7 Expresiones fraccionarias y radicales

ACTIVIDADES INICIALES

7.I. Has visto que la meteorología es un sistema caótico. También lo es el recorrido de un objeto que baja por un río. Piensa en otros dos sistemas caóticos y ponlos en común con tus compañeros.

Actividad abierta

7.II. Construid en clase varios dobles péndulos con ayuda de vuestro profesor, utilizando cuerda, unos bolígrafos y un poco de plastilina. Colocadlos todos en la misma posición inicial y dejadlos oscilar a la vez. Fijaos bien en su comportamiento. ¿Qué observáis? Discutidlo en clase.

Actividad abierta

7.III. El descubrimiento de la teoría del caos se atribuye a Edward Lorenz, un famoso meteorólogo. En www.e-sm.net/3esoz34 tienes una lectura sobre sus descubrimientos. Léela y elabora un resumen escrito de los hallazgos de Lorenz.

Actividad abierta

ACTIVIDADES PROPUESTAS

7.1. Actividad resuelta

7.2. (TIC) Halla el valor numérico de la fracción $\frac{x^2-7x+10}{x^2-6x+8}$ para los valores 2, 0 y 4.

Para 2: $\frac{2^2-7\cdot 2+10}{2^2-6\cdot 2+8}=\frac{0}{0}$. Indeterminado.

Para 0: $\frac{0^2-7\cdot 0+10}{0^2-6\cdot 0+8}=\frac{10}{8}=\frac{5}{4}$.

Para 4: $\frac{4^2-7\cdot 4+10}{4^2-6\cdot 4+8}=\frac{-2}{0}$. No existe valor numérico.

7.3. Indica para qué valores de *x* existe el valor numérico de estas fracciones.

a) $R(x)=\frac{x^2-5x+6}{x-4}$ b) $S(x)=\frac{x^2-9}{x-3}$

a) El denominador se anula para $x = 4$. Para este valor, el numerador vale $4^2 - 5 \cdot 4 + 6 = 2$. No tiene valor numérico para $x = 4$.

b) El denominador se anula para $x = 3$. Para este valor, el numerador vale $3^2 - 9 = 0$. Así que el valor de la fracción algebraica para $x = 3$ es indeterminado.

7.4. **¿Es $x^2 + 2x + \frac{1}{4}$ una fracción algebraica?**

Sí, porque $x^2 + 2x + \frac{1}{4} = \frac{4x^2 + 8x + 1}{4}$, donde el numerador es un polinomio y el denominador es un polinomio de grado 0 no nulo.

7.5. **En la unidad anterior viste que $\frac{x^2}{x} = x$. Sin embargo, el valor numérico de la primera expresión no existe en $x = 0$, y el de la segunda sí.**
¿Sabrías explicar por qué?

La primera expresión no existe en $x = 0$, porque no se puede dividir entre 0, y el valor de la segunda expresión en $x = 0$ es 0.

7.6. **Escribe una fracción algebraica que esté determinada en todos los puntos salvo en $x = 1$ y en $x = -3$.**

Para que no esté determinada en $x = 1$ ni en $x = -3$, el denominador tiene que tener los factores $(x-1)(x+3) = x^2 + 2x - 3$, y el numerador puede ser cualquier polinomio, por ejemplo, $2x + 4$.

$$R(x) = \frac{2x + 4}{x^2 + 2x - 3}$$

7.7. **Actividad interactiva**

7.8. **Actividad resuelta**

7.9. **Comprueba si son equivalentes las siguientes fracciones $\frac{x+1}{x}$ y $\frac{x^2 - 1}{x^2 - x}$.**

Dos fracciones son equivalentes si el producto de medios es igual al producto de extremos.
De modo que se tiene que cumplir que $(x + 1)(x^2 - x) = x(x^2 - 1)$.
$(x + 1)(x^2 - x) = x^3 - x^2 + x^2 - 1 = x^3 - 1$
$x(x^2 - 1) = x^3 - 1$
Las fracciones dadas son equivalentes.

7.10. **Escribe tres fracciones equivalentes a**

a) $\frac{x - 2}{x}$ **b)** $\frac{x + 1}{x^2 - 1}$

a) $\frac{x-2}{x}$ es equivalente a $\frac{x^2 - 2x}{x^2}, \frac{x^2(x-2)}{x^3}, \frac{x^3(x-2)}{x^4}$.

b) $\frac{x+1}{x^2-1} = \frac{x+1}{(x+1)(x-1)}$ es equivalente a $\frac{1}{x-1}, \frac{x}{x^2 - x}, \frac{x+3}{(x-1)(x+3)}$.

7.11. (TIC) Simplifica las siguientes fracciones.

a) $\dfrac{x^2+1}{x^4-1}$ b) $\dfrac{x^2-6x+5}{x^2-8x+15}$

a) $\dfrac{x^2+1}{x^4-1}=\dfrac{x^2+1}{(x^2+1)(x^2-1)}=\dfrac{1}{x^2-1}$

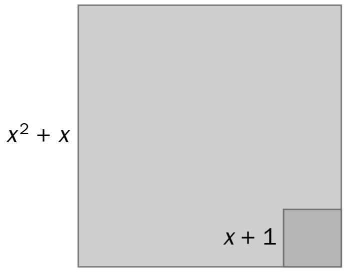
b) Factorizando cada una de sus partes tenemos que $\dfrac{x^2-6x+5}{x^2-8x+15}=\dfrac{(x-1)(x-5)}{(x-3)(x-5)}=\dfrac{x-1}{x-3}$.

7.12. Simplifica la fracción $\dfrac{x^3-1}{x^2-1}$ y calcula su valor numérico para $x = 2$.

Factorizamos numerador y denominador: $\dfrac{x^3-1}{x^2-1}=\dfrac{(x-1)(x^2+x+1)}{(x-1)(x+1)}=\dfrac{x^2+x+1}{x+1}$.

Si $x = 1$, $\dfrac{2^2+2+1}{2+1}=\dfrac{7}{3}$

7.13. Observa la figura.



a) ¿Cuántos cuadrados pequeños caben dentro del cuadrado grande?

b) ¿Cabrá siempre un número entero de cuadrados, sea cual sea x?

a) $\dfrac{x^2+x}{x+1}=\dfrac{x(x+1)}{x+1}=x$, cabrán x^2 cuadrados pequeños dentro del cuadrado grande.

b) Siempre que x sea un entero positivo.

7.14. Actividad interactiva

7.15. Actividad resuelta

7.16. (TIC) Opera estas fracciones.

a) $\dfrac{7x}{x^3+5}+\dfrac{6x+1}{x^3+5}$ b) $\dfrac{3xy}{x-y}-\dfrac{1-2xy}{x-y}$

a) $\dfrac{7x}{x^3+5}+\dfrac{6x+1}{x^3+5}=\dfrac{7x+6x+1}{x^3+5}=\dfrac{13x+1}{x^3+5}$

b) $\dfrac{3xy}{x-y}-\dfrac{1-2xy}{x-y}=\dfrac{3xy-(1-2xy)}{x-y}=\dfrac{5xy-1}{x-y}$

7.17. Efectúa las siguientes operaciones.

a) $\dfrac{7x+3}{x-4}+\dfrac{5x}{x^2-16}$ b) $\dfrac{2x}{x-5}-\dfrac{x+2}{x-1}$

a) $\dfrac{7x+3}{x-4}+\dfrac{5x}{x^2-16}=\dfrac{(7x+3)(x+4)}{(x-4)(x+4)}+\dfrac{5x}{x^2-16}=\dfrac{7x^2+36x+12}{x^2-16}$

b) $\dfrac{2x}{x-5}-\dfrac{x+2}{x-1}=\dfrac{2x(x-1)-(x+2)(x-5)}{(x-5)(x-1)}=\dfrac{2x^2-2x-x^2+3x+10}{x^2-6x+5}=\dfrac{x^2+x+10}{x^2-6x+5}$

7.18. (TIC) Realiza estas operaciones:

a) $\dfrac{1}{x+2}-\dfrac{1}{x-2}+\dfrac{4}{x^2-4}$ b) $\dfrac{x}{x-1}+\dfrac{2}{x+2}-\dfrac{x+1}{x-2}$

a) $\dfrac{1}{x+2}-\dfrac{1}{x-2}+\dfrac{4}{x^2-4}=\dfrac{(x-2)-(x+2)+4}{x^2-4}=0$

b) $\dfrac{x}{x-1}+\dfrac{2}{x+2}-\dfrac{x+1}{x-2}=\dfrac{x(x+2)(x-2)+2(x-1)(x-2)-(x+1)(x-1)(x+2)}{(x-1)(x+2)(x-2)}=\dfrac{x^2-9x+6}{x^3-x^2-4x+4}$

7.19. (TIC) Realiza las siguientes sumas.

a) $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}$.

c) $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{x^3}+\dfrac{1}{x^4}$

b) $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{x^3}$

d) $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{x^3}+\dfrac{1}{x^4}+\dfrac{1}{x^5}$

Fíjate en los coeficientes del numerador y el denominador en cada suma obtenida. ¿Cuánto valdrá $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}+...+\dfrac{1}{x^{1000}}$?

a) $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}=\dfrac{x+1}{x^2}$

c) $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{x^3}+\dfrac{1}{x^4}=\dfrac{x^3+x^2+x+1}{x^4}$

b) $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{x^3}=\dfrac{x^2+x+1}{x^3}$

d) $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{x^3}+\dfrac{1}{x^4}+\dfrac{1}{x^5}=\dfrac{x^4+x^3+x^2+x+1}{x^5}$

$\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}+...+\dfrac{1}{x^{1000}}=\dfrac{x^{999}+x^{998}+...+x+1}{x^{1000}}$

7.20. Actividad interactiva

7.21. Actividad resuelta

7.22. Calcula estos productos.

a) $\dfrac{x+1}{x}\cdot\dfrac{x-1}{x+2}$ b) $\dfrac{2x-1}{x-3}\cdot\dfrac{x^2-x+1}{2x^2-4}$

a) $\dfrac{x+1}{x}\cdot\dfrac{x-1}{x+2}=\dfrac{(x+1)(x-1)}{x(x+2)}=\dfrac{x^2-1}{x^2+2x}$

b) $\dfrac{2x-1}{x-3}\cdot\dfrac{x^2-x+1}{2x^2-4}=\dfrac{(2x-1)(x^2-x+1)}{(x-3)(2x^2-4)}=\dfrac{2x^3-3x^2+3x+1}{2x^3-6x^2-4x+12}$

7.23. (TIC) Efectúa los productos y simplifica el resultado.

