detectar si se comete algún error al introducir los datos.

1.7. De un artículo se ha borrado uno de los dígitos del número de identificación y solo se puede leer 8434∗02100721. ¿Puedes recuperar el dígito borrado?

$8 + 3 + * + 2 + 0 + 7 + 1 = 21 + *$

$4 + 4 + 0 + 1 + 0 + 2 = 11$, $3 \cdot 11 = 33$

$33 + 21 + * = 54 + *$, luego $*$ debe ser 6.

1.8. Busca en casa códigos de barras de diversos productos y comprueba que obtienes siempre un múltiplo de 10.

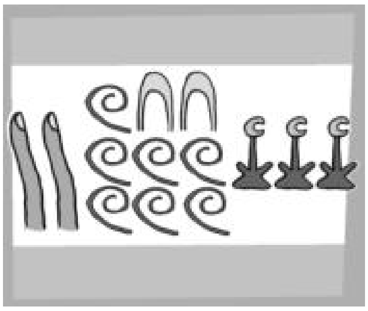
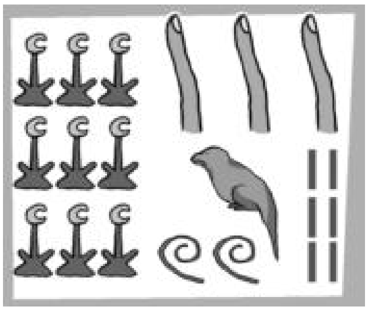
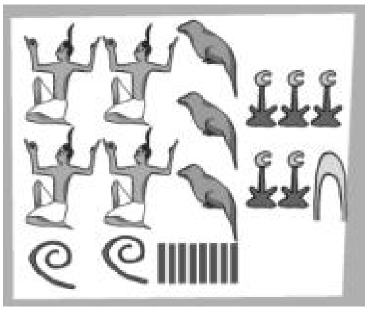
Actividad abierta.

1.9. También el NIF tiene un "dígito" que sirve para detectar errores, es la letra que aparece al final. Averigua en internet cómo se asigna la letra a cada número de DNI.

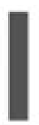
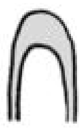
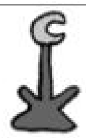
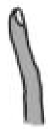
Se calcula el resto de dividir el número de documento entre 23 y a cada resto se le asigna una letra como indica la tabla.

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22
T	R	W	A	G	M	Y	F	P	D	X	B	N	J	Z	S	Q	V	H	L	C	K	E

Analiza y deduce > La numeración egipcia

1.1. A la vista de los ejemplos, indica qué símbolo corresponde a los diferentes órdenes.

						
1	10	100	1000	10 000	100 000	1 000 000

1.2. En los ejemplos se han usado los siete símbolos que empleaban los egipcios. ¿Podrías decir cuál es el mayor número que podían escribir?

9 999 999

1.3. ¿Cuántos símbolos de cada tipo puede haber como mucho en un número? Razona tu respuesta.

Nueve

1.4. Escribe un número en la numeración egipcia y pídele a tu compañero que lo lea.

Respuesta abierta

1.5. Los egipcios no utilizaban el cero. ¿Por qué no lo necesitaban en su sistema de numeración?

Porque es un sistema aditivo, no posicional, y, por tanto, no es necesario dejar un "espacio" si falta alguna de las potencias de 10.

Aprende a pensar > Números perfectos

1.1. ¿Cuándo se dice que un número es perfecto? Comprueba que 6 y 496 son también números perfectos.

Cuando la suma de sus divisores propios (todos sus divisores salvo el propio número) es igual al número.
Divisores de 6 = {1, 2, 3, 6}, 6 = 1 + 2 + 3

Divisores de 496 = {1, 2, 4, 8, 16, 31, 62, 124, 248, 496}, 496 = 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 31 + 62 + + 124 + 248

1.2. ¿Puedes encontrar una propiedad común a todos los números perfectos que aparecen en el texto?

Que son pares (no se han encontrado perfectos impares hasta el momento).

Que son de la forma $2^{n-1}(2^n - 1)$. De hecho, si $(2^n - 1)$ es primo, entonces $2^{n-1}(2^n - 1)$ es un número perfecto.

1.3. Busca información sobre la historia de los números perfectos y sobre otro tipo de números curiosos: primos gemelos, amigos y primos de Mersenne.

El matemático Euclides descubrió que los cuatro primeros números perfectos vienen dados por la fórmula $2^{n-1} \cdot (2^n - 1)$:

- $n = 2$: $2^1 \cdot (2^2 - 1) = 6$
- $n = 3$: $2^2 \cdot (2^3 - 1) = 28$
- $n = 5$: $2^4 \cdot (2^5 - 1) = 496$
- $n = 7$: $2^6 \cdot (2^7 - 1) = 8128$

Al darse cuenta de que $2^n - 1$ es un número primo en cada caso, Euclides demostró que la fórmula $2^{n-1}(2^n - 1)$ genera un número perfecto par siempre que $2^n - 1$ es primo.

Primos gemelos: Son dos números primos cuya diferencia es 2: (3, 5), (5, 7), (11, 13)…

Números amigos: Son dos enteros positivos *a* y *b* tales que *a* es la suma de los divisores propios de *b*, y *b* es la suma de los divisores propios de *a*. Por ejemplo: (220, 284).

Primos de Mersenne: Son números primos de la forma $2^n - 1$.
Por ejemplo: $3 = 2^2 - 1$, $7 = 2^3 - 1$ son primos de Mersenne. ¡Ojo!, no todo número de la forma $2^n - 1$ es primo ($15 = 2^4 - 1$).

Proyecto editorial: **Equipo de Educación Secundaria del Grupo SM**

Autoría: **M.ª Ángeles Anaya, Isabel de los Santos, José Luis González, Carlos Ramón Laca, M.ª Paz Bujanda, Serafín Mansilla**

Edición: **Rafaela Arévalo, Eva Béjar**

Corrección: **Ricardo Ramírez**

Ilustración: **Félix Anaya, Modesto Arregui, Juan Francisco Cobos, Félix Moreno, José Santos, Estudio "Haciendo el león"**

Diseño: **Pablo Canelas, Alfonso Ruano**

Maquetación: **SAFEKAT S. L.**

Coordinación de diseño: **José Luis Rodríguez**

Coordinación editorial: **Josefina Arévalo**

Dirección del proyecto: **Aída Moya**

(*) Una pequeña cantidad de ejercicios o apartados de ejercicios han sido marcados porque contienen alguna corrección en su enunciado respecto al que aparece en el libro del alumno.

Impreso en España – *Printed in Spain*