16 Sucesos aleatorios. Probabilidad

ACTIVIDADES INICIALES

16.I. Las macromoléculas de ADN forman como una doble cadena. ¿Qué forma tienen?

Doble hélice.

16.II. Cada gen funciona como si fuera una palabra larguísima que utiliza solo cuatro letras (A-T-C-G) que se pueden repetir. Construye todos los genes de 1, 2 y 3 letras que se pueden formar con las cuatro anteriores. ¿Te atreves a decir, sin escribirlos, cuántos genes de 4 letras se pueden formar? ¿Y de 5 letras?

1 letra:	A, T, C, G			
2 letras:	AA	AT	AC	AG
	TA	TT	TC	TG
	CA	CT	CC	CG
	GA	GT	GC	GG
3 letras:	Añadir una letra a cada una de las 16 anteriores.			

Entonces habrá $4^2 \cdot 4 = 4^3$ de 3 letras, $4^3 \cdot 4 = 4^4$ de 4 letras y $4^4 \cdot 4 = 4^5$ de 5 letras.

16.III. ¿Crees que es muy probable encontrar dos genes idénticos?

Muy poco probable

16.IV. ¿Qué es el Proyecto Genoma Humano? Investiga las principales controversias y conclusiones que ha producido el proyecto, valóralas y debátelas en clase.

Actividad abierta

ACTIVIDADES PROPUESTAS

16.1. Indica si estos experimentos son aleatorios y, en caso afirmativo, forma el espacio muestral.

a) Se extrae, sin mirar, una carta de una baraja española.

b) Se lanza un dado tetraédrico regular, cuyas caras están numeradas del 1 al 4, y se anota el resultado de la cara oculta.

c) Se mide la longitud del perímetro de un cuadrado de 4 centímetros de lado.

a) Aleatorio. E = {cartas de la baraja española}

b) Aleatorio. $E = \{1, 2, 3, 4\}$

c) No aleatorio

16.2. Expresa el espacio muestral asociado a cada uno de los siguientes experimentos aleatorios.

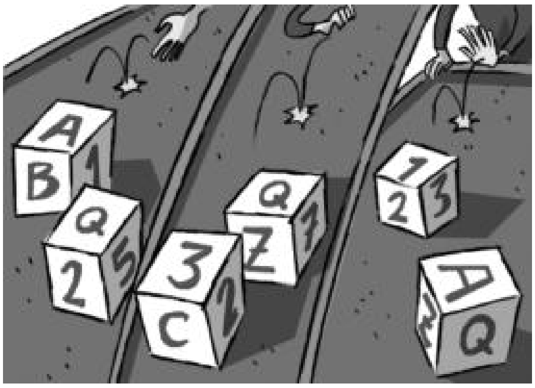
a) Se lanza una moneda y se anota el resultado de la cara superior.

b) Se lanza un dado de quinielas, (que tiene tres caras con un 1, dos caras con una X y una cara con un 2) y se anota el resultado de la cara superior.

c) Se extrae una bola de una urna que contiene 8 bolas numeradas del 1 al 8, y se anota el número de la bola extraída.

a) E = {cara, cruz} b) $E = \{1, X, 2\}$ c) $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$

16.3. Observa los siguientes tres lanzamientos de estos dos dados especiales.



a) ¿Cuál es el espacio muestral asociado al lanzamiento del dado izquierdo? ¿Y el del lado derecho?

b) Expresa el espacio muestral asociado al resultado del lanzamiento de los dos dados a la vez.

a) Izquierdo = {*A*, *B*, *C*, 1, 2, 3}. Derecho = {*A*, *Q*, *Z*, 2, 5, 7}

b) {{*A*, *A*}, {*A*, *Q*}, {*A*, *Z*}, {*A*, 2}, {*A*, 5}, {*A*, 7}, {*B*, *A*}, {*B*, *Q*}, {*B*, *Z*}, {*B*, 2}, {*B*, 5}, {*B*, 7}, {*C*, *A*}, {*C*, *Q*}, {*C*, *Z*}, {*C*, 2}, {*C*, 5}, {*C*, 7}, {1, *A*}, {1, *Q*}, {1, *Z*}, {1, 2}, {1, 5}, {1, 7}, {2, *A*}, {2, *Q*}, {2, *Z*}, {2, 5}, {2, 7}, {3, *A*}, {3, *Q*}, {3, *Z*}, {3, 2}, {3, 5}, {3, 7}}

16.4. Actividad resuelta.

16.5. Se lanza una moneda de un euro y se anota el resultado de la cara superior.

a) Establece los distintos tipos de sucesos.

b) Escribe el espacio de sucesos.

c) Escribe el suceso contrario de "salir cara".

a) Suceso elemental: {cara} o {cruz} Suceso compuesto: {cara, cruz}
Suceso seguro: {cara, cruz} Suceso imposible: $\varnothing$

b) *S* = {$\varnothing$, {cara}, {cruz}, {cara, cruz}}

c) "Salir cruz"

16.6. Se lanza un dado con las caras numeradas del 1 al 6, y se anota el número de la cara superior. Determina estos sucesos y sus contrarios.

a) *A* = "salir un número impar".

b) *B* = "salir un número mayor que 4".

c) *C* = "salir un número mayor que 8".