a) $\dfrac{x^2}{x+1}\cdot\dfrac{x^2-1}{x^3}$ **b)** $\dfrac{x^3+1}{x^2-1}\cdot\dfrac{x^2+x}{x+1}$

a) $\dfrac{x^2}{x+1}\cdot\dfrac{x^2-1}{x^3}=\dfrac{x^2\left(x^2-1\right)}{(x+1)x^3}=\dfrac{x-1}{x}$

b) $\dfrac{x^3+1}{x^2-1}\cdot\dfrac{x^2+x}{x+1}=\dfrac{(x+1)\cdot\left(x^2-x+1\right)}{(x+1)\cdot(x-1)}\cdot\dfrac{x\cdot(x+1)}{(x+1)}=\dfrac{\left(x^2-x+1\right)}{x-1}\cdot x=\dfrac{x^3-x^2+x}{x-1}$

7.24. Opera estos cocientes.

a) $\dfrac{4x+7}{x^2}:\dfrac{3x+1}{x+5}$ **b)** $\dfrac{5x-1}{3x-1}:\dfrac{x^2-1}{2x^2+3}$

a) $\dfrac{4x+7}{x^2}:\dfrac{3x+1}{x+5}=\dfrac{4x+7}{x^2}\cdot\dfrac{x+5}{3x+1}=\dfrac{(4x+7)(x+5)}{x^2(3x+1)}=\dfrac{4x^2+27x+35}{3x^3+x^2}$

b) $\dfrac{5x-1}{3x-1}:\dfrac{x^2-1}{2x^2+3}=\dfrac{5x-1}{3x-1}\cdot\dfrac{2x^2+3}{x^2-1}=\dfrac{(5x-1)\left(2x^2+3\right)}{(3x-1)\left(x^2-1\right)}=\dfrac{10x^3-2x^2+15x-3}{3x^3-x^2-3x+1}$

7.25. (TIC) Calcula estos cocientes y simplifica.

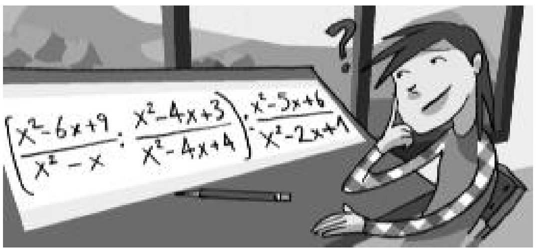
a) $\dfrac{x}{x^2-36}:\dfrac{12x^2}{x-6}$ **b)** $\dfrac{x^{100}-1}{x^{50}+1}:\dfrac{x^{50}-1}{7}$

a) $\dfrac{x}{x^2-36}:\dfrac{12x^2}{x-6}=\dfrac{x}{x^2-36}\cdot\dfrac{x-6}{12x^2}=\dfrac{x(x-6)}{12x^2(x-6)(x+6)}=\dfrac{1}{12x(x+6)}$

b) $\dfrac{x^{100}-1}{x^{50}+1}:\dfrac{x^{50}-1}{7}=\dfrac{7\left(x^{100}-1\right)}{\left(x^{50}+1\right)\left(x^{50}-1\right)}=\dfrac{7\left(x^{100}-1\right)}{\left(x^{100}-1\right)}=7$

7.26. Ayuda a Laura a resolver su problema.

.



$$\left(\frac{x^2-6x+9}{x^2-x}:\frac{x^2-4x+3}{x^2-4x+4}\right):\frac{x^2-5x+6}{x^2-2x+1}=\left(\frac{(x-3)^2}{x(x-1)}:\frac{(x-1)(x-3)}{(x-2)^2}\right):\frac{(x-2)(x-3)}{(x-1)^2}=$$

$$=\frac{(x-2)^2(x-3)}{x(x-1)^2}:\frac{(x-2)(x-3)}{(x-1)^2}=\frac{x-2}{x}$$

7.27. Actividad resuelta

7.28. Calcula el valor numérico para $x = 2$ de cada expresión radical.

a) $\sqrt{-x^2}$ **b)** $\sqrt[3]{-x^3}$ **c)** $\sqrt{(-x)^2}$ **d)** $\sqrt[3]{(-x)^3}$

a) $\sqrt{-2^2} = \sqrt{-4}$, no existe.

b) $\sqrt[3]{-2^3} = \sqrt[3]{-8} = -2$

c) $\sqrt{(-2)^2} = \sqrt{4} = 2$

d) $\sqrt[3]{(-2)^3} = \sqrt[3]{-8} = -2$

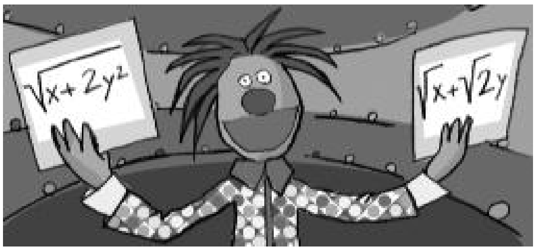
7.29. (TIC) Comprueba que las siguientes expresiones radicales no son equivalentes.

a) $\sqrt{x^4}$ **y** $\sqrt[3]{x^{12}}$ **b)** $\sqrt{x^6}$ **y** $\sqrt[3]{x^6}$

a) $\sqrt{x^4} = x^{4/2} = x^2 \neq x^4 = x^{12/3} = \sqrt[3]{x^{12}}$

b) $\sqrt{x^6} = x^{6/2} = x^3 \neq x^2 = x^{6/3} = \sqrt[3]{x^6}$

7.30. Keko piensa que estas dos expresiones son equivalentes. ¿Qué opinas tú?



No son equivalentes, porque asignando a $x = 1$ e $y = 2$, no se obtiene el mismo valor numérico.

$$\sqrt{x+2y^2} \underset{\substack{x=1\\y=2}}{\rightarrow} \sqrt{1+2\cdot 2^2} = \sqrt{9} = 3 \quad \neq \quad \sqrt{x} + \sqrt{2}y \underset{\substack{x=1\\y=2}}{\rightarrow} \sqrt{1} + 2\sqrt{2} = 1 + 2\sqrt{2}$$

7.31. Actividad resuelta

7.32. Actividad resuelta

7.33. Un alumno dice que los radicales $\sqrt{x^4}$ y $\sqrt[3]{x^6}$ son iguales. ¿Es cierta esta afirmación? ¿Y si los radicales son $\sqrt{x^4}$ y $\sqrt[4]{x^8}$?

Sí, $\sqrt{x^4} = x^{\frac{4}{2}} = x^2 = x^{\frac{6}{3}} = \sqrt[3]{x^6}$

Sí, $\sqrt{x^4} = x^{\frac{4}{2}} = x^2 = x^{\frac{8}{4}} = \sqrt[4]{x^8}$

7.34. Simplifica estos radicales.

a) $\sqrt[4]{x^6}$ **b)** $\sqrt[8]{a^4}$ **c)** $\sqrt[6]{x^3}$ **d)** $\sqrt[12]{y^8}$

a) $\sqrt[4]{x^6} = x^{\frac{6}{4}} = x^{\frac{3}{2}} = \sqrt{x^3}$

b) $\sqrt[8]{a^4} = a^{\frac{4}{8}} = a^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a}$

c) $\sqrt[6]{x^3} = x^{\frac{3}{6}} = x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x}$

d) $\sqrt[12]{y^8} = y^{\frac{8}{12}} = y^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{y^2}$

7.35. Simplifica estos radicales hasta conseguir un radical irreducible.

a) $\sqrt[18]{x^{12}y^{36}z^{6}}$ **b)** $\sqrt[45]{x^{15}y^{30}z^{15}}$

a) $\sqrt[18]{x^{12}y^{36}z^{6}} = \sqrt[\frac{18}{6}]{x^{\frac{12}{6}}y^{\frac{36}{6}}z^{\frac{6}{6}}} = \sqrt[3]{x^2y^6z}$

b) $\sqrt[45]{x^{15}y^{30}z^{15}} = \sqrt[\frac{45}{15}]{x^{\frac{15}{15}}y^{\frac{30}{15}}z^{\frac{15}{15}}} = \sqrt[3]{xy^2z}$

7.36. Reduce a índice común estos radicales.

a) $\sqrt[15]{ab}$, $\sqrt[5]{ab}$, $\sqrt[3]{ab}$ **b)** $\sqrt[3]{x^2y}$, $\sqrt[9]{x^7y^2}$, $\sqrt[6]{xy^2}$

a) $\sqrt[15]{ab}$

$\sqrt[5]{ab} = \sqrt[5\cdot 3]{(ab)^3} = \sqrt[15]{(ab)^3}$

$\sqrt[3]{ab} = \sqrt[3\cdot 5]{(ab)^5} = \sqrt[15]{(ab)^5}$

b) $\sqrt[3]{x^2y} = \sqrt[3\cdot 6]{\left(x^2y\right)^6} = \sqrt[18]{x^{12}y^6}$

$\sqrt[9]{x^7y^2} = \sqrt[9\cdot 2]{\left(x^7y^2\right)^2} = \sqrt[18]{x^{14}y^4}$

$\sqrt[6]{xy^2} = \sqrt[6\cdot 3]{\left(xy^2\right)^3} = \sqrt[18]{x^3y^6}$

7.37. Realiza las siguientes operaciones.

a) $\sqrt[3]{x^2y}\cdot\sqrt[3]{x^2y}$ **b)** $\left(\sqrt[3]{x^3y}\right)^2$ **c)** $\sqrt[3]{\sqrt{xy^3}}$

a) $\sqrt[3]{x^2y}\cdot\sqrt[3]{x^2y} = \left(x^2y\right)^{\frac{1}{3}}\left(x^2y\right)^{\frac{1}{3}} = \left(x^2y\right)^{\frac{1}{3}+\frac{1}{3}} = \left(x^2y\right)^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{\left(x^2y\right)^2} = \sqrt[3]{x^4y^2}$

b) $\left(\sqrt[3]{x^3y}\right)^2 = \sqrt[3]{\left(x^3y\right)^2} = \sqrt[3]{x^6y^2}$

c) $\sqrt[3]{\sqrt{xy^3}} = \sqrt[3\cdot 2]{xy^3} = \sqrt[6]{xy^3}$

7.38. Efectúa estas operaciones.

a) $\sqrt[5]{x^2y}\cdot\sqrt[5]{x^3y} : \sqrt[5]{x^2y}$ **b)** $\sqrt[3]{\sqrt{x^5}} : \sqrt[6]{x^2}\cdot\left(\sqrt[6]{x}\right)^4$

a) $\sqrt[5]{x^2y}\cdot\sqrt[5]{x^3y} : \sqrt[5]{x^2y} = \sqrt[5]{x^2y\cdot x^3y : x^2y} = \sqrt[5]{x^3y}$

b) $\sqrt[3]{\sqrt{x^5}} : \sqrt[6]{x^2}\cdot\left(\sqrt[6]{x}\right)^4 = \sqrt[3\cdot 2]{x^5} : \sqrt[6]{x^2}\cdot\sqrt[6]{x^4} = \sqrt[6]{x^5 : x^2\cdot x^4} = \sqrt[6]{x^7}$

