5 Polinomios

ACTIVIDADES INICIALES

5.I. Juntaos por parejas. Piensa en una figura geométrica (un cubo, una esfera, una pirámide, etc.), y escribe la expresión de su área o su volumen. Pídele a tu compañero que adivine qué representa la expresión que has escrito. ¿Lográis comunicaros?

Actividad abierta

5.II. ¿Existió de verdad la torre de Babel? Un arqueólogo encontró en Irak las ruinas de una torre que pudo ser la de Babel. Tenía una base cuadrada de 92 metros de lado y alcanzó una altura *h* de entre 60 y 90 metros, pero nadie sabe qué forma tenía.

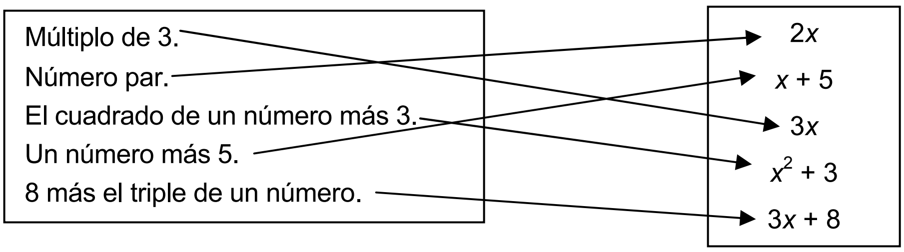
Dibuja tu propia torre de Babel, que cumpla estas condiciones y con la forma que quieras, y pide a tu compañero que calcule su área y volumen.

Actividad abierta

ACTIVIDADES PROPUESTAS

5.1. Actividad resuelta

5.2. Relaciona cada enunciado con su expresión algebraica.



5.3. Escribe las expresiones algebraicas de:
a) Tres números consecutivos. **b) Tres números pares consecutivos.**

a) x, $(x + 1)$, $(x + 2)$ b) $2x$, $2(x + 1)$, $2(x + 2)$

5.4. Describe las expresiones algebraicas:
a) $2x + 1$
b) $x^2 - y^2$
c) $-x$

a) "Uno más el doble de un número"
b) "La diferencia de cuadrados de dos números"
c) "El opuesto de un número"

5.5. Expresa en forma algebraica la longitud total de las aristas, el área y el volumen de un cubo cuya arista mide *x* centímetros.

Longitud: $12x$ cm
Área: $6x^2$ cm^2
Volumen: x^3 cm^3

5.6. Si la arista de cada cubito del cubo de Rubik mide t centímetros, ¿cuál es la expresión del volumen del cubo completo?

$(3t)^3 = 3^3t^3 = 27t^3$ cm^3

5.7. Actividad resuelta

5.8. Averigua, para estos valores de *x*, el valor numérico de la expresión $x^2 - 7x + 10$.

a) $x = 2$ **c) $x = 3$**
b) $x = 1$ **d) $x = 5$**

a) $2^2 - 7 \cdot 2 + 10 = 0$ c) $3^2 - 7 \cdot 3 + 10 = -2$
b) $1^2 - 7 \cdot 1 + 10 = 4$ d) $5^2 - 7 \cdot 5 + 10 = 0$

5.9. Obtener el valor numérico puede ayudar a comprobar si una igualdad es falsa; basta sustituir la *x* por números sencillos. Comprueba si son falsas estas igualdades.

a) $x \cdot x \cdot x = 3x$ **c) $(x^2)^3 = x^5$**
b) $x^2 \cdot x^4 = x^6$ **d) $x^2 + x^3 = x^5$**

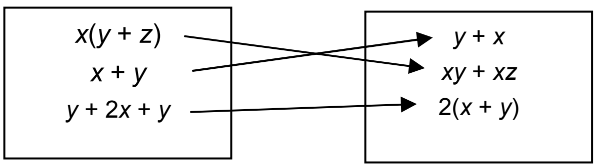
a) Si $x = 2$; $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8 \neq 3 \cdot 2 = 6$ c) Si $x = 2$; $(2^2)^3 = 64 \neq 2^5 = 32$
b) Cierta d) Si $x = 1$; $1^2 + 1^3 = 2 \neq 1^5 = 1$

5.10. El valor numérico de las siguientes expresiones es 0 para algunos números. Indica cuáles son.

a) $x^2 - 64$ **c) $x^2 + 25$**
b) $x^3 - 1\,000$ **d) $x^3 + 64$**

a) $x = 8$, $x = -8$ c) La expresión nunca es 0.
b) $x = 10$ d) $x = -4$

5.11. Relaciona cada expresión algebraica con una equivalente.



5.12. Mi habitación mide *a* metros de largo, el doble de ancho y el triple de alto. La pintura cuesta *p* euros el litro, y con un litro se pinta medio metro cuadrado.

a) Escribe una expresión con las variables *a* y *p* que indique cuánto me costará pintar las cuatro paredes y el techo.

b) ¿Cuánto me costará si el ancho es de 4 metros y $p = 2$? ¿Y si $p = 1$?

a) Para pintar 1 m^2 se necesitan 2 L de pintura y costará $2p$ euros. La expresión con las variables a y p que me indica lo que me costará pintar las cuatro paredes y el techo es la siguiente: $40pa^2$.

b) Si el ancho es de 4 metros $\Rightarrow a = 2$. Si además $p = 2 \Rightarrow 40 \cdot 2 \cdot 2^2 = 320$ euros.

Si $p = 1 \Rightarrow 40 \cdot 1 \cdot 2^2 = 160$ euros

5.13. Actividad resuelta

5.14. Indica cuáles de las siguientes expresiones algebraicas son monomios.

a) $3{,}7x^2$ **b)** $\frac{1}{3}x^3$ **c)** $\left(\frac{x}{3}\right)^3$ **d)** $\frac{x + y + z}{11}$

Son todas monomios menos la del apartado d.

5.15. Escribe el coeficiente, la parte literal y el grado de cada monomio.

a) $7x^2y$ **b)** $6xy^4z^2$ **c)** $-23x^5y^4$ **d)** $-9x^2yz^3$

a) Coeficiente: 7. Parte literal: x^2y. Grado: 3.
b) Coeficiente: 6. Parte literal: xy^4z^2. Grado: 7.
c) Coeficiente: –23. Parte literal: x^5y^4. Grado: 9.
d) Coeficiente: –9. Parte literal: x^2yz^3. Grado: 6.

5.16. Escribe un monomio semejante a :

a) $7xyz$ **b)** $-11x^4y^2$ **c)** $3x^4y^5$ **d)** $13x^7y^3$

Respuesta abierta, por ejemplo:
a) $-xyz$ b) $2x^4y^2$ c) $-3x^4y^5$ d) $26x^7y^3$

5.17. Cándido define el grado de un monomio como el número de factores que forman su parte literal. ¿Coincide esta definición con la dada? Aplica ambas definiciones a $3x^2y^4$.

a) Sí
b) Con la primera definición, el grado es 2 + 4 = 6.
Con la segunda definición hemos de tener en cuenta que $x^2y^4 = x \cdot x \cdot y \cdot y \cdot y \cdot y$, hay 6 factores, el grado es 6.

5.18. ¿Verdadero o falso? Si dos monomios tienen el mismo grado, entonces son semejantes.

Falso. Si tomamos los monomios $3xy$ y $5x^2$, los dos tienen grado 2, pero distinta parte literal, por lo que no pueden ser semejantes.

5.19. Actividad resuelta

5.20. ¿Cuáles de estas expresiones son polinomios?

a) $\frac{5}{2a+b}$ **b)** $\frac{2+x}{2}$ **c)** $\frac{1}{3}x+1-\frac{2}{4}x^2$ **d)** 2^x+1

Son polinomios la b y la c.

5.21. Indica el grado de estos polinomios.

a) $x^5 - 7x + 1$ **c)** $1 + x + x^2$ **e)** $3xy^2+2x^2y+5x^2y^2$
b) $1 - x^3$ **d)** $x^7 - x^{11} - 11$ **f)** $2zt + 3t^3 + 2z^5$

a) Tiene grado 5. c) Tiene grado 2. e) Tiene grado 4.
b) Tiene grado 3. d) Tiene grado 11. f) Tiene grado 5.