d) *D* = "salir un número primo"

a) $A = \{1, 3, 5\}$. $\overline{A} = \{2, 4, 6\}$

b) $B = \{5, 6\}$. $\overline{B} = \{1, 2, 3, 4\}$

c) $C = \varnothing$. $\overline{C} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} = E$

d) $D = \{2, 3, 5\}$. $\overline{D} = \{1, 4, 6\}$

16.7. Sean los sucesos *A* = "hace sol" y *B* = "llueve".

a) Escribe el espacio de sucesos. ¿Cuántos elementos tiene?

b) Si se añade el suceso *C* = "nieva", ¿cuántos elementos tiene ahora?

c) Intenta generalizar: ¿cuántos elementos tiene el espacio de sucesos si el espacio muestral tiene *n* elementos?

a) *S* = {$\varnothing$, {sol}, {lluvia}, {sol, lluvia}}

b) *S* = {$\varnothing$, {sol}, {lluvia}, {nieve}, {sol, lluvia}, {sol, nieve}, {nieve, lluvia}, {sol, lluvia, nieve}}

c) 2^n

16.8. Actividad resuelta.

16.9. (TIC) Se realiza un experimento que consiste en lanzar un dado con las caras numeradas del 1 al 6 y anotar el número de la cara superior. Dados estos sucesos: $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{2, 5, 6\}$ y $C = \{3\}$, halla los sucesos:

a) $A \cup B$ b) $A \cap B$ c) $B \cup C$ d) $B \cap C$

a) $A \cup B = \{1, 2, 3, 5, 6\}$

b) $A \cap B = \{2\}$

c) $B \cup C = \{2, 3, 5, 6\}$

d) $B \cap C = \varnothing$

16.10. (TIC) En el experimento de lanzar un dado de 6 caras, considera los sucesos $F = \{2, 4\}$ y $G = \{1, 4, 5, 6\}$.

a) Determina los sucesos contrarios de F y G.

b) Halla $F \cup \overline{F}$, $F \cap \overline{F}$, $G \cup \overline{G}$ y $G \cap \overline{G}$.

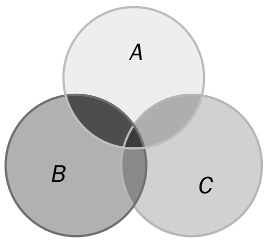
c) Describe $F \cup \overline{G}$, $F \cap G$, $G \cup \overline{F}$ y $G \cap \overline{F}$.

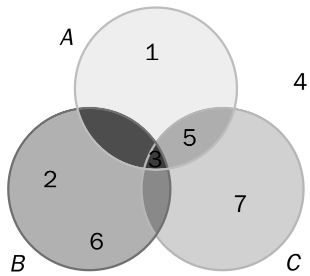
a) $\overline{F} = \{1, 3, 5, 6\}$; $\overline{G} = \{2, 3\}$

b) $F \cup \overline{F} = G \cup \overline{G} = E$; $F \cap \overline{F} = G \cap \overline{G} = \varnothing$

c) $F \cup \overline{G} = \{2,\ 3,\ 4\}$, $F \cap \overline{G} = \{2\}$, $G \cup \overline{F} = \{1,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\}$, $G \cap \overline{F} = \{1,\ 5,\ 6\}$

16.11. Sea el experimento de sacar una bola de una urna con 7 bolas numeradas del 1 al 7, y los sucesos $A = \{1, 3, 5\}$, $B = \{2, 3, 6\}$ y $C = \{3, 5, 7\}$. Sitúa los números 1a 7 en el diagrama de Venn.



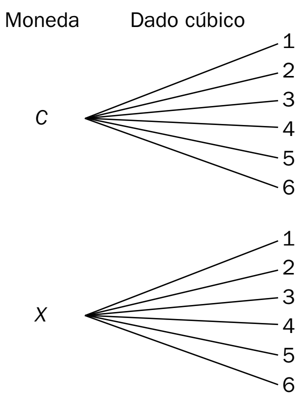


16.12. Actividad interactiva.

16.13. Actividad resuelta.

16.14. Actividad resuelta.

16.15. Se lanzan una moneda y un dado cúbico. Forma el espacio muestral, construyendo previamente el diagrama en árbol.



$E = \{C1, C2, C3, C4, C5, C6, X1, X2, X3, X4, X5, X6\}$

16.16. (TIC) El espacio muestral del lanzamiento de *n* monedas tiene 64 elementos. ¿Cuánto es *n*?

$n = 6$

16.17. (TIC) Se extrae una carta de una baraja española, se lanza un dado tetraédrico y una moneda. ¿Cuántos resultados diferentes se pueden obtener?

Para cada una de las 40 cartas de la baraja hay 4 posibles valores del dado y 2 de la moneda. Podremos obtener $40 \cdot 4 \cdot 2 = 320$ resultados.

16.18. ¿Cuántos resultados diferentes se obtienen al lanzar *n* dados de 12 caras?