7.39. Extrae factores de estos radicales.

a) $\sqrt[7]{x^{15}y^7z^{22}}$ **b)** $\sqrt[3]{x^9y^{10}zt^7}$ **c)** $\sqrt[5]{x^{10}y^{11}z^{12}t^{13}}$

a) $\sqrt[7]{x^{15}y^7z^{22}} = \sqrt[7]{x^7x^7xy^7z^7z^7z^7z} = x^2yz^3\cdot\sqrt[7]{xz}$

b) $\sqrt[3]{x^9y^{10}zt^7} = \sqrt[3]{x^3x^3x^3y^3y^3y^3yzt^3t^3t} = x^3y^3t^2\cdot\sqrt[3]{yzt}$

c) $\sqrt[5]{x^{10}y^{11}z^{12}t^{13}} = \sqrt[5]{x^5x^5y^5y^5yz^5z^5z^2t^5t^5t^3} = x^2y^2z^2t^2\cdot\sqrt[5]{yz^2t^3}$

7.40. Calcula estas sumas de radicales.

a) $\sqrt{x^3y^3} - \sqrt{xy^5} + \sqrt{x^3y}$ **b)** $\sqrt[4]{x^4y^5} + \sqrt[4]{x^8y} - \sqrt[4]{y^9}$

a) $\sqrt{x^3y^3} - \sqrt{xy^5} + \sqrt{x^3y} = xy\sqrt{xy} - y^2\sqrt{xy} + x\sqrt{xy} = \left(xy - y^2 + x\right)\sqrt{xy}$

b) $\sqrt[4]{x^4y^5} + \sqrt[4]{x^8y} - \sqrt[4]{y^9} = xy\sqrt[4]{y} + x^2\sqrt[4]{y} - y^2\sqrt[4]{y} = \left(xy + x^2 - y^2\right)\sqrt[4]{y}$

7.41. (TIC) Realiza estos cálculos.

a) $\sqrt[5]{x^2y^3} \cdot \sqrt[5]{xy^4}$ **b)** $\sqrt{a^3b} : \sqrt[6]{a^5}$

a) $\sqrt[5]{x^2y^3} \cdot \sqrt[5]{xy^4} = \sqrt[5]{x^3y^7} = y\sqrt[5]{x^3y^2}$

b) $\sqrt{a^3b} : \sqrt[6]{a^5} = \sqrt[6]{\left(a^3b\right)^3} : \sqrt[6]{a^5} = \sqrt[6]{a^4b^3}$

7.42. (TIC) Efectúa las siguientes operaciones.

a) $\sqrt{\sqrt{ab}} \cdot \left(\sqrt{ab^2}\right)^3 \cdot \sqrt[3]{b}$ **b)** $\sqrt[5]{xy^2} \cdot \left(\sqrt[3]{xy}\right)^2 : \sqrt[15]{xy}$

a) $\sqrt{\sqrt{ab}} \cdot \left(\sqrt{ab^2}\right)^3 \cdot \sqrt[3]{b} = \sqrt[4]{ab} \cdot \sqrt{\left(ab^2\right)^3} \cdot \sqrt[3]{b} = \sqrt[12]{a^3b^3 \cdot a^{18}b^{36} \cdot b^4} = \sqrt[12]{a^{21}b^{43}} = ab^3\sqrt[12]{a^9b^7}$

b) $\sqrt[5]{xy^2} \cdot \left(\sqrt[3]{xy}\right)^2 : \sqrt[15]{xy} = \sqrt[5]{xy^2} \cdot \sqrt[3]{x^2y^2} : \sqrt[15]{xy} = \sqrt[15]{x^3y^6 \cdot x^{10}y^{10} : xy} = \sqrt[15]{x^{12}y^{15}} = y\sqrt[15]{x^{12}}$

EJERCICIOS

Fracciones algebraicas equivalentes

7.43. (TIC) Determina el valor numérico de estas fracciones algebraicas para $x = 1$ e $y = -2$.

a) $\dfrac{2xy}{x^2+y^2}$ **b)** $\dfrac{3x+2y}{x+y}$ **c)** $\dfrac{4x^2y}{5x+y}$

a) $\dfrac{2\cdot 1\cdot(-2)}{1^2+(-2)^2} = -\dfrac{4}{5}$ b) $\dfrac{3\cdot 1+2\cdot(-2)}{1+(-2)} = 1$ c) $\dfrac{4\cdot 1^2(-2)}{5\cdot 1+(-2)} = -\dfrac{8}{3}$

7.44. Halla los valores de x para los cuales el valor numérico de la fracción algebraica $\dfrac{x^3-7x-6}{x^2-x-6}$ es indeterminado.

Las raíces del denominador 3 y –2. Vemos qué ocurre con estos valores cuando los sustituimos en el numerador.

Si $x = 3$, $\dfrac{3^3-7\cdot 3-6}{3^2-3-6} = \dfrac{0}{0}$. Indeterminado

Si $x = -2$, $\dfrac{(-2)^3-7\cdot(-2)-6}{(-2)^2-(-2)-6} = \dfrac{0}{0}$. Indeterminado

7.45. (TIC) Simplifica las siguientes fracciones algebraicas.

a) $\dfrac{x+1}{x^2-1}$ **b)** $\dfrac{x^2+4x+4}{x^2-4}$ **c)** $\dfrac{x^2+x-2}{x^2+2x-3}$ **d)** $\dfrac{x^2-x-2}{x^5-x^4-2x^3}$

a) $\dfrac{x+1}{x^2-1} = \dfrac{x+1}{(x+1)(x-1)} = \dfrac{1}{x-1}$

c) $\dfrac{x^2+x-2}{x^2+2x-3} = \dfrac{(x-1)(x+2)}{(x-1)(x+3)} = \dfrac{x+2}{x+3}$

b) $\dfrac{x^2+4x+4}{x^2-4} = \dfrac{(x+2)^2}{(x+2)(x-2)} = \dfrac{x+2}{x-2}$

d) $\dfrac{x^2-x-2}{x^5-x^4-2x^3} = \dfrac{x^2-x-2}{x^3\left(x^2-x-2\right)} = \dfrac{1}{x^3}$

7.46. ¿Puede ser que el resultado obtenido al calcular el valor numérico de una expresión algebraica sea otra expresión algebraica? Razona tu respuesta.

No, porque al calcular el valor numérico de una expresión algebraica se sustituyen las variables por números y se realizan las operaciones, quedando como resultado un valor numérico y no otra expresión algebraica.

7.47. Reduce a común denominador estas fracciones algebraicas.

$$\frac{x-1}{x+2} \qquad \frac{x+1}{x-2} \qquad \frac{3x}{x^2+2x-8}$$

$$\frac{x-1}{x+2} = \frac{(x-1)(x-2)(x+4)}{(x+2)(x-2)(x+4)} = \frac{x^3+x^2-10x+8}{x^3+4x^2-4x-16}$$

$$\frac{x+1}{x-2} = \frac{(x+1)(x+2)(x+4)}{(x-2)(x+2)(x+4)} = \frac{x^3+7x^2+14x+8}{x^3+4x^2-4x-16}$$

$$\frac{3x}{x^2+2x-8} = \frac{3x(x+2)}{(x^2+2x-8)(x+2)} = \frac{3x^2+6x}{x^3+4x^2-4x-16}$$

7.48. Indica qué pares de fracciones algebraicas son equivalentes.

a) $\frac{x+1}{x-1}$ y $\frac{x^3+x^2-2x-2}{x^3-x^2-2x+2}$ b) $\frac{x}{2x-1}$ y $\frac{x^2+x}{2x^2-3x+1}$ c) $\frac{(x-3)^2}{x^2-9}$ y $\frac{x^2-3x+9}{(x-3)\cdot(x+3)}$

a) Sí son equivalentes, tanto el numerador como el denominador de la segunda coinciden con el de la primera multiplicados por $(x^2 - 2)$.

b) No son equivalentes. Si $x = 2$, $\frac{2}{2\cdot 2-1} = \frac{2}{3}$ y $\frac{2^2+2}{2\cdot 2^2-3\cdot 2+1} = \frac{6}{3} = 2$.

c) No son equivalentes. El denominador de la segunda es la factorización del denominador de la primera, y en los numeradores no se establece la relación de igualdad porque el numerador de la segunda fracción no coincide con el desarrollo del numerador de la primera.

7.49. Calcula el verdadero valor de cada fracción para $x = -2$ y para $x = 1$.

a) $\frac{x^2-x-6}{x^2+3x+2}$ b) $\frac{x^3-2x^2-x+2}{x^2+x-2}$

a) $\frac{(-2)^2-(-2)-6}{(-2)^2+3\cdot(-2)+2} = \frac{0}{0}$. Indeterminado.

$$\frac{x^2-x-6}{x^2+3x+2} = \frac{(x+2)(x-3)}{(x+2)(x+1)} = \frac{x-3}{x+1}$$

Sustituimos $x = -2$, $\frac{-2-3}{-2+1} = 5$.

Para $x = 1$, $\frac{1^2-1-6}{1^2+3\cdot 1+2} = \frac{-6}{6} = -1$.

b) $\frac{1^3-2\cdot 1^2-1+2}{1^2+1-2} = \frac{0}{0}$. Indeterminado.

$$\frac{x^3-2x^2-x+2}{x^2+x-2} = \frac{(x-1)(x^2-x-2)}{(x-1)(x+2)} = \frac{x^2-x-2}{x+2}$$

Sustituimos $x = 1$, $\frac{1^2-1-2}{1+2} = -\frac{2}{3}$.

Para $x = -2$, $\frac{(-2)^3-2(-2)^2-(-2)+2}{(-2)^2+(-2)-2} = \frac{-12}{0}$.

No tiene valor numérico.