5.22. (TIC) Determina el valor numérico para $x = 10$ de:

a) $x^3 + x + 1$ **b)** $2x^4 - x^2 - 1$ **c)** $x^6 - x^3$

a) $10^3 + 10 + 1 = 1011$
b) $2 \cdot 10^4 - 10^2 - 1 = 19\,799$
c) $10^6 - 10^3 = 999\,000$

5.23. (TIC) Calcula el valor numérico del polinomio $P(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$ para los valores $x = 1$, $x = 2$ y $x = 3$.

$P(1) = 1^3 - 6 \cdot 1^2 + 11 \cdot 1 - 6 = 0$
$P(2) = 2^3 - 6 \cdot 2^2 + 11 \cdot 2 - 6 = 0$
$P(3) = 3^3 - 6 \cdot 3^2 + 11 \cdot 3 - 6 = 0$

5.24. En una tablilla babilónica del 1800 a. C. se lee:

"He sumado siete veces el lado de mi cuadrado y once veces su área, y he obtenido seis más un cuarto".

a) Formula el problema con un polinomio.

b) ¿Cuál es su término independiente?

c) Si el lado de mi cuadrado hubiese sido de 2 metros, ¿cuánto habría obtenido?

a) Si el lado del cuadrado es l, entonces $7l+11l^2=6+\frac{1}{4}$.

b) $-6-\frac{1}{4}$

c) $7 \cdot 2+11 \cdot (2)^2=14+44=58$

5.25. Actividad resuelta

5.26. Reduce términos en estas expresiones.

a) $8x - 7y - 5x$ **c)** $12xy^2 - xy^2 - 4yx^2$
b) $x^3 - 6z^3 - 4z^3 + 2x^3$ **d)** $2xy + 3x + x^4 - 3x$

a) $3x - 7y$ c) $11xy^2 - 4yx^2$
b) $3x^3 - 10z^3$ d) $2xy + x^4$

5.27. La suma de dos monomios es $10x^5$. ¿Cuáles son?

a) $7x^2$ y $3x^3$ **c) $6x^4$ y $4x$**

b) $7x^5$ y $3x^5$ **d) $9x^5$ y $9x^5$**

Los del apartado b

5.28. (TIC) Con los siguientes polinomios:

$P(x) = 3x^4 - 7x^3 + 2x^2 - 11$

$Q(x) = 4x^4 + 5x^3 - 8x^2 + 12$

$R(x) = 3x^5 - 7x^4 + 6x - 5$

Realiza estas operaciones.

a) $P(x) + Q(x)$ **c) $R(x) + Q(x)$** **e) $P(x) + Q(x) - R(x)$**

b) $P(x) - R(x)$ **d) $R(x) - Q(x)$** **f) $P(x) - Q(x) + R(x)$**

a) $7x^4 - 2x^3 - 6x^2 + 1$

b) $-3x^5 + 10x^4 - 7x^3 + 2x^2 - 6x - 6$

c) $3x^5 - 3x^4 + 5x^3 - 8x^2 + 6x + 7$

d) $3x^5 - 11x^4 - 5x^3 + 8x^2 + 6x - 17$

e) $-3x^5 - 2x^3 - 6x^2 - 6x + 6$

f) $3x^5 - 8x^4 - 12x^3 + 10x^2 + 6x - 28$

5.29. ¿Verdadero o falso? La suma de polinomios de grado *n* tiene siempre grado *n*.

Falso. Supongamos dos polinomios de grado n.

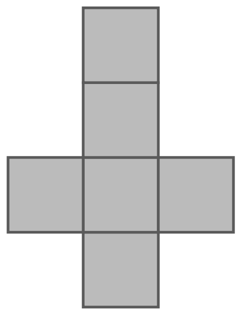
$a_1x^n + a_2x^{n-1} + ... + a_{n+1}$ y $b_1x^n + b_2x^{n-1} + ... + b_{n+1}$ con $a_1 = -b_1$, al sumar los términos de grado n se anulan. Entonces, la suma tendrá como máximo grado $(n - 1)$.

5.30. Aquí puedes ver el desarrollo plano de una figura geométrica que conoces.

a) Si cada cuadrado mide *x* centímetros de lado, ¿qué polinomio describe el área de la figura?

b) Calcula el volumen de la figura geométrica que se obtiene al cerrar el desarrollo plano.

c) Escoge otra figura geométrica que conozcas, dibuja su desarrollo plano y expresa su área y volumen con una suma de polinomios.



a) lado = x cm. El área de cada cuadrado es de x^2 cm^2. La figura geométrica que se obtiene es un cubo, que está formado por 6 caras, luego el área total es de $6x^2$ cm^2.

b) $V = x \cdot x \cdot x = x^3$ cm^3

c) Respuesta abierta

5.31. Actividad interactiva

5.32. Actividad resuelta

5.33. Realiza estos productos de monomios.

a) $2y \cdot 3z$ **c) $-5ab^2c \cdot 4a^3c \cdot b^2c$**

b) $3xy^2 \cdot (-5x^2yz)$ **d) $12xy \cdot 6x^2 \cdot x^2y^3$**

a) $6yz$

b) $-15x^3y^3z$

c) $-20a^4b^4c^3$

d) $72x^5y^4$

5.34. Multiplica el monomio por el polinomio.

a) $x^2 \cdot (3x^2 - 5x + 1)$ **c) $ab \cdot (2ab^2 + 3c - ab)$**

b) $5zt \cdot (2z^2t - 3zt^3)$ **d) $2xy^2 \cdot (5x + 2y - 3xy)$**

a) $3x^4 - 5x^3 + x^2$ c) $2a^2b^3 + 3abc - a^2b^2$

b) $10z^3t^2 - 15z^2t^4$ d) $10x^2y^2 + 4xy^3 - 6x^2y^3$

5.35. (TIC) Calcula estos productos de binomios.

a) $(x^2 + 11) \cdot (x^2 - 11)$ **c) $(2x - 3y) \cdot (x - y)$**

b) $(x^3 + y^3) \cdot (7x + 2)$ **d) $(3tz - 2t^2) \cdot (tz - z^2)$**

a) $x^4 - 121$ c) $2x^2 - 5xy + 3y^2$

b) $7x^4 + 2x^3 + 7xy^3 + 2y^3$ d) $3t^2z^2 - 3tz^3 - 2t^3z + 2t^2z^2$

5.36. Realiza estos productos.

a) $(2x^2 + x + 1) \cdot (x - 3)$ **b) $(3x^3 - x^2 + 3) \cdot (2x + 1)$**

a) $2x^3 + x^2 + x - 6x^2 - 3x - 3 = 2x^3 - 5x^2 - 2x - 3$

b) $6x^4 - 2x^3 + 6x + 3x^3 - x^2 + 3 = 6x^4 + x^3 - x^2 + 6x + 3$

5.37. Extrae factor común en estas expresiones.

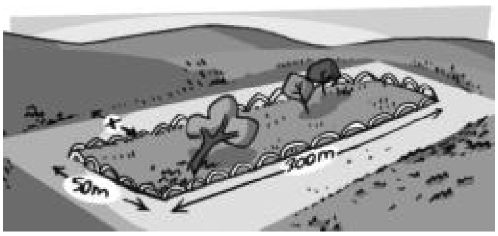
a) $x^3 - 7x^4 + 2x^2y$ **c) $3t^5 + 21t^3x^4 + 15t^2x$**

b) $-4z^2x - 2zx^4 - 12zx$ **d) $6x^4y - 24x^7y + 12x^3y^5$**

a) $x^3 - 7x^4 + 2x^2y = x^2\left(x - 7x^2 + 2y\right)$ c) $3t^5 + 21t^3x^4 + 15t^2x = 3t^2\left(t^3 + 7tx^4 + 5x\right)$

b) $-4z^2x - 2zx^4 - 12zx = -2zx\left(2z + x^3 + 6\right)$ d) $6x^4y - 24x^7y + 12x^3y^5 = 6x^3y\left(x - 4x^4 + 2y^4\right)$

5.38. El jardín rectangular del dibujo tiene un camino a su alrededor de *x* metros de ancho. Calcula la expresión que indica el área del camino.