12^n resultados

16.19. Actividad resuelta.

16.20. En una clase de 3.º de ESO hay 16 chicas y 14 chicos. Si se escoge uno al azar, halla la probabilidad de que:

a) Sea una chica. **b) Sea un chico.**

a) $\frac{8}{15}$ b) $\frac{7}{15}$

16.21. (TIC) En una caja de caramelos hay 10 de menta, 6 de fresa y 5 de anís. Se escoge uno al azar. Halla la probabilidad de que:

a) Sea de menta. **c) No sea de anís.** **e) No sea de menta.**

b) Sea de fresa. **d) Sea de menta o de fresa.** **f) No sea de anís ni fresa.**

a) $\frac{10}{21}$ b) $\frac{2}{7}$ c) $\frac{16}{21}$ d) $\frac{16}{21}$ e) $\frac{11}{21}$ f) $\frac{10}{21}$

16.22. Determina la probabilidad de que al extraer al azar una carta de una baraja española:

a) Sea un caballo. **c) Sea de espadas.**

b) No sea un caballo. **d) No sea de espadas.**

a) 0,1 b) 0,9 c) 0,25 d) 0,75

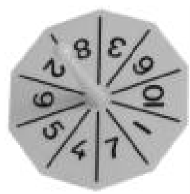
16.23. Inventa un experimento. Define su espacio muestral, un suceso seguro, uno imposible y otro con probabilidad 0,1.

Girar una ruleta decagonal regular numerada del 1 al 10. Suceso seguro = “sacar un número menor de 11”. Suceso imposible = “sacar la A”. Suceso de probabilidad 0,1 = “sacar un 1”.

16.24. Actividad interactiva.

16.25. Actividad resuelta.

16.26. (TIC) Se gira la peonza y se anota el número sobre el que se apoya. Si *A* = “salir número mayor de 3”, *B* = “salir número par” y *C* = “salir múltiplo de 5”, calcula $P(A \cup B)$ y $P(B \cup C)$.



$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0,7 + 0,5 - 0,4 = 0,8$

$P(B \cup C) = P(B) + P(C) - P(B \cap C) = 0,5 + 0,2 - 0,1 = 0,6$

16.27. (TIC) Se lanza un dado octaédrico cuyas caras están numeradas del 1 al 8. Si A = "salir número múltiplo de 3", B = "salir par" y C = "salir impar", calcula $P(A \cup B)$ y $P(B \cup C)$.

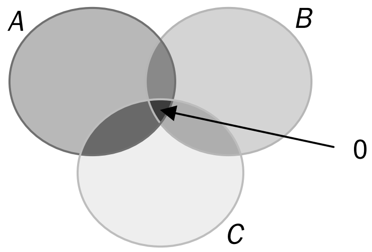
$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{2}{8} + \frac{4}{8} - \frac{1}{8} = \frac{5}{8}$$

$$P(B \cup C) = P(B) + P(C) - P(B \cap C) = \frac{4}{8} + \frac{4}{8} - 0 = 1$$

16.28. La probabilidad de la unión de dos sucesos es 0,8, y la de su intersección, 0,2. ¿Son por fuerza sucesos contrarios?

Como $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$, deducimos que $P(A) + P(B) = 1$, pero no pueden ser contrarios, pues tienen intersección no nula.

16.29. Supón que ahora tienes tres sucesos, A, B y C, que cumplen $A \cap B \cap C = \varnothing$. Deduce la fórmula de $P(A \cup B \cup C)$ ayudándote de un diagrama de Venn.



$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(C \cap B) - P(A \cap C)$$

16.30. Actividad interactiva.

16.31. Actividad resuelta.

16.32. Se lanzan 3 dados cúbicos con las caras numeradas. Halla la probabilidad de obtener:

a) 3 cincos. b) 3 números impares. c) 3 números primos.

a) $\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{216}$ b) $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$ c) $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$

16.33. (TIC) En un juego de ordenador aparecen tres árboles al azar, por ejemplo:

SAUCE – ÁLAMO – PALMERA

Si hay programadas 5 árboles diferentes para cada una de las tres posiciones, calcula la probabilidad de obtener el resultado del ejemplo.

$$\frac{1}{5} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{125}$$

16.34. Dos personas piensan un número del 0 al 9 cada una. Calcula la probabilidad de que no piensen el mismo número.

$$1 - \frac{1}{10} = 0{,}9$$

16.35. (TIC) Dos maestros de ajedrez del mismo nivel se enfrentan ante un tablero. ¿Qué es más probable, ganar dos de cuatro partidas o tres de seis?

Con un diagrama de árbol se observa que $P(\text{ganar 2 de 4}) = \frac{6}{16}$ y $P(\text{ganar 3 de 4}) = \frac{5}{16}$, luego es más probable ganar 2 de 4.