7.50. ¿Cuál de estas fracciones algebraicas no es equivalente a $\frac{x^3+5x^2+6x}{x^4+2x^3-3x^2}$?

a) $\frac{x^2+2x}{x^2\cdot(x-1)}$ b) $\frac{x^2+3x}{x^2\cdot(x-1)}$ c) $\frac{x+2}{x^2-x}$

$$\frac{x^3+5x^2+6x}{x^4+2x^3-3x^2} = \frac{x(x^2+5x+6)}{x^2(x^2+2x-3)} = \frac{x(x+2)(x+3)}{x^2(x-1)(x+3)}$$

La fracción no equivalente es la b.

Operaciones con fracciones algebraicas

7.51. Simplifica estas fracciones algebraicas.

a) $\dfrac{xy-y}{x-1}$ b) $\dfrac{x^2-4}{2x-4}$ c) $\dfrac{x-1}{x^2+x-1}$ d) $\dfrac{x^2+2x-3}{x^2+x-6}$

a) $\dfrac{xy-y}{x-1}=\dfrac{(x-1)y}{x-1}=y$

c) $\dfrac{x-1}{x^2+x-1}$. No se simplifica.

b) $\dfrac{x^2-4}{2x-4}=\dfrac{(x+2)(x-2)}{2(x-2)}=\dfrac{x+2}{2}$

d) $\dfrac{x^2+2x-3}{x^2+x-6}=\dfrac{(x-1)(x+3)}{(x-2)(x+3)}=\dfrac{x-1}{x-2}$

7.52. Opera y simplifica las siguientes fracciones algebraicas.

a) $\dfrac{x}{x-1}+\dfrac{1}{x+1}$ b) $\dfrac{a-2}{a+2}+\dfrac{a+2}{a-2}$

a) $\dfrac{x}{x-1}+\dfrac{1}{x+1}=\dfrac{x(x+1)+(x-1)}{x^2-1}=\dfrac{x^2+x+x-1}{x^2-1}=\dfrac{x^2+2x-1}{x^2-1}$

b) $\dfrac{a-2}{a+2}+\dfrac{a+2}{a-2}=\dfrac{(a-2)^2+(a+2)^2}{a^2-4}=\dfrac{a^2-4a+4+a^2+4a+4}{a^2-4}=\dfrac{2a^2+8}{a^2-4}$

7.53. Realiza las operaciones.

a) $\dfrac{3x}{x-5}+\dfrac{2x-1}{x+2}$ b) $\dfrac{2x-1}{x^2-4}-\dfrac{3x-1}{x-2}$ c) $\dfrac{2x-1}{3x}\cdot\dfrac{x+2}{x^2-3x+1}$ d) $\dfrac{x^2-x+1}{x^3}:\dfrac{4x-7}{x+1}$

a) $\dfrac{3x}{x-5}+\dfrac{2x-1}{x+2}=\dfrac{3x(x+2)+(2x-1)(x-5)}{(x-5)(x+2)}=\dfrac{5x^2-5x+5}{x^2-3x-10}$

b) $\dfrac{2x-1}{x^2-4}-\dfrac{3x-1}{x-2}=\dfrac{2x-1-(3x-1)(x+2)}{x^2-4}=\dfrac{-3x^2-3x+1}{x^2-4}$

c) $\dfrac{2x-1}{3x}\cdot\dfrac{x+2}{x^2-3x+1}=\dfrac{(2x-1)(x+2)}{3x(x^2-3x+1)}=\dfrac{2x^2+3x-2}{3x^3-9x^2+3x}$

d) $\dfrac{x^2-x+1}{x^3}:\dfrac{4x-7}{x+1}=\dfrac{(x^2-x+1)(x+1)}{x^3(4x-7)}=\dfrac{x^3+1}{4x^4-7x^3}$

7.54. Opera y simplifica.

a) $\left(\dfrac{x+2}{x-2}-\dfrac{x-2}{x+2}\right)\cdot\left(x-\dfrac{4}{x}\right)$ b) $\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{x}{x-1}\right):\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{x}{x-1}\right)$

a) $\left(\dfrac{x+2}{x-2}-\dfrac{x-2}{x+2}\right)\cdot\left(x-\dfrac{4}{x}\right)=\dfrac{(x+2)^2-(x-2)^2}{x^2-4}\cdot\dfrac{x^2-4}{x}=8$

b) $\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{x}{x-1}\right):\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{x}{x-1}\right)=\dfrac{x-1-x^2}{x(x-1)}:\dfrac{x-1+x^2}{x(x-1)}=\dfrac{-x^2+x-1}{x^2+x-1}$

7.55. Opera y simplifica, reduciendo previamente a común denominador.

a) $\dfrac{x}{x-2}+\dfrac{2x+1}{x+2}-\dfrac{1}{x^2-4}$ **b)** $\dfrac{1}{3x^2-3}-\dfrac{2}{2x+2}+\dfrac{x+5}{x+1}$ **c)** $\dfrac{x}{x-1}-\dfrac{1}{x+2}+\dfrac{3x-1}{x-3}$

a) $\dfrac{x}{x-2}+\dfrac{2x+1}{x+2}-\dfrac{1}{x^2-4}=\dfrac{x(x+2)+(2x+1)(x-2)-1}{x^2-4}=\dfrac{3x^2-x-3}{x^2-4}$

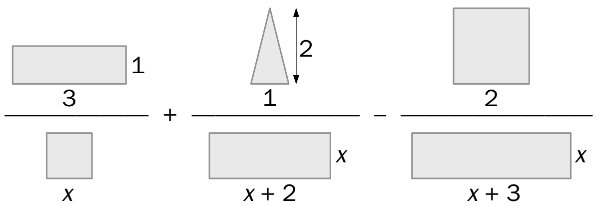
b)

$$\frac{1}{3x^2-3}-\frac{2}{2x+2}+\frac{x+5}{x+1}=\frac{1}{3\left(x^2-1\right)}-\frac{2}{2(x+1)}+\frac{x+5}{x+1}=\frac{2-2\cdot 3(x-1)+6(x+5)(x-1)}{6\left(x^2-1\right)}=\frac{3x^2+9x-11}{3\left(x^2-1\right)}$$

c)

$$\frac{x}{x-1}-\frac{1}{x+2}+\frac{3x-1}{x-3}=\frac{x(x+2)(x-3)-(x-1)(x-3)+(3x-1)(x-1)(x+2)}{(x-1)(x+2)(x-3)}=\frac{4x^3-9x-1}{x^3-2x^2-5x+6}$$

7.56. Opera y simplifica las siguientes fracciones algebraicas, calculando previamente las áreas de las figuras geométricas que aparecen en los numeradores y en los denominadores.



$$\frac{3\cdot 1}{x^2}+\frac{\frac{1\cdot 2}{2}}{x(x+2)}-\frac{2\cdot 2}{x(x+3)}=\frac{3(x+2)(x+3)+x(x+3)-4x(x+2)}{x^2(x+2)(x+3)}=\frac{10x+18}{x^4+5x^3+6x^2}$$

7.57. Realiza estas operaciones y simplifica el resultado.

a) $\dfrac{x+1}{x^2+2x}\cdot\dfrac{4x+3x^3}{x^2+x}$ **b)** $\dfrac{x-2}{x^2-9}:\dfrac{x^2-4}{x+3}$

a) $\dfrac{x+1}{x^2+2x}\cdot\dfrac{4x+3x^3}{x^2+x}=\dfrac{(x+1)\left(4x+3x^3\right)}{\left(x^2+2x\right)\left(x^2+x\right)}=\dfrac{(x+1)x\left(4+3x^2\right)}{x(x+2)x(x+1)}=\dfrac{4+3x^2}{x(x+2)}$

b) $\dfrac{x-2}{x^2-9}:\dfrac{x^2-4}{x+3}=\dfrac{(x-2)(x+3)}{\left(x^2-9\right)\left(x^2-4\right)}=\dfrac{1}{(x-3)(x+2)}$

7.58. (TIC) Opera y simplifica.

a) $\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{2x}-\dfrac{1}{3x}\right):\left(\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{2x}\right)$ **b)** $\left[\left(x+\dfrac{1}{x}\right):\left(x-\dfrac{1}{x}\right)\right]\cdot(x-1)$ **c)** $\left(\dfrac{x+1}{(x-1)^2}\cdot\dfrac{x^2-1}{x}\right):\left(\dfrac{x+1}{(x-1)^2}\right)$

a) $\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{2x}-\dfrac{1}{3x}\right):\left(\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{2x}\right)=\left(\dfrac{1}{6x}\right):\left(\dfrac{2-x}{2x^2}\right)=\dfrac{2x^2}{6x(2-x)}=\dfrac{x}{6-3x}$

b) $\left[\left(x+\dfrac{1}{x}\right):\left(x-\dfrac{1}{x}\right)\right](x-1)=\left[\left(\dfrac{x^2+1}{x}\right):\left(\dfrac{x^2-1}{x}\right)\right]\cdot(x-1)=\dfrac{\left(x^2+1\right)x}{\left(x^2-1\right)x}\cdot(x-1)=\dfrac{x^2+1}{x+1}$

c) $\left(\dfrac{x+1}{(x-1)^2}\cdot\dfrac{x^2-1}{x}\right):\left(\dfrac{x+1}{(x-1)^2}\right)=\dfrac{(x+1)\left(x^2-1\right)}{(x-1)^2x}:\dfrac{x+1}{(x-1)^2}=\dfrac{(x+1)^2}{(x-1)x}:\dfrac{x+1}{(x-1)^2}=\dfrac{(x+1)^2(x-1)^2}{(x+1)(x-1)x}=$

$=\dfrac{x^2-1}{x}$

7.59. (TIC) Opera las siguientes fracciones algebraicas.

a) $1-\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{x}}}$ **b)** $2-\dfrac{1}{2-\dfrac{1}{2-\dfrac{1}{x}}}$

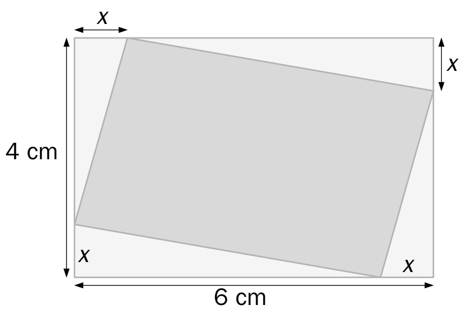
a) $1-\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{x}}}=1-\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{\dfrac{x-1}{x}}}=1-\dfrac{1}{1-\dfrac{x}{x-1}}=1-\dfrac{1}{\dfrac{x-1-x}{x-1}}=1-\dfrac{x-1}{-1}=x$

b) $2-\dfrac{1}{2-\dfrac{1}{2-\dfrac{1}{x}}}=2-\dfrac{1}{2-\dfrac{1}{\dfrac{2x-1}{x}}}=2-\dfrac{1}{2-\dfrac{x}{2x-1}}=2-\dfrac{1}{\dfrac{4x-2-x}{2x-1}}=2-\dfrac{2x-1}{3x-2}=\dfrac{4x-3}{3x-2}$

7.60. Calcula cuánto han de valer los números *A* y *B*, para que se verifique la siguiente igualdad: $\dfrac{A}{x^2-3x}+\dfrac{B}{x^2}=\dfrac{3x-6}{x^3-3x^2}$ **.**

$$\frac{A}{x^2-3x}+\frac{B}{x^2}=\frac{Ax^2+B(x^2-3x)}{(x^2-3x)x^2}=\frac{(A+B)x-3B}{(x^2-3x)x}=\frac{3x-6}{x^3-3x^2}\Rightarrow\begin{cases}A+B=3\\3B=6\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}A=1\\B=2\end{cases}$$

7.61. Expresa el área del cuadrilátero coloreado, mediante un polinomio en *x*.



¿Cuánto miden los lados del cuadrilátero?