Dividimos la superficie del camino en dos rectángulos de base 300 + 2x y altura x, y en dos rectángulos de base x y altura 50.

El área total del camino será:

$$2\left(300x + 2x^2\right) + 2\left(50x\right) = 4x^2 + 700x = x\left(4x + 700\right)$$

5.39. En un cuadrado de lado *x* se aumenta la base en 3 unidades y se reduce la altura a la tercera parte.

Halla el área del rectángulo resultante.

El rectángulo resultante tendrá de base x + 3, y de altura, $\frac{1}{3}x$, luego el área será:

$$\frac{1}{3}x\left(x + 3\right) = \frac{1}{3}x^2 + x.$$

5.40. Escribe el polinomio que representa el volumen de un cilindro de radio *a* + 1 y altura *a* + 2. ¿Cuánto vale para *a* = 0?

$V = \pi r^2 \cdot h$, $r = a + 1; h = a + 2 \Rightarrow V = \pi r^2 \cdot h = \pi(a+1)^2(a+2) = (a^3 + 4a^2 + 5a + 2)\pi$

Si $a = 0 \Rightarrow V = 2\pi$

5.41. Actividad interactiva

5.42. Actividad resuelta

5.43. Actividad resuelta

5.44. Desarrolla estas potencias.

a) $(2x + y + 1)^2$ b) $(2ab - 1 + a)^2$ c) $(2a + 1)^3$ d) $(1 - 3t)^3$

a) $(2x + y + 1) \cdot (2x + y + 1) = 4x^2 + 2xy + 2x + 2xy + y^2 + y + 2x + y + 1 = 4x^2 + y^2 + 4xy + 4x + 2y + 1$

b) $(2ab - 1 + a) \cdot (2ab - 1 + a) = 4a^2b^2 - 2ab + 2a^2b - 2ab + 1 - a + 2a^2b - a + a^2 =$
$= 4a^2b^2 + 4a^2b + a^2 - 4ab - 2a + 1$

c) $(2a + 1)^2(2a + 1) = (4a^2 + 4a + 1) \cdot (2a + 1) = 8a^3 + 4a^2 + 8a^2 + 4a + 2a + 1 = 8a^3 + 12a^2 + 6a + 1$

d) $(1 - 3t)^2(1 - 3t) = (1 - 6t + 9t^2) \cdot (1 - 3t) = 1 - 3t - 6t + 18t^2 + 9t^2 - 27t^3 = -27t^3 + 27t^2 - 9t + 1$

5.45. Comprueba la veracidad de estas igualdades. Si alguna es falsa, escribe el resultado verdadero.

a) $(2x^3 + 3x)^2 = 4x^6 + 9x^2 + 12x^4$
b) $(2x^3 - 5x)^2 = 4x^6 - 25x^2 + 20x^4$
c) $(5x + 3)(5x - 3) = 25x^2 + 9$
d) $(3x^2 - 4y)^2 = 9x^2 - 16y^2$

a) Cierta
b) Falsa. $(2x^3 - 5x)^2 = 4x^6 + 25x^2 - 20x^4$
c) Falsa. $(5x + 3)(5x - 3) = 25x^2 - 9$
d) Falsa. $(3x^2 - 4y)^2 = 9x^4 + 16y^2 - 24x^2y$

5.46. Desarrolla las siguientes expresiones utilizando las identidades notables.

a) $(a + 3b)^2$ b) $(a - 3b)^2$ c) $(3a + b)^2$ d) $(a + 3b) \cdot (a - 3b)$

a) $a^2 + 9b^2 + 6ab$ b) $a^2 + 9b^2 - 6ab$ c) $9a^2 + b^2 + 6ab$ d) $a^2 - 9b^2$

5.47. Resuelve estas operaciones sin calculadora.

a) $11^2 - 10^2$ b) $75^2 - 25^2$ c) $999^2 - 1$ d) $650^2 - 150^2$

a) $11^2 - 10^2 = (11 + 10) \cdot (11 - 10) = 21$
b) $75^2 - 25^2 = (75 + 25) \cdot (75 - 25) = 5000$
c) $999^2 - 1 = (999 + 1) \cdot (999 - 1) = 998\,000$
d) $650^2 - 150^2 = (650 + 150) \cdot (650 - 150) = 400\,000$

5.48. Expresa como una potencia:

a) $9x^2 + y^2 + 6xy$ b) $25y^2 + 100 + 100y$ c) $x^2 + 49 - 14x$ d) $x^4 + 12x^2 + 36$

a) $(3x + y)^2$ b) $(5y + 10)^2$ c) $(x - 7)^2$ d) $(x^2 + 6)^2$

5.49. Se tienen dos cuadrados de lados *x* y *x* + 1. ¿La diferencia de sus áreas es par o impar?

El área del cuadrado de lado x es x^2, y el área del cuadrado de lado $x + 1$ es $(x+1)^2 = x^2 + 2x + 1$. La diferencia de las áreas es $(x+1)^2 - x^2 = x^2 + 2x + 1 - x^2 = 2x + 1$, que es impar.

5.50. Actividad interactiva

EJERCICIOS

Expresiones algebraicas y su valor numérico

5.51. Actividad interactiva

5.52. Escribe en lenguaje algebraico.
a) Dos números cuyo producto es 18.
b) Tres cubos consecutivos.
c) Un múltiplo de 5 más su doble.
d) El producto de dos pares consecutivos.

a) x y $\frac{18}{x}$

c) $5x + 10x$

b) $x^3, (x+1)^3, (x+2)^3$

d) $2x \cdot (2x+2)$

5.53. (TIC) Calcula *x*, en cada caso, si el valor numérico de las siguientes expresiones es 0.

a) $3x - 24$ **b)** $\frac{7x}{56} - 1$ **c)** $(x+2)^3$ **d)** $\sqrt{x} - 7$

a) $3x - 24 = 0 \Rightarrow x = 8$

c) $(x+2)^3 = 0 \Rightarrow x = -2$

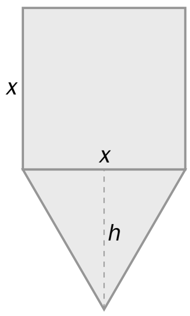
b) $\frac{7x}{56} - 1 = 0 \Rightarrow x = 8$

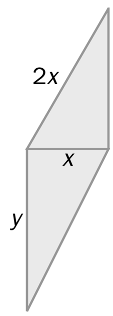
d) $\sqrt{x} - 7 = 0 \Rightarrow x = 49$

5.54. Escribe la expresión algebraica que genera estos valores: 3 6 9 12 15...

La expresión es $3n$, siendo n un número natural.

5.55. Escribe la expresión algebraica del área de cada figura.





a) $x^2 + \frac{x \cdot h}{2}$

b) Calculamos la altura del triángulo por el teorema de Pitágoras: $4x^2 = h^2 + x^2 \Rightarrow h = \sqrt{3}\,x$.

Así, el área del triángulo de arriba es $\frac{\sqrt{3}}{2}x^2$.

Del triángulo de abajo conocemos la base y la altura. Así, el área resulta: $\frac{x \cdot y}{2}$.

Si sumamos las dos áreas, obtenemos el área de la figura: $\frac{\sqrt{3}x^2 + xy}{2}$.

5.56. Expresa en forma algebraica cada frase.
a) Los cuadrados de tres números consecutivos.
b) Dos números que sumen 34.
c) El doble de un número menos cuatro quintos del mismo número.
d) El 30 % de un número impar.

a) $x^2, (x+1)^2, (x+2)^2$

b) x, $34 - x$

c) $2x - \frac{4}{5}x$

d) $0{,}3 \cdot (2k+1)$

5.57. El monedero de una persona contiene las siguientes monedas.
***x* monedas de 1 euro.**
***y* monedas de 50 céntimos.**
***z* monedas de 20 céntimos.**
***m* monedas de 10 céntimos.**
***t* monedas de 5 céntimos.**
Halla la expresión algebraica que expresa el dinero, en euros, que tiene en el monedero.