16.36. **Se extraen sucesivamente 2 bolas de una urna que contiene 12 bolas amarillas y 7 bolas negras. Halla la probabilidad de que ambas sean amarillas si la primera bola extraída:**

a) Se devuelve a la urna. **b) No se devuelve a la urna.**

a) $\frac{12}{19}\cdot\frac{12}{19}=0{,}4$ b) $\frac{12}{19}\cdot\frac{11}{18}=0{,}38$

16.37. **En una bolsa hay 10 bolas numeradas del 0 al 9. Se realiza un experimento que consiste en extraer sucesivamente 2 bolas. Halla la probabilidad de que ambas tengan un número impar si la primera bola extraída:**

a) Se devuelve a la bolsa. **b) No se devuelve a la bolsa.**

a) $\frac{5}{10}\cdot\frac{5}{10}=0{,}25$ b) $\frac{5}{10}\cdot\frac{4}{9}=0{,}22$

16.38. **(TIC) En un lote de 100 bolsas de patatas hay tres que llevan premio.**

a) Juan compra cinco bolsas. ¿Cuáles la probabilidad de que obtenga algún premio?

b) A continuación, Inés compra tres bolsas más. ¿Cuál es la probabilidad de que ella obtenga algún premio?

a) $1-\frac{97}{100}\cdot\frac{96}{99}\cdot\frac{95}{98}\cdot\frac{94}{97}\cdot\frac{93}{96}=0{,}144$

b) Si Juan no obtuvo premio, la probabilidad es : $1-\frac{92}{95}\cdot\frac{91}{94}\cdot\frac{90}{93}=0{,}093$.

Si Juan recibió 1 premio, la probabilidad es $1-\frac{93}{95}\cdot\frac{92}{94}\cdot\frac{91}{93}=0{,}062$.

Si Juan obtuvo 2 premios, es $1-\frac{94}{95}\cdot\frac{93}{94}\cdot\frac{92}{93}=0{,}032$.

Y si Juan se llevó los 3 premios, la probabilidad es 0.

16.39. **Un dado se ha lanzado 20 veces y se ha obtenido 9 veces la cara 6. Después se ha lanzado 10 000 veces y se ha obtenido 1 650 veces la cara 6.**

a) ¿Crees que el dado está trucado?

b) ¿Qué probabilidad asignarías al suceso “obtener la cara 6”?

c) ¿En cuánto difiere de la probabilidad teórica?

a) No

b) $\frac{1650}{10\,000}=0{,}165$

c) $\frac{1}{6}=0{,}167$ difiere en 0,002.

16.40. **(TIC) Con ayuda de una calculadora, elige 8 números del 0 al 99. Explica detalladamente el proceso que has seguido.**

Ejercicio libre. Se obtiene un número aleatorio (entre 0 y 1) usando la tecla RAN de la calculadora. Se multiplica por 100 dicho número. Se suprime la parte decimal.

16.41. **(TIC) Simula con la calculadora el resultado de una quiniela de 15 partidos.**

Respuesta abierta

16.42. **Actividad interactiva.**

EJERCICIOS

Experimentos y sucesos aleatorios

16.43. Indica cuáles de los siguientes experimentos son aleatorios.

a) Número de personas que suben a un autobús en una parada.

b) Aplicar el teorema de Pitágoras en un triángulo rectángulo.

c) Conocer el ganador de la Liga de Campeones.

d) Calcular la raíz cuadrada de un número.

a) Aleatorio b) No aleatorio c) Aleatorio d) No aleatorio

16.44. Se considera el experimento aleatorio consistente en sacar una bola de una urna en la que hay 9 bolas numeradas del 1 al 9. Determina:

a) El espacio muestral.

b) El suceso *A* = "sacar un número par".

c) El suceso *B* = "sacar un número mayor que 3".

d) Los sucesos $A \cup B$ y $A \cap B$. ¿Son *A* y *B* incompatibles?

e) El suceso contrario de *B*.

a) $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ b) $A = \{2, 4, 6, 8\}$ c) $B = \{4, 5, 6, 7, 8, 9\}$

d) $A \cup B = \{2, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, $A \cap B = \{4, 6, 8\}$, *A* y *B* no son incompatibles.

e) $\overline{B} = \{1, 2, 3\}$

16.45. Se lanza un dado cúbico. Indica los sucesos elementales que forman cada uno de estos sucesos.

a) Sacar un múltiplo de 3.

b) Sacar un número menor que 4.

c) Sacar un 0.

d) Sacar un número primo mayor que 3.

e) Sacar un número menor que 7.

a) $A = \{3, 6\}$

b) $B = \{1, 2, 3\}$

c) Suceso imposible: $\varnothing$

d) $D = \{5\}$

e) Suceso seguro: $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

16.46. Se extrae una carta de una baraja española de 40 cartas y se consideran los sucesos:

***A* = "sacar una copa"; *B* = "sacar un rey"; *C* = "sacar una carta menor que 5".**

Determina estos sucesos.

a) $A \cup B$, $A \cup C$ y $B \cup C$.

b) $A \cap B$, $A \cap C$ y $B \cap C$.

c) $A \cup B \cup C$ y $A \cap B \cap C$.

d) El suceso contrario de *C*.

e) El suceso contrario de $A \cup B$.

a) $A \cup B$ = "sacar una copa o un rey"; $A \cup C$ = "sacar una copa o una carta menor que 5"; $B \cup C$ = "sacar un rey o una carta menor que 5".

b) $A \cap B$ = "sacar el rey de copas"; $A \cap C$ = "sacar una copa menor que 5"; $B \cap C$ es un suceso imposible.

c) $A \cup B \cup C$ = "sacar una copa o un rey, o una carta menor que 5"; $A \cap B \cap C$ es un suceso imposible.

d) $\overline{C}$ = "sacar una carta mayor que 4".

e) $\overline{A \cup B}$ = "no sacar ni una copa ni un rey".