Para resolver el problema, le restaremos al área del rectángulo grande el área de los cuatro triángulos rectángulos, que son iguales dos a dos: $A_1=A_2$, y $A_3=A_4$.

$\acute{A}rea(A_1)=\acute{A}rea(A_2)=\dfrac{(6-x)x}{2}$; $\acute{A}rea(A_3)=\acute{A}rea(A_4)=\dfrac{(4-x)x}{2}$

$\acute{A}rea\ del\ rect\acute{a}ngulo=4\cdot 6=24$; $\acute{A}rea\ de\ la\ figura=24-(6-x)x-(4-x)x=2x^2-10x+24$

El cuadrilátero es un paralelogramo y, por tanto, tiene los lados iguales dos a dos.
Usamos el teorema de Pitágoras para calcular los lados *l* y *m* del paralelogramo:

$l=\sqrt{(4-x)^2+x^2}=\sqrt{2x^2-8x+16}$, y $m=\sqrt{(6-x)^2+x^2}=\sqrt{2x^2-12x+36}$

Expresiones radicales equivalentes

7.62. Halla el valor numérico de estas expresiones radicales para los valores $x = 2$ e $y = 1$.

a) $\sqrt{\dfrac{2xy}{x^2+y^2}}$ **b)** $\sqrt{x^3y^2+5}$ **c)** $\sqrt{2x+3y-1}$

a) $\sqrt{\dfrac{2\cdot 2\cdot 1}{2^2+1^2}}=\sqrt{\dfrac{4}{5}}$ b) $\sqrt{2^3\cdot 1^2+5}=\sqrt{13}$ c) $\sqrt{2\cdot 2+3\cdot 1-1}=\sqrt{6}$

7.63. Opera las siguientes expresiones radicales.

a) $\sqrt{144x^4}$ **c)** $\sqrt[3]{64x^6}$

b) $\sqrt{81x^4}$ **d)** $\sqrt[5]{32x^{25}}$

a) $\sqrt{144x^4}=12x^2$ c) $\sqrt[3]{64x^6}=4x^2$

b) $\sqrt{81x^4}=9x^2$ d) $\sqrt[5]{32x^{25}}=2x^5$

7.64. Indica qué pares de expresiones radicales son equivalentes.

a) $\sqrt{4x^2}$ **y** $-\sqrt[3]{8x^3}$ **b)** $\sqrt[3]{8x^6}$ **y** $\sqrt[9]{512x^{18}}$ **c)** $\sqrt{9x^4}$ **y** $\sqrt[4]{81x^{12}}$

a) No lo son, para $x = 1$, $\sqrt{4\cdot 1^2}=2$ (cuando no se indica el signo, se considera signo positivo), y $-\sqrt[3]{8\cdot 1^3}=-2$.

b) Sí, ya que $\sqrt[3\cdot 3]{\left(8x^6\right)^3}=\sqrt[9]{512x^{18}}$

c) No, ya que $\sqrt{9x^4}=\sqrt[2\cdot 2]{\left(9x^4\right)^2}=\sqrt[4]{81x^8}\neq\sqrt[4]{81x^{12}}$

7.65. Escribe tres radicales equivalentes a estos.

a) $\sqrt[4]{x^2y^8}$ **b)** $\sqrt[3]{ab}$

a) $\sqrt[4]{x^2y^8}=\sqrt{xy^4}=\sqrt[8]{x^4y^{16}}=\sqrt[6]{x^3y^{12}}$

b) $\sqrt[3]{ab}=\sqrt[9]{a^3b^3}=\sqrt[15]{a^5b^5}=\sqrt[21]{a^7b^7}$

7.66. Reduce estos radicales a índice común: $\sqrt[3]{x^2}$ $\sqrt{x^3}$ $\sqrt[6]{x^5}$

$\sqrt[3]{x^2}=\sqrt[6]{x^4}$ $\sqrt{x^3}=\sqrt[6]{x^9}$ $\sqrt[6]{x^5}$

7.67. Simplifica los siguientes radicales.

a) $\sqrt[16]{a^8b^4}$ **c)** $\sqrt[15]{x^{12}y^{18}}$

b) $\sqrt[12]{\left(x^2y^2\right)^3}$ **d)** $\sqrt[20]{\left(x^2y^4\right)^5}$

a) $\sqrt[16]{a^8b^4}=\sqrt[4]{a^2b}$ c) $\sqrt[15]{x^{12}y^{18}}=\sqrt[5]{x^4y^6}$

b) $\sqrt[12]{\left(x^2y^2\right)^3}=\sqrt{xy}$ d) $\sqrt[20]{\left(x^2y^4\right)^5}=\sqrt{xy^2}$

7.68. Simplifica las siguientes expresiones radicales.

a) $\sqrt[15]{x^5y^{20}z^{10}}$ **b)** $\sqrt[3]{x^{14}y^7z^{23}}$ **c)** $\sqrt[12]{a^4b^8c^6}$ **d)** $\sqrt[8]{x^2y^4z^8}$

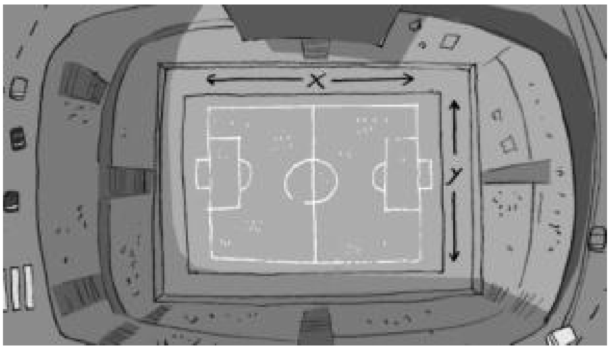
a) $\sqrt[15]{x^5y^{20}z^{10}} = \sqrt[3]{xy^4z^2}$

b) $\sqrt[3]{x^{14}y^7z^{23}}$. No se puede simplificar.

c) $\sqrt[12]{a^4b^8c^6} = \sqrt[6]{a^2b^4c^3}$

d) $\sqrt[8]{x^2y^4z^8} = \sqrt[4]{xy^2z^4}$

7.69. Utilizando el teorema de Pitágoras, calcula la diagonal del campo de fútbol.



Si *x* = 10 e *y* = 8, ¿cuál sería la longitud de dicha diagonal?

$d = \sqrt{x^2+y^2}$. Si $x = 10$ e $y = 8$, $d = \sqrt{10^2+8^2} = 2\sqrt{41}$

7.70. (TIC) ¿Cuál de las siguientes expresiones radicales no es equivalente a $\sqrt[3]{xy^2z}$?

a) $\sqrt[6]{x^2y^4z^2}$ **b)** $\sqrt[9]{x^3y^6z^2}$ **c)** $\sqrt[12]{x^4y^8z^4}$ **d)** $\sqrt[15]{x^5y^{10}z^5}$

La b, porque $\sqrt[3]{xy^2z} = \sqrt[9]{x^3y^6z^3} \neq \sqrt[9]{x^3y^6z^2}$

Operaciones con expresiones radicales

7.71. Realiza estas operaciones con radicales.

a) $\sqrt{\sqrt{x^{12}y^6}}$ **b)** $\sqrt{x^5y} : \sqrt{xy}$ **c)** $\sqrt[3]{x^2y}\cdot\sqrt[3]{x^4y^2}$ **d)** $\left(\sqrt{xy}\right)^4$

a) $\sqrt{\sqrt{x^{12}y^6}} = \sqrt[4]{x^{12}y^6} = x^3y\sqrt{y}$

b) $\sqrt{x^5y} : \sqrt{xy} = \sqrt{x^5y : xy} = \sqrt{x^4} = x^2$

c) $\sqrt[3]{x^2y}\cdot\sqrt[3]{x^4y^2} = \sqrt[3]{x^6y^3} = x^2y$

d) $\left(\sqrt{xy}\right)^4 = \sqrt{x^4y^4} = x^2y^2$

7.72. Extrae factores de los siguientes radicales.

a) $\sqrt[4]{64x^8}$ **b)** $\sqrt[3]{x^4yz^5}$ **c)** $\sqrt{\dfrac{16a^6}{b^3}}$

a) $\sqrt[4]{64x^8} = \sqrt[4]{2^6x^8} = 2x^2\sqrt[4]{4}$

b) $\sqrt[3]{x^4yz^5} = xz\sqrt[3]{xyz^2}$

c) $\sqrt{\dfrac{16a^6}{b^3}} = \sqrt{\dfrac{2^4\cdot a^6}{b^3}} = \dfrac{4a^3}{b}\sqrt{\dfrac{1}{b}} = \dfrac{4a^3}{b\sqrt{b}}$