Tiene: $x + 0{,}50y + 0{,}20z + 0{,}10m + 0{,}05t$ euros.

5.58. Actividad interactiva

Monomios y polinomios

5.59. Indica si son monomios estas expresiones algebraicas.

a) $5xyz$ **b)** $\frac{8x}{y}$ **c)** $7z^3y^{-4}$ **d)** $12\sqrt{x}y^3$

a) Es monomio.
b) No es monomio porque el exponente de y no es natural.
c) No es monomio porque el exponente de y no es natural.
d) No es monomio porque el exponente de x no es natural.

5.60. Indica el coeficiente, parte literal y grado de cada monomio.

a) $8x^2$ **b)** $\frac{7}{5}z^4m^3$ **c)** $\frac{xy^5}{8}$ **d)** $\frac{3}{2}yz^4$

a) Coeficiente: 8. Parte literal: x^2. Grado: 2

b) Coeficiente: $\frac{7}{5}$. Parte literal: z^4m^3. Grado: 7

c) Coeficiente: $\frac{1}{8}$. Parte literal: xy^5. Grado: 6

d) Coeficiente: $\frac{3}{2}$. Parte literal: yz^4. Grado: 5

5.61. ¿Cuál de los siguientes monomios es el de mayor grado?

$3x^2yz^3$ $7y^4z^3$ $8z^5$ $4y^6$

El segundo polinomio, $7y^4z^3$, que tiene grado 7.

5.62. Indica cuáles de estos monomios son semejantes a $3x^2zy^3$.

a) $8x^2yz^3$ **b)** $\frac{x^2zy^3}{17}$ **c)** x^2zy^3 **d)** $15xzy^3$

El b y el c, porque tienen la misma parte literal.

5.63. Comprueba que estos pares de polinomios no son equivalentes, hallando sus valores numéricos para $x = 1$.

a) $(x + 2)^3$ **y** $x^3 + 8$

b) $-\frac{8x^2 - 4}{2}$ **y** $4x^2 - 2$

c) $(3x^2)^3$ **y** $27x^5$

a) $(1 + 2)^3 = 3^3 = 27$, y $1^3 + 8 = 1 + 8 = 9$. No son equivalentes.

b) $-\frac{8 \cdot 1^2 - 4}{2} = -\frac{4}{2} = -2$, y $4 \cdot 1^2 - 2 = 2$. No son equivalentes.

c) A pesar de que para $x = 1$, el par de polinomios tome el mismo valor, no son equivalentes porque para otro valor de x tomarán valores distintos.

Para $x = 1$: $\left(3 \cdot 1^2\right)^3 = 27$, y $27 \cdot 1^5 = 27$, pero para $x = 2$: $\left(3 \cdot 2^2\right)^3 = 1728$, y $27 \cdot 2^5 = 864$

5.64. Escribe el polinomio que cumple las siguientes características.

Binomio en la variable *z*.

De grado 5.

Con coeficiente del término principal 8.

Término independiente –7.

El polinomio que cumple las características es $8z^5 - 7$.

5.65. Calcula el término independiente, *a*, del polinomio $xz^2 - 4x^2 + 3z + a$, sabiendo que el valor numérico para $x = -1$ y $z = 2$ es 10.

Sustituimos las variables por los valores numéricos en el polinomio:

$(-1) \cdot 2^2 - 4 \cdot (-1)^2 + 3 \cdot 2 + a$

El resultado de dicha sustitución es igual a 10, de modo que $-4 - 4 + 6 + a = 10 \Rightarrow a = 12$.

5.66. ¿Puede existir un trinomio, con una sola variable, de grado 1? Justifica la respuesta.

No. Todos los polinomios de grado 1 son de la forma $ax + b$, luego, como mucho, son binomios.

5.67. ¿Puede tener un polinomio un mismo valor numérico para dos valores distintos de la variable? Justifica la respuesta.

Sí, por ejemplo, lo vemos en el caso del polinomio x^2, cuyo valor, tanto para $x = 1$ como para $x = -1$, es 1.

5.68. ¿Puede tener un polinomio varios valores numéricos para un determinado valor de la variable? Justifica la respuesta.

No, las operaciones que incluye un polinomio dan como resultado sólo un valor.

5.69. Sin realizar operaciones, ¿para qué valor de x el polinomio $5x^3 - 4x^2 + 8x - 7$ toma el valor –7?

Para $x = 0$

5.70. Indica qué valores de la incógnita hacen que el polinomio $P(x) = (x - 1) \cdot (x + 7) \cdot (2x - 3)$ tenga como valor numérico 0.

Para $x = 1$, o $x = -7$, o $x = \frac{3}{2}$

5.71. Halla el polinomio de grado 2 cuyo término principal es 16, cuyo término independiente es 1 y que es un cuadrado perfecto. ¿Cuántas soluciones existen?

$$ax^2 + bx + c \text{ donde } \left.\begin{array}{l} a = 16 \\ c = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow 16x^2 + bx + 1 \Rightarrow \begin{cases} b = 8 \Rightarrow 16x^2 + 8x + 1 = (4x + 1)^2 \\ b = -8 \Rightarrow 16x^2 - 8x + 1 = (4x - 1)^2 \end{cases}$$

Hay dos soluciones

5.72. Encuentra un polinomio $N(x)$, de grado 2, de forma que $N(0) = 3$, $N(-1) = 12$ y $N(2) = 15$.

$$N(x) = ax^2 + bx + c \Rightarrow \left.\begin{array}{r} N(0) = c = 3 \\ N(-1) = a - b + c = 12 \\ N(2) = 4a + 2b + c = 15 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} a - b = 9 \\ 4a + 2b = 12 \end{array}\right\} \Rightarrow 4(9 + b) + 2b = 12 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 36 + 4b + 2b = 12 \Rightarrow 6b = -24 \Rightarrow b = -4 \Rightarrow a = 5$$

Operaciones con monomios y polinomios

5.73. Realiza estas sumas de monomios.

a) $-4zy^3 + 7zy^3 - 15zy^3 + 22zy^3$

b) $\frac{-xyz}{2} + \frac{2}{3}xyz$

c) $-3xy + 2xz + 5yz$

d) $-4x^3 + 5x^2 - 9x^2 + 12x^3 - \frac{3}{2}x + x - 1$

a) $10zy^3$

b) $\frac{1}{6}xyz$

c) $-3xy + 2xz + 5yz$

d) $8x^3 - 4x^2 - \frac{1}{2}x - 1$

5.74. Copia y completa esta suma de polinomios.

$$\begin{array}{rrrr} -4x^3 & + \mathbf{(-4x^2)} + & 6x & - \mathbf{(-6)} \\ \mathbf{11x^3} & + 3x^2 - & 10x & + 9 \\ \hline 7x^3 & - x^2 + & \mathbf{(-4x)} & + 15 \end{array}$$

5.75. (TIC) Con los siguientes polinomios:

$P(x) = -5x^4 + 7x^2 - 5x + 1$ $M(x) = -6x^3 + 9x^2 - x + 1$ $T(x) = x^4 + 2x^3 + 8x - 2$

Realiza las operaciones indicadas.

a) $P(x) - T(x) + 2M(x)$ b) $(M(x) - P(x)) \cdot (T(x) - M(x))$ c) $3P(x) - 4T(x) - M(x)$

a) $-5x^4 + 7x^2 - 5x + 1 - \left(x^4 + 2x^3 + 8x - 2\right) + 2\left(-6x^3 + 9x^2 - x + 1\right) =$

$= -5x^4 + 7x^2 - 5x + 1 - x^4 - 2x^3 - 8x + 2 - 12x^3 + 18x^2 - 2x + 2 = -6x^4 - 14x^3 + 25x^2 - 15x + 5$

b) $\left[\left(-6x^3 + 9x^2 - x + 1\right) - \left(-5x^4 + 7x^2 - 5x + 1\right)\right] \cdot \left[x^4 + 2x^3 + 8x - 2 - \left(-6x^3 + 9x^2 - x + 1\right)\right] =$