16.47. a) ¿Dos sucesos contrarios son incompatibles?

b) ¿Dos sucesos incompatibles son contrarios?

c) ¿La unión de un suceso y su contrario es el espacio muestral?

a) Los sucesos contrarios son siempre incompatibles porque no se pueden dar a la vez.

b) Dos sucesos incompatibles no tienen por qué ser contrarios. Por ejemplo, ser hombre es incompatible con tener un embarazo, pero los dos sucesos no son contrarios.

c) Sí

16.48. ¿El suceso intersección de dos sucesos contrarios es el suceso imposible?

Sí, porque $P(A \cap \overline{A}) = 0$

Técnicas de recuento

16.49. (TIC) Un experimento consiste en lanzar sucesivamente una moneda y un dado octaédrico regular. ¿Cuántos resultados posibles tiene este experimento? Utiliza un diagrama en árbol para orientarte.

Resultados posibles: 12. $E = \{C1, C2, C3, C4, C5, C6, C7, C8, X1, X2, X3, X4, X5, X6, X7, X8\}$

16.50. (TIC) Sonia tiene 2 pantalones de deporte, 4 camisetas y 3 pares de zapatillas. ¿De cuántas formas distintas se puede vestir para hacer ejercicio?

Resultados posibles: $2 \cdot 4 \cdot 3 = 24$

16.51. Con las letras de la palabra ROMA se forman todas las palabras posibles de cuatro letras, tengan o no sentido, sin repetir ninguna. ¿Cuántos resultados distintos podemos obtener?

Resultados posibles: $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$

16.52. ¿Cuántos números de dos dígitos se pueden escribir utilizando los dígitos {2, 4, 6, 8}?

Resultados posibles: $4 \cdot 4 = 16$

16.53. (TIC) Considera los números de 5 cifras.

a) ¿Cuántos son capicúas?

b) ¿Cuántos son impares?

c) ¿Cuántos tienen las cinco cifras distintas?

d) ¿Cuántos son pares, capicúas y mayores de 50 000?

a) $9 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 1 \cdot 1 = 900$

b) $\dfrac{9 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10}{2} = 45\,000$

c) $9 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 = 27\,216$

d) $2 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 1 \cdot 1 = 200$

Probabilidad de sucesos

16.54. Se extrae una bola de una bolsa que contiene 4 bolas blancas, 5 rojas y 2 negras. ¿Cuál es la probabilidad de que no sea negra?

$$\frac{4}{11} + \frac{5}{11} = \frac{9}{11}$$

16.55. **Calcula la probabilidad de obtener un as o un oro al extraer una carta de una baraja española.**

$$\frac{4}{40}+\frac{10}{40}-\frac{1}{40}=\frac{13}{40}$$

16.56. **Una urna contiene 8 bolas rojas, 5 verdes y 9 azules. Determina la probabilidad de que al extraer una bola al azar:**

a) **Sea verde.** **b)** **Sea roja o azul.**

a) $\frac{5}{22}$ b) $\frac{17}{22}$

16.57. **Calcula la probabilidad de *A*, sabiendo que 2 · *P*(*A*) + *P*($\overline{A}$) = 1,4.**

$$\left.\begin{array}{l} 2\cdot P(A)+P(\overline{A})=1{,}4 \\ P(A)+P(\overline{A})=1 \end{array}\right\} \Rightarrow P(A)=0{,}4$$

16.58. **Elegida una persona al azar, calcula la probabilidad de que la última cifra de su DNI sea:**

a) **El 8.** **b)** **Un número par.** **c)** **Un múltiplo de 4.** **d)** **Un número primo.**

a) 0,1 b) 0,5 c) 0,3 d) 0,4

16.59. **En una urna hay 30 bolas numeradas del 1 al 30. Se extrae una bola al azar. Calcula la probabilidad de que la bola extraída:**

a) **Sea un número par.** **c)** **Sea un múltiplo de 5.**

b) **Sea un número que termina en 0.** **d)** **No sea un múltiplo de 3.**

a) 0,5 b) 0,1 c) 0,2 d) $\frac{2}{3}$

16.60. **(TIC) Se elige al azar una carta de la baraja española de 40 cartas. Halla la probabilidad de que la carta:**

a) Sea un rey. **c)** **Sea una copa.** **e)** **Sea un rey o una copa.**

b) No sea un rey. **d)** **Sea el rey de copas.** **f)** **Sea un rey y no sea copa.**

a) 0,1 b) 0,9 c) 0,25 d) $\frac{1}{40}$ e) $\frac{13}{40}$ f) $\frac{3}{40}$

16.61. **En una caja hay 2 bolas negras, 4 azules y 3 verdes. Calcula la probabilidad de que al extraer una bola al azar:**

a) **Sea negra.** **c)** **No sea roja.** **e)** **No sea azul.**

b) **Sea negra o azul.** **d)** **Sea roja.** **f)** **Sea azul y negra.**

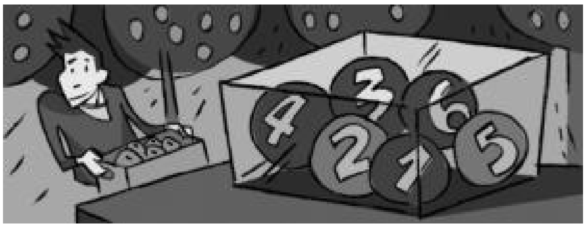
a) $\frac{2}{9}$ b) $\frac{2}{3}$ c) 1 d) 0 e) $\frac{5}{9}$ f) 0