7.73. Efectúa estas operaciones con expresiones radicales.

a) $\sqrt[3]{x^2} : \sqrt{x^3}$ **b)** $\sqrt{x^2y^3} \cdot \sqrt[5]{xy}$ **c)** $\sqrt{x^3} \cdot \sqrt[3]{x^2}$ **d)** $\sqrt[3]{xy^2} : \sqrt[4]{x^3y^5}$

a) $\dfrac{\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt{x^3}} = \dfrac{\sqrt[6]{x^4}}{\sqrt[6]{x^9}} = \sqrt[6]{\dfrac{x^4}{x^9}} = \sqrt[6]{\dfrac{1}{x^5}} = \dfrac{1}{\sqrt[6]{x^5}}$

b) $\sqrt{x^2y^3} \cdot \sqrt[5]{xy} = \sqrt[10]{x^{10}y^{15}} \cdot \sqrt[10]{x^2y^2} = \sqrt[10]{x^{12}y^{17}} = xy\sqrt[10]{x^2y^7}$

c) $\sqrt{x^3} \cdot \sqrt[3]{x^2} = \sqrt[6]{x^9} \cdot \sqrt[6]{x^4} = \sqrt[6]{x^{13}} = x^2\sqrt[6]{x}$

d) $\dfrac{\sqrt[3]{xy^2}}{\sqrt[4]{x^3y^5}} = \dfrac{\sqrt[12]{x^4y^8}}{\sqrt[12]{x^9y^{15}}} = \sqrt[12]{\dfrac{1}{x^5y^7}}$

7.74. (TIC) Opera las siguientes expresiones radicales.

a) $\sqrt{12x} + \sqrt{75x} - \sqrt{27x} + \sqrt{48x}$

b) $\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{ab^3} + \sqrt[3]{ab^6} - \sqrt[3]{ab^9}$

c) $5\sqrt{xy^2} + \sqrt{16x^3y^4} - \sqrt{9xy^6}$

a) $\sqrt{12x} + \sqrt{75x} - \sqrt{27x} + \sqrt{48x} = \sqrt{2^2 \cdot 3x} + \sqrt{5^2 \cdot 3x} - \sqrt{3^3x} + \sqrt{2^4 \cdot 3x} = 8\sqrt{3x}$

b) $\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{ab^3} + \sqrt[3]{ab^6} - \sqrt[3]{ab^9} = (1 - b + b^2 - b^3)\sqrt[3]{a}$

c) $5\sqrt{xy^2} + \sqrt{16x^3y^4} - \sqrt{9xy^6} = (5y + 4xy^2 - 3y^3)\sqrt{x}$

7.75. Calcula estas sumas de radicales.

a) $\sqrt{4x} - 3\sqrt{x^5} + x\sqrt{x^3}$ **b)** $\sqrt[4]{x^5} + \sqrt[4]{x^9} - \sqrt[4]{x}$

a) $\sqrt{4x} - 3\sqrt{x^5} + x\sqrt{x^3} = 2\sqrt{x} - 3x^2\sqrt{x} + x^2\sqrt{x} = (2 - 2x^2)\sqrt{x}$

b) $\sqrt[4]{x^5} + \sqrt[4]{x^9} - \sqrt[4]{x} = x\sqrt[4]{x} + x^2\sqrt[4]{x} - \sqrt[4]{x} = (x^2 + x - 1)\sqrt[4]{x}$

7.76. Realiza las siguientes operaciones.

a) $\sqrt[3]{xy} \cdot \sqrt[3]{x^2y}$ **c)** $\sqrt[3]{x^2y} \cdot \sqrt[5]{x^4y^3}$ **e)** $\left(\sqrt[4]{x^2y^3}\right)^3$

b) $\sqrt[5]{x^2y} : \sqrt[5]{xy}$ **d)** $\sqrt[6]{\sqrt[3]{xy}}$ **f)** $\sqrt[3]{x^4y} : \sqrt[9]{x^3y^2}$

a) $\sqrt[3]{xy} \cdot \sqrt[3]{x^2y} = \sqrt[3]{xy \cdot x^2y} = x\sqrt[3]{y^2}$

b) $\sqrt[5]{x^2y} : \sqrt[5]{xy} = \sqrt[5]{x^2y : xy} = \sqrt[5]{x}$

c) $\sqrt[3]{x^2y} \cdot \sqrt[5]{x^4y^3} = \sqrt[15]{x^{10}y^5x^{12}y^9} = x\sqrt[15]{x^7y^{14}}$

d) $\sqrt[6]{\sqrt[3]{xy}} = \sqrt[6\cdot 3]{xy} = \sqrt[18]{xy}$

e) $\left(\sqrt[4]{x^2y^3}\right)^3 = \sqrt[4]{(x^2y^3)^3} = xy^2\sqrt[4]{x^2y}$

f) $\sqrt[3]{x^4y} : \sqrt[9]{x^3y^2} = \sqrt[9]{x^{12}y^3 : x^3y^2} = x\sqrt[9]{y}$

7.77. Extrae factores de los siguientes radicales.

a) $\sqrt[5]{x^{17}y^7}$ **b)** $\sqrt[7]{x^{22}y^8}$ **c)** $\sqrt[6]{x^{12}y^3}$ **d)** $\sqrt{x^{13}y^4}$

a) $\sqrt[5]{x^{17}y^7} = x^3y\sqrt[5]{x^2y^2}$

b) $\sqrt[7]{x^{22}y^8} = x^3y\sqrt[7]{xy}$

c) $\sqrt[6]{x^{12}y^3} = x^2\sqrt[6]{y^3} = x^2\sqrt{y}$

d) $\sqrt{x^{13}y^4} = x^6y^2\sqrt{x}$

7.78. (TIC) Opera y simplifica.

a) $\dfrac{\sqrt[4]{a^3b^2}\cdot\sqrt[3]{a^4b^5}}{\sqrt[6]{a^5b^4}\cdot\sqrt{ab}}$ **b)** $\dfrac{\sqrt[4]{x^2y^3}\cdot\sqrt[6]{x^4y^6}}{\sqrt[10]{x^3y^2}}$

a) $\dfrac{\sqrt[4]{a^3b^2}\cdot\sqrt[3]{a^4b^5}}{\sqrt[6]{a^5b^4}\cdot\sqrt{ab}} = \dfrac{\sqrt[12]{\left(a^3b^2\right)^3\left(a^4b^5\right)^4}}{\sqrt[12]{\left(a^5b^4\right)^2(ab)^6}} = \sqrt[12]{\dfrac{a^{25}b^{26}}{a^{16}b^{14}}} = \sqrt[12]{a^9b^{12}} = b\sqrt[12]{a^9} = b\sqrt[4]{a^3}$

b) $\dfrac{\sqrt[4]{x^2y^3}\cdot\sqrt[6]{x^4y^6}}{\sqrt[10]{x^3y^2}} = \dfrac{\sqrt[12]{\left(x^2y^3\right)^3\left(x^4y^6\right)^2}}{\sqrt[10]{x^3y^2}} = \dfrac{xy\sqrt[12]{x^2y^9}}{\sqrt[10]{x^3y^2}} = xy\sqrt[120]{\dfrac{x^{20}y^{90}}{x^{36}y^{24}}} = xy\sqrt[60]{\dfrac{y^{33}}{x^8}}$

7.79. (TIC) Realiza estas operaciones.

a) $\sqrt[3]{xy^3}\cdot\sqrt{xy}\cdot\sqrt[4]{x^5y}$ **b)** $\dfrac{\sqrt[3]{x}\cdot\sqrt[5]{x^3}}{\sqrt[6]{x^4}}$

a) $\sqrt[3]{xy^3}\cdot\sqrt{xy}\cdot\sqrt[4]{x^5y} = \sqrt[12]{\left(xy^3\right)^4(xy)^6\left(x^5y\right)^3} = \sqrt[12]{x^{25}y^{21}} = x^2y\sqrt[12]{xy^9}$

b) $\dfrac{\sqrt[3]{x}\cdot\sqrt[5]{x^3}}{\sqrt[6]{x^4}} = \dfrac{\sqrt[15]{x^5x^9}}{\sqrt[3]{x^2}} = \sqrt[15]{\dfrac{x^{14}}{x^{10}}} = \sqrt[15]{x^4}$

7.80. Escribe con un solo radical $x\sqrt{y\sqrt{z\sqrt[3]{t}}}$.

$x\sqrt{y\sqrt{z\sqrt[3]{t}}} = \sqrt{x^2y\sqrt{z\sqrt[3]{t}}} = \sqrt{\sqrt{x^4y^2z\sqrt[3]{t}}} = \sqrt[4]{x^4y^2z\sqrt[3]{t}} = \sqrt[4]{\sqrt[3]{x^{12}y^6z^3t}} = \sqrt[12]{x^{12}y^6z^3t}$

7.81. En una expresión radical de índice *n*, ¿por cuánto hemos de dividir el radicando para que la expresión radical quede dividida por 2?

Por 2^n, porque $\sqrt[n]{\dfrac{a}{2^n}} = \dfrac{\sqrt[n]{a}}{2}$

PROBLEMAS

7.82. Realiza las siguientes operaciones utilizando expresiones algebraicas.

a) El cociente entre un número y su siguiente más el cociente entre dicho número y su anterior.

b) El cociente entre dos números pares consecutivos más el cociente entre dos números impares consecutivos.

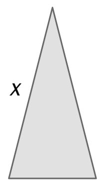
c) La suma de los inversos de dos pares consecutivos.

d) La suma de los inversos de dos números impares consecutivos.

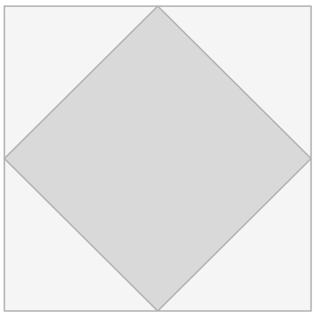
a) $\dfrac{x}{x+1}+\dfrac{x}{x-1}$ b) $\dfrac{2x}{2x+2}+\dfrac{2x+1}{2x+3}$ c) $\dfrac{1}{2x}+\dfrac{1}{2x+2}$ d) $\dfrac{1}{2x+1}+\dfrac{1}{2x+3}$

7.83. Expresa, mediante una fracción algebraica, el área del triángulo isósceles de la figura.

$$h=\sqrt{x^2-\left(\frac{x}{4}\right)^2}=\sqrt{\frac{15x^2}{16}}=\frac{\sqrt{15}x}{4} \qquad A=\frac{\frac{x}{2}\cdot\frac{\sqrt{15}x}{4}}{2}=\frac{\sqrt{15}x^2}{16}$$



7.84. Expresa, mediante una fracción algebraica, el área de la parte coloreada.

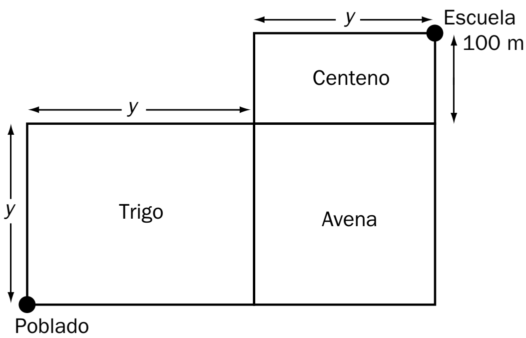


Lado del cuadrado coloreado:

$$l=\sqrt{\left(\frac{l}{2}\right)^2+\left(\frac{l}{2}\right)^2}=\sqrt{\frac{2l^2}{4}}=\frac{\sqrt{2}\cdot l}{2}$$

$$A=\left(\frac{\sqrt{2}\cdot l}{2}\right)^2=\frac{2l^2}{4}=\frac{l^2}{2}$$

7.85. Hassan vive en un pequeño poblado de Marruecos y le separan de la escuela tres campos de cultivo de trigo, avena y centeno, como indica la figura.