$= \left[5x^4 - 6x^3 + 2x^2 + 4x\right] \cdot \left[x^4 + 8x^3 - 9x^2 + 9x - 3\right] =$

$= 5x^8 + 34x^7 - 91x^6 + 119x^5 - 55x^4 + 30x^2 - 12x$

c) $3\left(-5x^4 + 7x^2 - 5x + 1\right) - 4\left(x^4 + 2x^3 + 8x - 2\right) - \left(-6x^3 + 9x^2 - x + 1\right) =$

$= -15x^4 + 21x^2 - 15x + 3 - 4x^4 - 8x^3 - 32x + 8 + 6x^3 - 9x^2 + x - 1 =$

$= -19x^4 - 2x^3 + 12x^2 - 46x + 10$

5.76. Indica si son correctas estas operaciones.

a) $3x^4 - 2x = x^3$

b) $(4x^2 + 3x)^2 = 16x^4 + 9x^2$

c) $(4x^3)^3 = 64x^9$

d) $\left(\frac{7}{2}x^2y\right) \cdot \left(6xy^3\right) = 21x^3y^4$

e) $(5x - 2y) \cdot (5x - 2y) = 25x^2 - 4y^2$

a) Incorrecta b) Incorrecta c) Correcta d) Correcta e) Incorrecta

5.77. Efectúa estos productos.

a) $-3x^2 \cdot (4x^3 - 5x + 2)$ b) $5x^2yz^4 \cdot (4x^3 - 5x + 2)$ c) $(6y^2 - 5y + 1) \cdot (4y^2 - 3)$

a) $-12x^5 + 15x^3 - 6x^2$

b) $20x^5yz^4 - 25x^3yz^4 + 10x^2yz^4$

c) $24y^4 - 18y^2 - 20y^3 + 15y + 4y^2 - 3 = 24y^4 - 20y^3 - 14y^2 + 15y - 3$

5.78. (TIC) Realiza las operaciones indicadas con los siguientes polinomios.

$P(x) = 5x^2 - 4x + 1$ $Q(x) = -6x + 2$ $L(x) = x^2 - 5$ $M(x) = x^3 - 5x + 4$

a) $P(x) + Q(x)$

b) $Q(x) - M(x)$

c) $L(x) \cdot M(x)$

d) $(M(x))^2$

a) $5x^2 - 10x + 3$

b) $-x^3 - x - 2$

c) $x^5 - 10x^3 + 4x^2 + 25x - 20$

d) $x^6 - 10x^4 + 8x^3 + 25x^2 - 40x + 16$

5.79. Utilizando las identidades notables, desarrolla estas potencias de binomios.

a) $(x^2 - 3)^2$

b) $(2a + 3b)^2$

c) $(x^2 + 2)^2$

d) $(3 - 2t^3)^2$

a) $x^4 - 6x^2 + 9$

b) $4a^2 + 12ab + 9b^2$

c) $x^4 + 4x^2 + 4$

d) $9 - 12t^3 + 4t^6$

5.80. Completa estas igualdades.

a) $(\quad - 2z)^2 = 25x^2 - \quad + 4z^2$ **b)** $(3z^2 + \quad)^2 = \quad + \quad + 1$

a) $(\mathbf{5x} - 2z)^2 = 25x^2 - \mathbf{20xz} + 4z^2$ b) $(3z^2 + \mathbf{1})^2 = \mathbf{9z^4} + \mathbf{6z^2} + 1$

5.81. Copia y completa esta multiplicación de polinomios.

$$\begin{array}{rrrr} & -4x^2 & +\ 3x & -\ 1 \\ & & -5x & +\ 2 \\ \hline & -8x^2 & +\ 6x & -\ 2 \\ 20x^3 & -\ 15x^2 & +\ 5x & \\ \hline 20x^3 & -\ 23x^2 & +\ 11x & -\ 2 \end{array}$$

5.82. Extrae factor común en estas expresiones.

a) $-8x^2y^3 + 4x^3y - 2x^4y^2$

b) $9t^3x^4 - 5t^2x^6 + 2t^7x^5$

c) $8z^2t - \frac{2}{3}x^3t^2 - \frac{4}{7}z^4t^3$

d) $-\frac{2}{21}a^3b^2 - \frac{4}{15}a^4b^7 - \frac{14}{3}a^9b^4$

a) $2yx^2\left(-4y^2 + 2x - x^2y\right)$

b) $t^2x^4\left(9t - 5x^2 + 2t^5x\right)$

c) $2t\left(4z^2 - \frac{1}{3}x^3t - \frac{2}{7}z^4t^2\right)$

d) $-\frac{2}{3}a^3b^2\left(\frac{1}{7} + \frac{2}{5}ab^5 + 7a^6b^2\right)$

5.83. Expresa estos polinomios en forma de productos.

a) $x^2 - 4xy + 4y^2$

b) $49 - 7z + \frac{z^2}{4}$

c) $36z^2t^2 + 24z^2t + 4z^4$

d) $3z^2 + 12zx + 12x^2$

a) $(x - 2y)^2$

b) $\left(7 - \frac{z}{2}\right)^2$

c) $(6zt + 2z)^2$

d) $\left(\sqrt{3}z + \sqrt{12}x\right)^2$

5.84. Desarrolla las siguientes potencias de polinomios.

a) $(3x - 4)^3$ **b)** $(x + 1)^4$ **c)** $(2x + 3y)^4$ **d)** $(x + y + z)^2$

a) $(3x-4)^3 = (3x)^3 + (-4)^3 + 3(3x)^2(-4) + 3(-4)^2(3x) = 27x^3 - 108x^2 + 144x - 64$

b) $(x+1)^4 = (x+1)^2 \cdot (x+1)^2 = \left(x^2 + 1 + 2x\right)\cdot\left(x^2 + 1 + 2x\right) = x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x + 1$

c) $(2x+3y)^4 = (2x+3y)^2 \cdot (2x+3y)^2 = \left(4x^2 + 9y^2 + 12xy\right)\cdot\left(4x^2 + 9y^2 + 12xy\right) =$

$= 16x^4 + 81y^4 + 216x^2y^2 + 96x^3y + 216y^3x$

d) $(x+y+z)^2 = (x+y+z)\cdot(x+y+z) = x^2 + xy + xz + yx + y^2 + yz + zx + zy + z^2 =$

$= x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2xz + 2yz$

5.85. Actividad interactiva

5.86. Realiza estas operaciones con polinomios y simplifica.

a) $\frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{2}-x\right)\cdot\left(\frac{2}{3}x+1\right)-x$ **b)** $\left(\frac{x}{3}+\frac{3x^2}{2}\right)^2-\left(x^2-x^4\right)\cdot x$ **c)** $\left(x^2+\frac{1}{2}x+\frac{2}{5}\right)^2$

a) $\frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{2}-x\right)\cdot\left(\frac{2}{3}x+1\right)-x=\frac{1}{2}\left(\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{6}-x\right)-x=\frac{x^3}{6}-\frac{x^2}{12}-\frac{3x}{2}=\frac{x}{2}\left(\frac{x^2}{3}-\frac{x}{6}-3\right)$

b) $\left(\frac{x}{3}+\frac{3x^2}{2}\right)^2-\left(x^2-x^4\right)\cdot x=\frac{x^2}{9}+2\left(\frac{x}{3}\right)\left(\frac{3x^2}{2}\right)+\frac{9x^4}{4}-\left(x^3-x^5\right)=$

$=\frac{x^2}{9}+x^3+\frac{9x^4}{4}-x^3+x^5=x^5+\frac{9x^4}{4}+\frac{x^2}{9}=x^2\left(x^3+\frac{9x^2}{4}+\frac{1}{9}\right)$

c) $\left(x^2+\frac{1}{2}x+\frac{2}{5}\right)^2=\left(x\left(x+\frac{1}{2}\right)+\frac{2}{5}\right)^2=x^2\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+2x\left(x+\frac{1}{2}\right)\cdot\frac{2}{5}+\frac{4}{25}=$

$=x^2\left(x^2+x+\frac{1}{4}\right)+\frac{4x^2}{5}+\frac{2}{5}x+\frac{4}{25}=x^4+x^3+\frac{21x^2}{20}+\frac{2x}{5}+\frac{4}{25}$