16.62. **Calcula la probabilidad de que la última cifra de un número de teléfono sea:**

a) **Un 7.** **b)** **Un múltiplo de 3.** **c)** **Mayor que 5.** **d)** **Menor que 2.**

a) 0,1 b) 0,4 c) 0,4 d) 0,2

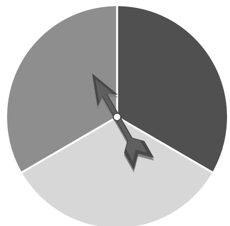
16.63. Se saca una bola de la urna de la figura.



Copia y completa la siguiente tabla.

Suceso	Resultados favorables	Probabilidad
Sea azul	**{1, 3, 4, 6}**	$\frac{4}{6}$
Sea par	{2, 4, 6}	$\frac{1}{2}$
Sea naranja impar	{5}	$\frac{1}{6}$
Sea naranja	{2, 5}	$\frac{1}{3}$

16.64. Calcula la probabilidad de que al hacer girar la ruleta, se pare en uno de estos colores.



a) Rojo **c) Azul o rojo**

b) Amarillo **d) Verde**

a) $\frac{1}{3}$ b) $\frac{1}{3}$ c) $\frac{2}{3}$ d) 0

16.65. Se lanza un dado y se consideran estos sucesos:

***A* = "sacar un número par", *B* = "sacar un número menor que 3", *C* = "sacar un 5".**

Forma los siguientes sucesos y halla su probabilidad.

a) $A \cup B$ **b)** $A \cap B$ **c)** $A \cup B \cup C$ **d)** $B \cup C$ **e)** $A \cap C$ **f)** $A \cap (B \cup C)$

a) $A \cup B = \{1, 2, 4, 6\}$, $P = \frac{2}{3}$

b) $A \cap B = \{2\}$, $P = \frac{1}{6}$

c) $A \cup B \cup C = \{1, 2, 4, 5, 6\}$, $P = \frac{5}{6}$

d) $B \cup C = \{1, 2, 5\}$, $P = \frac{1}{2}$

e) $A \cap C = \varnothing$, $P = 0$

f) $A \cap (B \cup C) = \{2\}$, $P = \frac{1}{6}$

16.66. El dominó es un juego en el que la cara superior de las fichas está dividida en dos cuadrados, cada uno de los cuales lleva marcados de 0 a 6 puntos.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que, elegida una ficha al azar, la suma de sus puntos sea 12?

b) ¿Y de que sea 5?

c) ¿Y de que no aparezca el 6 en uno de los cuadrados?

a) 7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 28 fichas en total. Casos favorables (6-6) $\Rightarrow P(B) = \frac{1}{28}$

b) Casos favorables (0-5), (1-4), (2-3) $\Rightarrow P(C) = \frac{3}{28}$ c) $P(D) = \frac{21}{28}$

16.67. Sean A y B dos sucesos tales que $P(A) = 0{,}3$ y $P(B) = 0{,}2$. ¿Es posible que $P(A \cup B) = 0{,}6$?

No, porque $0{,}6 = 0{,}3 + 0{,}2 - P(A \cap B) \Rightarrow P(A \cap B) = -0{,}1$, y la probabilidad de cualquier suceso no puede ser negativa.

16.68. ¿Puede ocurrir que $P(M) = 0{,}4$, $P(N) = 0{,}6$, $P(M \cup N) = 0{,}7$ y $P(M \cap N) = 0{,}2$?

No, puesto que $0{,}7 \neq 0{,}4 + 0{,}6 - 0{,}2$

16.69. Si A y B son sucesos incompatibles tales que $P(A \cup B) = 1$, ¿cómo son A y B?

Contrarios, pues $P(A \cap B) = 0$, luego $P(A \cup B) = P(A) + P(B) = 1$, esto es, $P(A) = 1 - P(B)$.

16.70. Si A y B son dos sucesos tales que $P(A) = \frac{1}{2}$, $P(B) = \frac{2}{3}$ y $P(A \cap \overline{B}) = \frac{1}{5}$, calcula $P(A \cup B)$.

A es la unión de dos sucesos incompatibles:

$A = (A \cap B) \cup (A \cap \overline{B}) \Rightarrow P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap \overline{B}) \Rightarrow P(A \cap B) = P(A) - P(A \cap \overline{B})$

Entonces, $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{2}{3} + \frac{1}{5} = \frac{13}{15}$

16.71. En una caja hay un número desconocido de bolas blancas y una bola negra. Se extraen de la caja simultáneamente dos bolas al azar. Si la probabilidad de que ambas sean blancas es 0,5, calcula el número de bolas blancas que hay en la caja.

Sea x el número de bolas blancas.