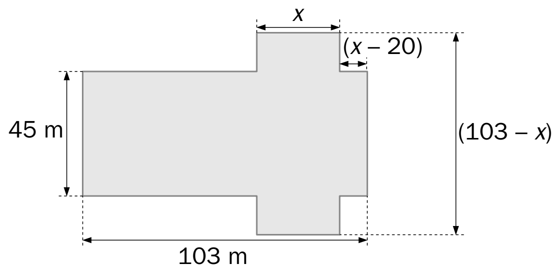
¿Cuál es la expresión algebraica que hace mínimo el trayecto recorrido por Hassan para llegar a la escuela?

Primero, Hassan recorre la diagonal del campo de trigo: $d_1=\sqrt{x^2+y^2}$.

Después, la del campo de centeno: $d_2=\sqrt{y^2+100^2}$.

La distancia total que recorre Hassan es $d=\sqrt{x^2+y^2}+\sqrt{y^2+100^2}$.

7.86. En la fotografía observamos la catedral de Santiago de Compostela. Esta catedral posee una planta en forma de cruz latina como la de la figura.



Expresa el área de dicha planta como una expresión algebraica en *x*.

Dividimos la planta en tres rectángulos (de izquierda a derecha) y calculamos el área de cada uno de ellos.

$A_1 = 45 \cdot [103 - x - (x - 20)] = 45\,(123 - 2x) = 5535 - 90x$

$A_2 = x \cdot (103 - x) = 103x - x^2$

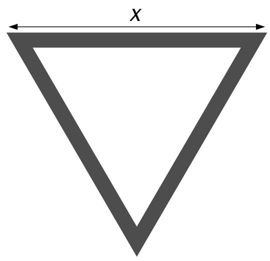
$A_3 = (x - 20) \cdot 45 = 45x - 900$

El área total es $A = A_1 + A_2 + A_3 = 5535 - 90x + 103x - x^2 + 45x - 900 = -x^2 + 58x + 4635$.

7.87. En el código de circulación, las señales en forma de triángulo indican peligro. La señal de ceda el paso solo difiere de un triángulo equilátero en sus vértices, ya que estos están redondeados.

Suponiendo que fuese un triángulo equilátero, expresa el área de la señal si el lado mide *x* centímetros.

$$h = \sqrt{x^2 - \left(\frac{x}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{3x^2}{4}} = \frac{\sqrt{3}x}{2},\quad A = \frac{x \cdot \frac{\sqrt{3}x}{2}}{2} = \frac{\sqrt{3}x^2}{4}$$



7.88. Expresa el área del siguiente trapecio isósceles.

Área de cada triángulo: $h = \sqrt{9 - x^2}$ $A = \dfrac{x\sqrt{9 - x^2}}{2}$. Área del rectángulo: $8 \cdot \sqrt{9 - x^2}$

$$A_T = 2\frac{x\sqrt{9 - x^2}}{2} + 8 \cdot \sqrt{9 - x^2} = (x + 8)\sqrt{9 - x^2}$$

7.89. Partiendo de un rectángulo dado se obtiene otro rectángulo duplicando la longitud de ambos lados.

¿La longitud de la diagonal del nuevo rectángulo también es el doble? Razona la respuesta.

Llamamos a los lados del primer rectángulo *a* y *b*; por el teorema de Pitágoras, su diagonal será $d = \sqrt{a^2 + b^2}$. Los lados del segundo rectángulo serán 2*a* y 2*b*, y su diagonal, $D = \sqrt{4\left(a^2 + b^2\right)} = 2\sqrt{a^2 + b^2} = 2d$, luego la diagonal del nuevo rectángulo es el doble que la diagonal del primero.

AMPLIACIÓN

7.90. Al simplificar la expresión:
$\left(m + 1 + \frac{1}{1-m}\right) : \left(m - \frac{m^2}{m-1}\right)$ **se obtiene:**

a) $\frac{2-m^2}{m^2}$ **b)** $\frac{2-m^2}{m}$ **c)** $\frac{2}{1-m}$ **d)** $\frac{1}{m-1}$

$m + 1 + \frac{1}{1-m} = \frac{2-m^2}{1-m}$, y $m - \frac{m^2}{m-1} = \frac{m}{1-m}$, con lo que la división pedida es $\frac{2-m^2}{m}$.

La respuesta correcta es la b.

7.91. El número $\sqrt{11 - 6\sqrt{2}} + \sqrt{11 + 6\sqrt{2}}$ es igual a:

a) $\sqrt{22}$ **b) 7** **c) 22 – 12** $\sqrt{2}$ **d) 6**

Llamando *a* a dicho número, tenemos que $a^2 = 11 - 6\sqrt{2} + 11 + 6\sqrt{2} + 2\sqrt{121 - 72} = 36$, y como dicho número *a* es positivo, *a* = 6.

La respuesta correcta es la d.

7.92. Si 2*a* < 3*b*, $\sqrt{4a^2 - 12ab + 9b^2}$ es igual a:

a) 2*a* – 3*b* **b) 3*b* – 2*a*** **c) 2*a* + 3*b*** **d) *a* + *b***

$\sqrt{4a^2 - 12ab + 9b^2} = \sqrt{(2a - 3b)^2} = |2a - 3b| = 3b - 2a$, pues 3*b* es mayor que 2*a*.

La respuesta correcta es la b.

7.93. Si $A = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{3}}}{2}$ y $B = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$, entonces:

a) *A* < *B* **b) *A* > *B*** **c) *A* = *B*** **d) *AB* > 1**

Comparemos sus cuadrados: $A^2 = \frac{2 + \sqrt{3}}{4}$, y $B^2 = \frac{8 + 2\sqrt{12}}{4} = \frac{2 + \sqrt{3}}{4} = A^2$, y al ser *A* y *B* números positivos, *A* = *B*.

La respuesta correcta es la c.

7.94. Si $x > y > 0$, ¿cuál de las siguientes expresiones es la misma que $\dfrac{x^y y^x}{y^y x^x}$?

a) $(x-y)^{\frac{y}{x}}$ **b)** $\left(\dfrac{x}{y}\right)^{x-y}$ **c)** $\left(\dfrac{x}{y}\right)^{y-x}$ **d)** $(x-y)^{\frac{x}{y}}$

$$\frac{x^y y^x}{y^y \cdot x^x} = x^{y-x} \cdot y^{x-y} = \left(\frac{x}{y}\right)^{y-x}$$

La respuesta correcta es la c.

7.95. Si $x \geq 0$ e $y \geq 0$, $\sqrt{x^2+y^2} = x+y$ se verifica:

a) Nunca **b) Solo si $x=0$** **c) Solo si $|x+y|=0$** **d)Solo si $xy=0$**

Al ser x e y números no negativos, la igualdad dada es equivalente a $x^2 + y^2 = (x + y)^2$, que es válido solamente si $xy = 0$.

La respuesta correcta es la d.

AUTOEVALUACIÓN

7.1. Reduce a común denominador estas fracciones.

a) $\dfrac{1}{x^2-1}, \dfrac{1}{x+1}, \dfrac{1}{x^2+2x+1}$ **b)** $\dfrac{1}{x-1}, \dfrac{1}{x+2}, \dfrac{1}{x^2+x-2}$

a) $\dfrac{1}{x^2-1} = \dfrac{1}{(x\quad 1)(x+1)} = \dfrac{x+1}{(x+1)^2(x\quad 1)}$

$\dfrac{1}{x^2+2x+1} = \dfrac{1}{(x+1)^2} = \dfrac{x-1}{(x+1)^2(x-1)}$

$\dfrac{1}{x+1} = \dfrac{(x+1)(x-1)}{(x+1)^2(x-1)}$

b) $\dfrac{1}{x-1} = \dfrac{x+2}{(x-1)(x+2)}$

$\dfrac{1}{x+2} = \dfrac{x-1}{(x-1)(x+2)}$

$\dfrac{1}{x^2+x-2} = \dfrac{1}{(x-1)(x+2)}$

7.2. Opera los siguientes radicales.

a) $\sqrt{18x} + \sqrt{50x} - \sqrt{32x} + \sqrt{98x}$

b) $\sqrt{a^3b^3} + \sqrt{ab^3} - 3\sqrt{a^3b^5} + 2\sqrt{ab}$

a) $\sqrt{18x} + \sqrt{50x} - \sqrt{32x} + \sqrt{98x} = \sqrt{9 \cdot 2x} + \sqrt{25 \cdot 2x} - \sqrt{16 \cdot 2x} + \sqrt{49 \cdot 2x} = 11\sqrt{2x}$

b) $\sqrt{a^3b^3} + \sqrt{ab^3} - 3\sqrt{a^3b^5} + 2\sqrt{ab} = \sqrt{a^2b^2ab} + \sqrt{b^2ab} - 3\sqrt{a^2b^4ab} + 2\sqrt{ab} =$
$= (ab + b - 3ab^2 + 2)\sqrt{ab}$

7.3. Realiza estas operaciones con fracciones algebraicas.

a) $\dfrac{3x-2}{x-3}-\dfrac{2x-5}{x^2-9}+\dfrac{2x}{x+3}$ **b)** $\dfrac{x-1}{3x}\cdot\dfrac{5x^2}{x^2-x}:\dfrac{2}{x}$

a) $\dfrac{3x-2}{x-3}-\dfrac{2x-5}{x^2-9}+\dfrac{2x}{x+3}=\dfrac{(3x-2)(x+3)-(2x-5)+2x(x-3)}{x^2-9}=\dfrac{5x^2-x-1}{x^2-9}$

b) $\dfrac{x-1}{3x}\cdot\dfrac{5x^2}{x^2-x}:\dfrac{2}{x}=\dfrac{(x-1)\cdot 5x^2\cdot x}{3x\cdot(x^2-x)\cdot 2}=\dfrac{5x}{6}$