5.87. (TIC) Realiza las siguientes operaciones.

a) $-5x\left(x^2+x+1\right)+4\left(-x^3+7x^2-2\right)$

b) $(3x-2)^2\cdot(-2x+1)-3\left(6x^3-4x^2+3x-2\right)$

c) $\left(\frac{1}{2}x-2\right)^2\cdot\left(\frac{4}{3}x-\frac{1}{5}\right)$

d) $(-x+2)\cdot(5x+3)\cdot(2x-4)-3x\,(x+1)$

e) $4\left(-5x^2+6x-1\right)-\left(2x^3-6\right)+7x^2-8x$

a) $-9x^3+23x^2-5x-8$

b) $-36x^3+45x^2-29x+10$

c) $\frac{x^3}{3}-\frac{163}{60}x^2+\frac{86}{15}x-\frac{4}{5}$

d) $-10x^3+31x^2-19x-24$

e) $-2x^3-13x^2+16x+2$

5.88. (TIC) Opera y simplifica.

a) $(-7x+2)\cdot(4x-5)-2x\left(-3x^2+9\right)$

b) $-x^2\cdot\left(x^3-x^2-1\right)-x\left(x^2-1\right)$

c) $(x+1)^3-x^3-1-3\left(x^2+1\right)$

d) $-2x\left(-x^2\right)-5x^2\left(2x^3\right)+\left(x^4-2x^2\right)\cdot(-7x+2)$

e) $3(x-1)-4\left(7x^2-9x\right)+7(-4x+2)$

a) $6x^3-28x^2+25x-10$

b) $-x^5+x^4-x^3+x^2+x$

c) $3x-3$

d) $-17x^5+2x^4+16x^3-4x^2$

e) $-28x^2+11x+11$

5.89. Los siguientes polinomios tienen sus términos ordenados en forma decreciente.

$(-3x^3 + \quad) + (7x^3 + \quad) = P(x)$

$(-6x^4 + \quad) - (2x^2 + \quad) = R(x)$

$(-x^5 + \quad) \cdot (4x^3 + \quad) = T(x)$

$(2x^3 + \quad)^3 = L(x)$

$[(2x + \quad) \cdot (-6x^4 + \quad)]^2 = M(x)$

¿Cuál es el grado de los polinomios $P(x)$, $R(x)$, $T(x)$, $L(x)$ y $M(x)$?

Grado $P(x) = 3$, grado $R(x) = 4$, grado $T(x) = 8$, grado $L(x) = 9$, grado $M(x) = 9$

5.90. Una igualdad notable muy útil en el cálculo de polinomios es la siguiente:

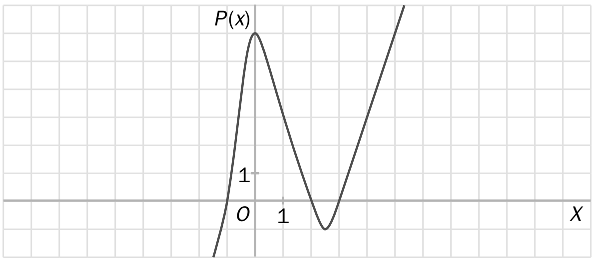
$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

Teniendo esto en cuenta este resultado, desarrolla:

a) $(2x^2 + 1)^3$ **b) $(3x + y)^3$**

a) $(2x^2 + 1)^3 = 8x^6 + 12x^4 + 6x^2 + 1$ b) $(3x + y)^3 = 27x^3 + 27x^2y + 9xy^2 + y^3$

5.91. En la gráfica puedes ver el valor de un polinomio, $P(x)$, según el valor de x.



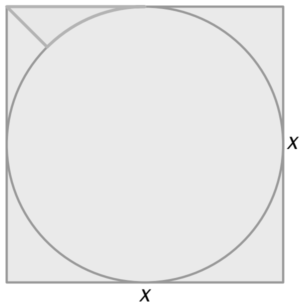
a) ¿Para qué valores de x el valor numérico del polinomio es 0?

b) ¿Qué valores toma el polinomio cuando la variable x es 1?

a) Para $x = -1$, para $x = 2$ y para $x = 3$

b) $P(1) = 3$

5.92. Expresa el área coloreada en azul en forma de un solo monomio.



El área del cuadrado es x^2. La del círculo es $\pi \cdot \dfrac{x^2}{4}$.

La suma de las áreas de los huecos entre el cuadrado y el círculo es $x^2 - \dfrac{\pi}{4}x^2 = \dfrac{4-\pi}{4}x^2$.

Si dividimos entre 4, tendremos la de un hueco, y entonces dividimos entre dos y tendremos el área de la mitad de uno de esos huecos:

$$\frac{\left(\dfrac{\left(\dfrac{4-\pi}{4}\right)}{4}\right)}{2}x^2 = \frac{4-\pi}{32}x^2$$

5.93. Halla el polinomio que aparece en las siguientes igualdades.

a) $\dfrac{Q(x)}{\frac{1}{2}x^2-4x+3}=-x+\dfrac{1}{3}$ b) $(L(x))^2 = 4x^2 - 12x + 9$

a) $Q(x)=\left(-x+\dfrac{1}{3}\right)\left(\dfrac{1}{2}x^2-4x+3\right)=\dfrac{-1}{2}x^3+\dfrac{25}{6}x^2-\dfrac{13}{3}x+1$

b) $\left(L(x)\right)^2=4x^2-12x+9=(2x-3)^2\Rightarrow L(x)=2x-3$

PROBLEMAS

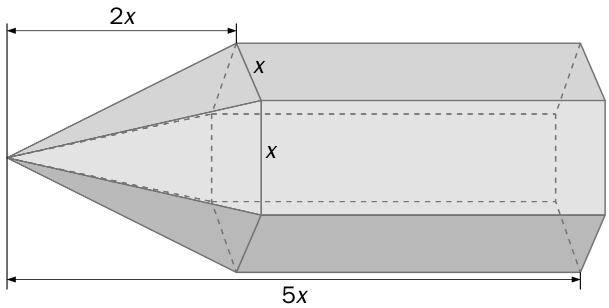
5.94. Escribe la fórmula que permite calcular el volumen del siguiente cuerpo geométrico.

Sumamos los volúmenes del prisma y de la pirámide y obtenemos el volumen del conjunto.

La base del prisma es un hexágono regular de lado x.

Calculamos la apotema de la base utilizando el teorema de Pitágoras:

Apotema = $\sqrt{x^2-(\frac{x}{2})^2}=\sqrt{\frac{3}{4}x^2}=\frac{\sqrt{3}}{2}x$



Calculamos el volumen del prisma: $V_{prisma} = A_{base} \cdot h = \dfrac{3\sqrt{3}}{2}x^2 \cdot 3x = \dfrac{9\sqrt{3}}{2}x^3$

Calculamos el volumen de la pirámide: $V_{pirámide} = \dfrac{A_{base}\cdot h}{3} = \dfrac{\frac{3\sqrt{3}}{2}x^2\cdot 2x}{3} = \sqrt{3}\,x^3$

Así, el volumen de la pirámide es: $V_T = \dfrac{9\sqrt{3}}{2}x^3 + \sqrt{3}\,x^3 = \dfrac{11\sqrt{3}}{2}x^3$

5.95. Las edades de un hombre y su hijo se diferencian en 30 años. Dentro de cinco años, la edad del padre será el triple que la de su hijo.
Copia y completa, utilizando una variable, la tabla con las edades del padre y del hijo.