$P(B_1 \cap B_2) = \frac{x}{x+1} \cdot \frac{x-1}{x} = \frac{x-1}{x+1} = 0{,}5 \Rightarrow x = 3$

16.72. En un hospital se junta un grupo de personas.

	Donante	No donante
Hombre	8	4
Mujer	12	6

Halla la probabilidad de que al elegir una persona al azar sea:

a) Hombre.
b) No donante.
c) Mujer donante.
d) No donante, sabiendo que es hombre.

a) $\frac{12}{30} = \frac{2}{5}$ b) $\frac{10}{30} = \frac{1}{3}$ c) $\frac{12}{30} = \frac{2}{5}$ d) $\frac{4}{12} = \frac{1}{3}$

Experimentos compuestos

16.73. Calcula la probabilidad de que, al sacar sucesivamente dos cartas de una baraja española, las dos sean caballo.

a) Si se devuelve al mazo la primera.
b) Si no se devuelve.

a) $0{,}1 \cdot 0{,}1 = 0{,}01$

b) $\frac{4}{40} \cdot \frac{3}{39} = \frac{1}{130}$

16.74. Una bolsa contiene 4 bolas rojas, 3 azules y 2 verdes. Se extraen, sin devolución, 2 bolas de la bolsa. Calcula la probabilidad de que:

a) Las dos bolas extraídas sean rojas.
b) Ninguna bola extraída sea verde.

a) $\frac{4}{9} \cdot \frac{3}{8} = \frac{1}{6}$

b) $\frac{7}{9} \cdot \frac{6}{8} = \frac{7}{12}$

16.75. En una clase de 3.º de ESO hay 12 chicas y 16 chicos. Se eligen dos personas al azar. Calcula la probabilidad de que:

a) Ambas sean chicas. **b) Sean chica y chico.**

a) $\frac{12}{30} \cdot \frac{11}{29} = \frac{66}{435} = \frac{22}{145}$

b) $\frac{12}{30} \cdot \frac{16}{29} + \frac{16}{30} \cdot \frac{12}{29} = \frac{64}{145}$

16.76. Se lanza una moneda 3 veces. Calcula la probabilidad de los siguientes sucesos.

a) Sacar 3 cruces. **b) Obtener al menos una cara.**

a) $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$

b) Es el suceso contrario a que salgan todas cruces, de probabilidad $\frac{7}{8}$.

16.77. Cristina lanza 2 dados. Halla la probabilidad de que la suma de sus puntos sea 9.

Casos favorables: (3, 6), (4, 5), (5, 4), (6, 3). La probabilidad es de $\frac{4}{36} = \frac{1}{9}$.

16.78. En una urna hay 5 bolas blancas y 4 negras. Se saca una bola y, sin devolverla a la urna, se saca otra. Calcula la probabilidad de que:

a) Sean de distinto color.

b) Ambas sean blancas.

c) Sean del mismo color.

d) Sean de distinto color, considerando que ha habido devolución a la urna de la bola extraída.

a) $\frac{5}{9} \cdot \frac{4}{8} + \frac{4}{9} \cdot \frac{5}{8} = \frac{5}{9}$

b) $\frac{5}{9} \cdot \frac{4}{8} = \frac{5}{18}$

c) $\frac{5}{9} \cdot \frac{4}{8} + \frac{4}{9} \cdot \frac{3}{8} = \frac{4}{9}$

d) $\frac{5}{9} \cdot \frac{4}{9} + \frac{4}{9} \cdot \frac{5}{9} = \frac{40}{81}$

Probabilidad experimental y simulación

16.79. Una señora está esperando un hijo. Se desea buscar de forma simulada la probabilidad de que sea una niña. ¿Cuáles de los siguientes experimentos son válidos para la simulación de dicha probabilidad? ¿Por qué?

a) Lanzar un dado; si sale par, representa un niño, y si sale impar, una niña.

b) Meter en una urna 3 bolas verdes y 4 rojas. Si sale una bola verde, representa un niño, y si sale roja, una niña.

c) Tirar una moneda al aire. Si sale cara, representa un niño, y si sale cruz, una niña.

La a y la, c por ser las que se aproximan a la probabilidad teórica, que es 0,5.

16.80. ¿De qué depende el que sea mínima la diferencia entre el resultado que se obtiene al realizar una experiencia de simulación y la probabilidad teórica del suceso estudiado?

Si la simulación está bien planteada, cuanto mayor sea el número de veces que se realice dicha simulación, más cercano estará el resultado experimental y el teórico.

PROBLEMAS

16.81. En una familia con 3 hijos se consideran los siguientes sucesos.

***A* = "El hijo mayor es un chico"** **B = "Los dos hijos pequeños son chicas"**

C = "Al menos uno de los hijos es chico"

a) ¿Son *A* y *B* independientes?

b) ¿Son *B* y C incompatibles?

c) ¿Cuál es el suceso contrario de *C*?

a) Sí, el sexo del hijo mayor no condiciona el de los dos pequeños.
b) No, el mayor puede ser chico.
c) "Todos los hijos son chicas".

16.82. Se lanza una moneda 2 veces. Calcula la probabilidad de estos sucesos.

a) Salir dos cruces. **b) Salir al menos una cara.**

a) $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$

b) Es el suceso contrario al anterior, de probabilidad $\frac{3}{4}$.

16.83. Calcula la probabilidad de que, al lanzar 2 dados, la suma de puntos que se consigue sea siete.

Casos posibles: 36; casos favorables: (1, 6), (2, 5), (3, 4), (4, 3), (5, 2), (6, 1). La probabilidad es de $\frac{6}{36} = \frac{1}{6}$.