7.4. Escribe dos expresiones radicales equivalentes a la expresión $\sqrt[3]{x^2y}$.

Respuesta abierta, por ejemplo: $\sqrt[6]{x^4y^2}$, $\sqrt[12]{x^8y^4}$

7.5. Simplifica las siguientes fracciones.

a) $\dfrac{x^4+x^3-7x^2-x+6}{x^3+6x^2+11x+6}$ **b)** $\dfrac{x^3+3x^2+3x+2}{x^3-x^2-x-2}$

a) $\dfrac{x^4+x^3-7x^2-x+6}{x^3+6x^2+11x+6}=\dfrac{(x+1)(x-1)(x-2)(x+3)}{(x+3)(x+1)(x+2)}=\dfrac{(x-1)(x-2)}{(x+2)}$

b) $\dfrac{x^3+3x^2+3x+2}{x^3-x^2-x-2}=\dfrac{(x+2)(x^2+x+1)}{(x-2)(x^2+x+1)}=\dfrac{x+2}{x-2}$

7.6. Realiza las siguientes operaciones con expresiones radicales.

a) $\sqrt[5]{xy^4}\cdot\sqrt[5]{x^2y}\cdot\sqrt[5]{xy}$ **b)** $\sqrt[3]{xy}\cdot\sqrt[4]{xy}:\sqrt[6]{xy}$

a) $\sqrt[5]{xy^4}\cdot\sqrt[5]{x^2y}\cdot\sqrt[5]{xy}=\sqrt[5]{xy^4x^2yxy^6}=y\sqrt[5]{x^4y}$

b) $\sqrt[3]{xy}\cdot\sqrt[4]{xy}:\sqrt[6]{xy}=(xy)^{\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\frac{1}{6}}=(xy)^{\frac{5}{12}}=\sqrt[12]{(xy)^5}$

7.7. Halla el valor numérico de estas expresiones.

a) $\dfrac{3x^2y+1}{2x+1}$ **Para $x = 1$ e $y = 2$.** **b)** $\sqrt{\dfrac{2xy-3}{xy}}$ **Para $x = -1$ e $y = -2$.**

a) $\dfrac{3\cdot 1^2\cdot 2+1}{2\cdot 1+1}=\dfrac{7}{3}$ b) $\sqrt{\dfrac{2\cdot(-1)\cdot(-2)-3}{(-1)\cdot(-2)}}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

7.8. Simplifica los siguientes radicales.

a) $\sqrt[12]{a^4b^8c^6}$ **b)** $\sqrt[18]{x^{12}y^{36}c^6}$

a) $\sqrt[12]{a^4b^8c^6}=\sqrt[6]{a^2b^4c^3}$ b) $\sqrt[18]{x^{12}y^{36}c^6}=\sqrt[3]{x^2y^6c}$

PON A PRUEBA TUS COMPETENCIAS

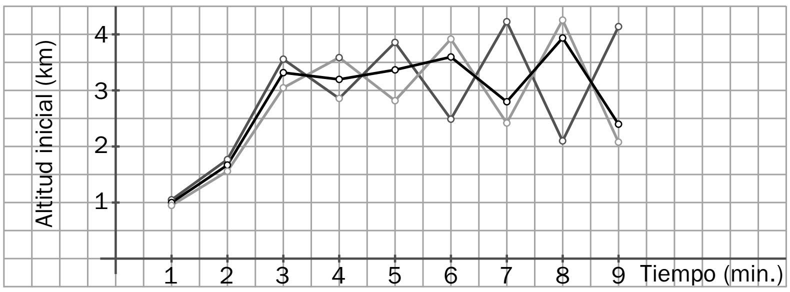
Aplica e interpreta > Turbulencias

El avión se encuentra a 1 kilómetro de altitud y va a intentar subir hasta los 3 kilómetros. Cada minuto que pasa, la altitud del avión viene dada por la expresión $A(x) = \dfrac{3x+2}{x^2-4x+6}$, donde x es la altitud en el minuto anterior. Sin embargo, el altímetro no es exacto, y la altitud inicial podría variar 50 metros arriba o abajo.

7.1. Copia y rellena la tabla indicando la altitud del avión según pasan los minutos, partiendo de la altitud inicial, que puede variar entre 950 y 1050 metros. Para ello, aplica la fracción *A*(*x*) a la altitud en kilómetros del minuto anterior, y redondea en cada paso a dos decimales.

Altitud inicial (km)	Altitud min. 2	Altitud min. 3	Altitud min. 4	Altitud min. 5	Altitud min. 6	Altitud min. 7	Altitud min. 8	Altitud min. 9
1,00	1,67	3,32	3,20	3,37	3,60	2,80	3,94	2,40
0,95	1,56	3,05	3,59	2,82	3,92	2,42	4,26	2,08
1,05	1,77	3,56	2,86	3,86	2,49	4,23	2,10	4,14

7.2. Representa ahora estos datos en una gráfica como la siguiente.



Observa la pequeña variación en la altitud inicial y cómo evoluciona la altitud del avión a los pocos minutos. ¿Qué conclusiones extraes?

Cuando el avión rebasa los 3 km de altitud desciende, y cuando está por debajo de 3 km sube, intentando siempre estabilizarse alrededor de su altitud óptima de 3 km.

7.3. Haz un breve informe sobre lo que has aprendido y preséntalo en clase.

Actividad abierta

Calcula y construye > El regalo de cumpleaños

7.1. Expresa en lenguaje algebraico las dimensiones de la caja, llamando *x* a la longitud de la altura en centímetros.

Altura: x Longitud: $x + 22$ Anchura: $\dfrac{x + x + 22}{2} = x + 11$

7.2. Expresa en lenguaje algebraico las dimensiones de la caja, ahora llamando *y* a la longitud de la arista mayor en decímetros.

Longitud: y Altura: $y - 22$ Anchura: $\dfrac{y + y - 22}{2} = y - 11$

7.3. Calcula en cada caso la longitud de las diagonales de las caras y la de una diagonal de la caja.

Diagonal altura - longitud: $\sqrt{x^2 + (x+22)^2} = \sqrt{2x^2 + 44x + 484}$

Diagonal altura - anchura: $\sqrt{x^2 + (x+11)^2} = \sqrt{2x^2 + 22x + 121}$

Diagonal longitud - anchura: $\sqrt{(x+22)^2 + (x+11)^2} = \sqrt{2x^2 + 66x + 605}$

Diagonal de la caja: $\sqrt{x^2 + (x+22)^2 + (x+11)^2} = \sqrt{3x^2 + 66x + 605}$

En el otro caso:

Diagonal altura - longitud: $\sqrt{y^2 + (y-22)^2} = \sqrt{2y - 44y + 484}$

Diagonal altura - anchura: $\sqrt{(y-22)^2 + (y-11)^2} = \sqrt{2y^2 - 66y + 605}$

Diagonal longitud - anchura: $\sqrt{y^2 + (y-11)^2} = \sqrt{2y^2 - 22y + 121}$

Diagonal de la caja: $\sqrt{y^2 + (y+22)^2 + (y-11)^2} = \sqrt{3y^2 - 66y + 605}$

7.4. Escribe fracciones algebraicas que muestren el cociente entre los lados de cada una de las caras de la caja.

$$\frac{\text{Altura}}{\text{Longitud}} = \frac{x}{x+22};\ \frac{\text{Altura}}{\text{Anchura}} = \frac{x}{x+11};\ \frac{\text{Longitud}}{\text{Anchura}} = \frac{x+22}{x+11}$$

7.5. Determina el valor de las razones halladas anteriormente cuando la altura de la caja es *x* = 8 centímetros.

$$\frac{\text{Altura}}{\text{Longitud}} = \frac{8}{8+22} = \frac{4}{15};\ \frac{\text{Altura}}{\text{Anchura}} = \frac{8}{8+11} = \frac{8}{19};\ \frac{\text{Longitud}}{\text{Anchura}} = \frac{8+22}{8+11} = \frac{30}{19}$$

7.6. Halla la expresión que determina la superficie y el volumen de la caja en función de la altura *x.*

Superficie: $2\left(x\cdot(x+22) + x\cdot(x+11) + (x+22)(x+11)\right) = 2(3x^2 + 66x + 242) = 6x^2 + 132x + 484$

Volumen: $x(x + 22)(x + 11) = x^3 + 33x^2 + 242x$

7.7. Con un cartón rectangular de 70 × 90 centímetros queremos construir la caja más grande posible con esas características. Diseña cómo se ha de cortar y plegar el cartón y las dimensiones de la caja utilizando un cartón, y después pliégala y constrúyela. ¿Cumple todos los requisitos?

Actividad abierta

Observa y reflexiona > Los cuerpos redondos

7.1. Obtén para cada una de ellas la expresión que nos permite calcular el radio.

$r=\frac{L}{\pi}$; $r=\sqrt{\frac{S}{4\pi}}$; $r=\sqrt{\frac{3Vco}{\pi h}}$; $r=\sqrt{\frac{A}{\pi}}$; $r=\sqrt{\frac{Vci}{\pi h}}$; $r=\sqrt[3]{\frac{3Ves}{4\pi}}$

7.2. Si un cono tiene una altura igual al doble del radio y su volumen es igual al de una esfera, ¿cuál es la razón entre los radios del cono y de la esfera?

Cono: Radio, r. Altura, $2r$. Volumen, $\frac{1}{3}\pi r^2 2r=\frac{2\pi}{3}r^3$

Esfera: Radio, R. Volumen, $\frac{4}{3}\pi R^3$

$\frac{2\pi}{3}r^3=\frac{4}{3}\pi R^3$, es decir: $r^3=2R^3$, por lo que $\frac{r}{R}=\sqrt[3]{2}$

7.3. Observa que el radio a veces aparece elevado a 1, a veces al cuadrado y en ocasiones al cubo. ¿A qué se debe esta diferencia? Explícalo con tus palabras en cada caso.

Actividad abierta

Proyecto editorial: **Equipo de Educación Secundaria del Grupo SM**

Autoría: **Rafaela Arévalo, José Luis González, Juan Alberto Torresano**

Edición: **Elena Calvo, Miguel Ángel Ingelmo, Yolanda Zárate**

Corrección: **Ricardo Ramírez**

Ilustración: **Félix Anaya, Modesto Arregui, Juan Francisco Cobos, Domingo Duque, Félix Moreno,**

Diseño: **Pablo Canelas, Alfonso Ruano**

Maquetación: **SAFEKAT S. L.**

Coordinación de diseño: **José Luis Rodríguez**

Coordinación editorial: **Josefina Arévalo**

Dirección del proyecto: **Aída Moya**

Impreso en España – *Printed in Spain*