	Padre	**Hijo**
Edad actual		
Edad dentro de cinco años		

x = edad del hijo

$30 + x$ = edad del padre $\Rightarrow 30+x+5=3(x+5)\Rightarrow x+35=3(x+5)\Rightarrow x+35=3x+15\Rightarrow 20=$
$=2x\Rightarrow x=10$

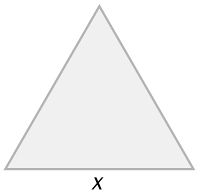
	Padre	Hijo
Edad actual	40	10
Edad dentro de cinco años	45	15

5.96. Expresa con un monomio el área de un triángulo equilátero de lado *x*.

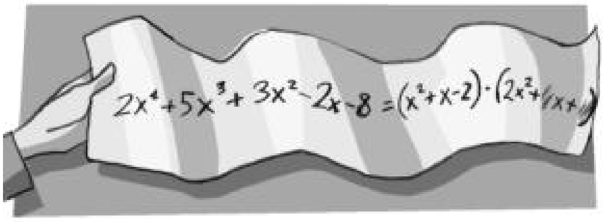
Aplicando el teorema de Pitágoras:

$$x^2 = h^2 + \frac{x^2}{4} \Rightarrow h = \sqrt{x^2 - \frac{x^2}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}x$$

$$Área = \frac{x \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}x}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4}x^2$$



5.97. Mario le pasa a Pablo una multiplicación de polinomios para que compruebe el resultado, pero no se pueden leer todos los coeficientes.



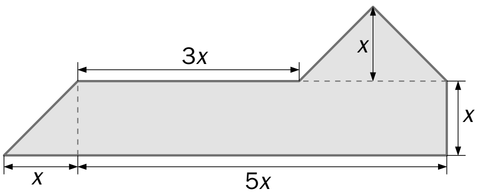
¿Cuáles son los coeficientes que faltan?

$$2x^4 + 5x^3 + 3x^2 - 2x - 8 = 2x^4 + ax^3 + bx^2 + 2x^3 + ax^2 + bx - 4x^2 - 2ax - 2b =$$

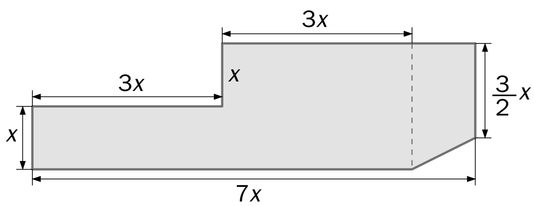
$$= 2x^4 + (a+2)x^3 + (b+a-4)x^2 + (b-2a)x - 2b \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a+2=5 \\ b+a-4=3 \\ b-2a=-2 \\ -2b=-8 \end{array}\right\} \Rightarrow a=3, b=4$$

5.98. Expresa con un polinomio el área de las figuras.

a)



b)



Dividimos las figuras en otras más simples y sumamos las áreas:

a) $\frac{x \cdot x}{2} + 5x \cdot x + \frac{2x \cdot x}{2} = \frac{13}{2}x^2$

b) $3x \cdot x + 3x \cdot 2x + x \cdot \frac{3}{2}x + \frac{x \cdot \frac{1}{2}x}{2} = 3x^2 + 6x^2 + \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{4}x^2 = \frac{43}{4}x^2$

5.99. Actividad interactiva

AMPLIACIÓN

5.100. ¿Cuál de los coeficientes del polinomio $P(x) = ax^5 + bx^3 + cx + d$ está determinado por la condición $P(1) + P(-1) = 6$?

a) *a* b) *b* c) *c* d) *d*

$P(1) + P(-1) = a + b + c + d - a - b - c + d = 2d = 6$; por tanto, $d = 3$

La respuesta correcta es la d.

5.101. Dados $P(x) = 2x - 3$, $Q(x) = x^2 + bx + c$ y $T(x) = 2x^3 + x^2 - 8x + 3$, para que el polinomio $Q(x) \cdot P(x) - T(x)$ tenga grado 0, los valores de *b* y *c* son:

a) $b = \frac{3}{2}$, $c = -\frac{5}{2}$ **c) $b = 2$, $c = -\frac{5}{2}$**

b) $b = 2$, $c = -1$ **d) $b = 2$, $c = 1$**

$Q(x) \cdot P(x) - T(x) = (2b - 4)x^2 + (2c - 3b + 8)x + 3c - 3$; como debe tener grado cero, los coeficientes de x^2 y x deben ser cero, con lo que $b = 2$ y $c = -1$.

La respuesta correcta es la b.

5.102. Si se escribe $P(x) = x^4 + 4$ como producto de dos polinomios de segundo grado: $A(x) = x^2 + ax + b$, $B(x) = x^2 + cx + d$, sus coeficientes verifican:

a) $a + c = 0$, $b = d$ **c) $a + c = 1$, $b = d$**

b) $a = c$, $b = d$ **d) $a = b$, $c = d$**

$x^4 + 4 = x^4 + 4 + 4x^2 - 4x^2 = (x^2 + 2)^2 - (2x)^2 = (x^2 + 2x + 2)(x^2 - 2x + 2)$, con lo que $a = b = d = 2$, $c = -2$, es decir, $a + c = 0$, y $b = d$.

La respuesta correcta es la a.

5.103. Si calculas $(x^2 + x + 1) \cdot (x - 1)$, obtendrás el número 999999999 como producto de dos números mayores que 900. La suma de estos dos números es:

a) 1000001 b) 1001001 c) 1002000 d) 1001000

$999999999 = 999 \cdot 10^6 + 999 \cdot 10^3 + 999 = 999 \cdot 100010001$, que se puede escribir como el producto $(1000 - 1)(1000^2 + 1000 + 1)$, que adopta la forma dada con $x = 1000$. La suma de estos dos factores es: $1000 - 1 + 1000^2 + 1000 + 1 = 1000^2 + 2000 = 1002000$.

La respuesta correcta es la c.

5.104. Las dimensiones de un rectángulo son *x* e *y*, y su perímetro es *p*. Su área es:

a) $\frac{1}{16}p^2 - \frac{1}{4}(x - y)^2$ **c) $\frac{1}{16}p^2 + \frac{1}{4}(x - y)^2$**

b) p^2 **d) $p^2 - (x + y)p$**

Área = xy con $x + y = \frac{p}{2}$

$$xy = \frac{(x+y)^2 - (x-y)^2}{4} = \frac{p^2}{16} - \frac{1}{4}(x-y)^2$$

La respuesta correcta es la a.

AUTOEVALUACIÓN

5.1. Indica cuál de estas expresiones algebraicas es un monomio.

$\frac{5}{z^2}$ $\sqrt{7xy}$ $5t^{\frac{1}{2}}$ $15z^3m^4$ $-3x^2+1$

El único monomio es $15z^3m^4$.

5.2. Con los siguientes polinomios.

$A(x) = 3x - 2$ $B(x) = -5x^2 - 6x + 1$ $C(x) = 4x + 3$

Realiza las operaciones indicadas.

a) $A(x) - B(x)$ b) $(A(x))^2$ c) $A(x) \cdot C(x)$

a) $(3x - 2) - (-5x^2 - 6x + 1) = 5x^2 + 9x - 3$

b) $(3x - 2)^2 = 9x^2 - 12x + 4$

c) $(3x - 2) \cdot (4x + 3) = 12x^2 + x - 6$

5.3. ¿Cuál es el grado de este polinomio?

$15xy^4 - 3x^2y^6 + 7x^7 - 2x^5y + y^6$

El polinomio tiene grado 8.

5.4. Halla los valores de *a*, *b* y *c*, para que los polinomios *A*(*x*) y *B*(*x*) sean iguales.

$A(x) = (7a - 4)x^3 - 6x + (1 - 5b)$

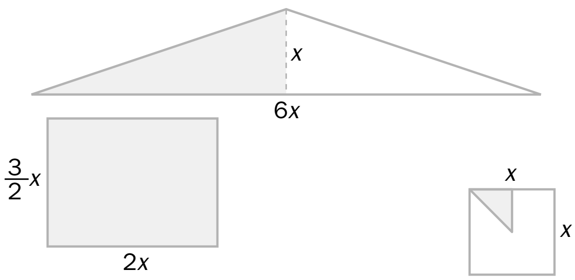
$B(x) = 3x^3 + 8cx^2 + (b - 4)x + 11$

Para que sean iguales, los coeficientes de cada uno de sus términos han de ser iguales. Así:

$$\left.\begin{array}{r} 7a-4=3 \\ 0=8c \\ -6=b-4 \\ 1-5b=11 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{r} 7a=7 \\ c=0 \\ -2=b \\ -5b=10 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} a=1 \\ b=-2 \\ c=0 \end{array}\right.$$

Luego $a = 1$, $b = -2$ y $c = 0$

5.5. Relaciona cada área sombreada con el monomio que le corresponde.



a) $\frac{x^2}{8}$ b) $\frac{3}{2}x^2$ c) $3x^2$

Triángulo (b). Rectángulo (c). Cuadrado (a).

5.6. Aplica las identidades notables para desarrollar las siguientes operaciones.

a) $(2a + b)^2$ **c) $(3x + 1) \cdot (3x - 1)$**
b) $(2x^2 - y)^2$ **d) $(3t^3 - 2)^2$**

a) $4a^2 + b^2 + 4ab$ c) $9x^2 - 1$
b) $4x^4 + y^2 - 4x^2y$ d) $9t^6 + 4 - 12t^3$

5.7. Calcula el valor numérico del polinomio $P(x) = 2 - x^2 + 3x - 2x^3$ para el valor $x = -2$.

$P(-2) = 2 - (-2)^2 + 3 \cdot (-2) - 2 \cdot (-2)^3 = 8$

PON A PRUEBA TUS COMPETENCIAS

Aprende a pensar > Do you speak Algebra?

Tu turno: utilizando la tabla de vocabulario básico de la derecha y lo que puedes deducir del ejemplo anterior, realiza las siguientes traducciones.

1. Algo sencillo: ¿cómo escribirías en inglés la suma 2 + 3 = 5?

Two plus three equals five.

2. Escribe en lenguaje algebraico la siguiente expresión en italiano:

“*Cinque più due volte la cosa volte la cosa meno tre volte la cosa è uguale a zero*”.

$5 + 2x^2 - 3x = 0$

3. Ahora a la inversa: escribe $3x^2 + x + 1$ en francés y en inglés.

Trois fois la chose fois la chose plus la chose plus un

Three times the thing times the thing plus the thing plus one

4. ¿Te atreves ahora con el ruso? ¿Cuánto vale три на вещь плюс один, si sabemos que вещь vale 2?

$3x + 1$, y como x vale 2, será 7.

5. Por último, dale rienda suelta a tu imaginación y construye tu propio idioma.

Inventa palabras para decir “más”, “menos”, “por” y “cosa”, y una palabra para cada número, y escríbelas en un pequeño diccionario.

Piensa después en tres polinomios, tradúcelos a tu idioma, y pásale el diccionario y las frases codificadas a un compañero. ¿Es capaz de reconstruir tus polinomios? ¿Puedes tú averiguar los suyos?

Actividad abierta

Comprende y dibuja > El arte de los polinomios

1. Si cada cuadradito tiene por lado $x + 1$ centímetros, ¿qué polinomio describe el volumen de la L que aparece en el cuadro? ¿Cuál es su valor si $x = 3$?

$$\left(4\,(x+1)\right)^3 + \left(4\,(x+1)\right)^2 \cdot 12(x+1)$$

También puede obtenerse como $4 \cdot \left(4\,(x+1)\right)^3$

El volumen de la L lo podemos expresar, pues, con el polinomio $p(x) = 256\,(x + 1)^3$, que, para $x = 3$, toma el valor $256 \cdot 4^3 = 4^7 = 16\,384$.

2. En el supuesto anterior, ¿cuál es el volumen de la figura que falta para que el cuadro represente un prisma? (¡Atención: hay más de una forma de resolverlo!).

Forma 1: $(4(x+1))^2 \cdot 8(x+1)$

Forma 2: $4(x + 1) \cdot 8(x + 1) \cdot 12(x + 1) - 256(x + 1)^3$

Estos dos polinomios, obviamente, tienen que ser el mismo. Comprobémoslo:

Forma 1: $(x + 1)^3 \cdot 4^2 \cdot 8 = 2^7(x + 1)^3$

Forma 2: $(x + 1)^3(4 \cdot 8 \cdot 12 - 256) = (x + 1)^3(3 \cdot 2^7 - 2^8) = 2^7(x + 1)^3$

3. Ahora vamos a celebrar un concurso de arte matemático.

Toma una hoja cuadriculada, dibuja una figura geométrica con cubos al estilo de Vasarely, y llama 2*x* a la arista de cada cubo. Después formula el polinomio que describe su volumen, y exponlo en clase.

Hay dos premios, que se otorgarán por votación democrática: al dibujo más artístico y al matemáticamente más ingenioso. Pero cuidado: ¡si el polinomio está mal calculado, el dibujo quedará descalificado!

Actividad abierta

4. Observa un vídeo con más cuadros de Victor Vasarely en www.e-sm.net/eso3z0402, busca más información sobre el Op-Art en internet y elabora un breve resumen de lo que más te haya gustado.

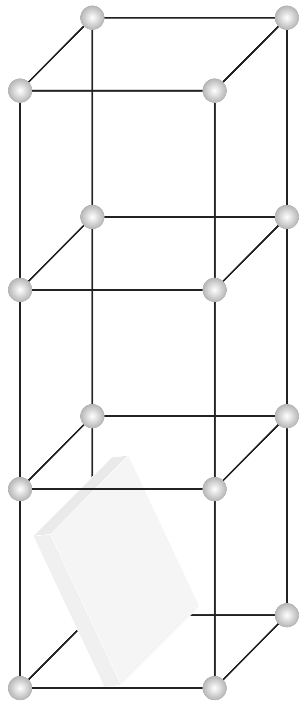
Actividad abierta

Calcula y crea > Tu estantería matemática

1. Para formar un solo cubo, ¿cuántas láminas y anclajes son necesarios?

Láminas: 5

Anclajes: 8



2. Para formar una torre de 6 cubos de altura, ¿cuántas láminas y cuántos anclajes se necesitan? ¿Y para una de 10?

6 cubos: Láminas: $6 \cdot 5 - 5 = 25$ Anclajes: $6 \cdot 8 - 5 \cdot 4 = 28$

10 cubos: Láminas: $10 \cdot 5 - 9 = 41$ Anclajes: $10 \cdot 8 - 9 \cdot 4 = 44$

3. Busca una fórmula que dé las láminas necesarias para formar una torre de *x* cubos de altura. Y otra que dé los anclajes necesarios para esa torre de *x* cubos de altura.

x cubos: Láminas: $5 \cdot x - (x - 1)$

Anclajes: $8 \cdot x - 4(x - 1) = 4x + 4$

4. Iván tiene una gran colección de discos y quiere construir una estantería de 3 por 4 cubos. ¿Cuántas láminas y anclajes necesitará?

3×4 cubos: Láminas: $3 \cdot 5 \cdot 4 - 3 \cdot 3 - 2 \cdot 4 = 43$ Anclajes: $(4 + 1) \cdot (3 + 1) \cdot 2 = 40$

5. Busca las fórmulas que determinan las láminas y anclajes necesarios para formar una torre de *x* por *y* cubos.

$x \times y$ cubos: Láminas: $5 \cdot x \cdot y - x \cdot (y - 1) - y \cdot (x - 1) = 3xy + x + y$

Anclajes: $(x + 1)(y + 1) \cdot 2$

6. Dibuja la estantería que te gustaría tener en tu habitación, pásasela a tu compañero y pídele que averigüe el número de láminas y anclajes necesarios para construirla. La estantería puede no formar una torre.

Actividad abierta

Proyecto editorial: **Equipo de Educación Secundaria del Grupo SM**

Autoría: **Rafaela Arévalo, José Luis González, Juan Alberto Torresano**

Edición: **Elena Calvo, Miguel Ángel Ingelmo, Yolanda Zárate**

Corrección: **Ricardo Ramírez**

Ilustración: **Félix Anaya, Modesto Arregui, Juan Francisco Cobos, Domingo Duque, Félix Moreno,**

Diseño: **Pablo Canelas, Alfonso Ruano**

Maquetación: **SAFEKAT S. L.**

Coordinación de diseño: **José Luis Rodríguez**

Coordinación editorial: **Josefina Arévalo**

Dirección del proyecto: **Aída Moya**

Impreso en España – *Printed in Spain*