16.84. Se lanza un dado. Determina la probabilidad de que haya salido un 2, sabiendo que ha salido un número menor que 5.

$\frac{1}{4}$

16.85. (TIC) Considera los números de tres cifras. ¿Cuál es la probabilidad de que, elegido uno al azar, sus 3 dígitos sean distintos?

Casos posibles: $9 \cdot 10 \cdot 10 = 900$; casos favorables: $9 \cdot 9 \cdot 8 = 648$. La probabilidad es de $\frac{648}{900} = \frac{18}{25}$.

16.86. ¿De cuántas formas diferentes se pueden rellenar los 15 partidos de una quiniela con 1, *X*, 2?

3^{15}

16.87. En un concesionario hay 4 coches de la marca *A*, de los cuales 2 son negros, y 6 coches de la marca *B*, de los cuales 4 son negros. Calcula la probabilidad de que al elegir un coche al azar:

a) Sea de la marca *A*. **d) Sea de la marca *B*, pero no negro.**

b) Sea negro. **e) Sabiendo que es negro, sea de la marca *B***

c) Sea negro de la marca *A*. **f) Sabiendo que es de la marca *A*, sea negro.**

a) $\frac{2}{5}$ b) $\frac{3}{5}$ c) $\frac{1}{5}$ d) $\frac{1}{5}$ e) $\frac{2}{3}$ f) $\frac{1}{2}$

16.88. En una nevera hay 6 tomates verdes, 4 tomates rojos, 3 limones y 5 naranjas. Se saca una pieza al azar. Halla la probabilidad de:

a) Sacar un tomate verde.

b) No sacar un tomate.

c) Sabiendo que es un tomate, que sea rojo.

a) $\frac{1}{3}$ b) $\frac{8}{18} = \frac{4}{9}$ c) $\frac{2}{5}$

16.89. (TIC) Un bombo tiene 3 bolas numeradas del 1 al 3, y un segundo bombo tiene 5 bolas numeradas del 1 al 5. Se saca una bola del primer bombo y, a continuación, una bola del segundo. Calcula la probabilidad de que salga:

a) El número 34. **b) Un número mayor que 15.** **c) Un número menor que 30.**

a) $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{15}$ b) $\frac{2}{3} \cdot \frac{5}{5} = \frac{2}{3}$ c) $\frac{2}{3} \cdot \frac{5}{5} = \frac{2}{3}$

16.90. En la Lotería Primitiva se extraen de un bombo bolas numeradas del 1 al 49. Se extrae la primera bola.

a) ¿Es más probable que acabe en 5 o en 0?

b) ¿Es más probable que sea un número par o que sea menor que 24?

c) ¿Es más probable que sea un número de dos cifras que empiece por 3 o que sea un número múltiplo de 3?

a) En 5, pues $P(5) = \frac{5}{49}$ y $P(0) = \frac{4}{49}$

b) Par, pues $P(P) = \frac{24}{49}$ y $P(A) = \frac{23}{49}$

c) Es más probable que sea múltiplo de tres, pues $P(A) = \frac{10}{49}$ y $P(B) = \frac{16}{49}$.

16.91. (TIC) En una bolsa hay 6 monedas de 50 céntimos, 4 de un euro y 5 de dos euros. Se extrae una moneda al azar y, sin devolverla a la bolsa, se extrae una segunda moneda. Calcula la probabilidad de sacar en total:

a) Cuatro euros. **b) Más de un euro.** **c) Menos de cuatro euros.**

a) Es el suceso "las dos monedas sean de 2 €", $P(A) = \frac{5}{15} \cdot \frac{4}{14} = \frac{2}{21}$.

b) Es el suceso contrario a "las dos monedas son de 50 céntimos", $1 - \frac{6}{15} \cdot \frac{5}{14} = \frac{6}{7}$.

c) Es el suceso contrario al del apartado a de probabilidad $\frac{19}{21}$.

AMPLIACIÓN

16.92. En una urna hay 3 bolas marcadas con 1, 2 y 3. Se saca una bola, se anota su número y se devuelve a la urna. Si se realiza tres veces este proceso y la suma de los tres números anotados es 6, ¿cuál es la probabilidad de que haya salido las tres veces la bola marcada con el número 2?

a) $\frac{1}{27}$ **b)** $\frac{1}{8}$ **c)** $\frac{1}{7}$ **d)** $\frac{1}{6}$

Las distintas posibilidades para que la suma sea 6 vienen dadas por 1, 2 y 3 en cualquier orden o 2, 2, 2. Como en total hay 7 alternativas, todas igualmente probables, la probabilidad de que las tres veces la bola marcada sea un 2 es de $\frac{1}{7}$.

16.93. En una clase, se elige al azar un estudiante para presentarlo al ministro de Educación. Si la probabilidad de que el estudiante sea un chico es dos tercios de la probabilidad de que sea chica, el cociente entre el número de chicos y el total de esa clase es:

a) $\frac{1}{3}$ **b)** $\frac{2}{5}$ **c)** $\frac{1}{2}$ **d)** $\frac{2}{3}$

Siendo a el número de chicos y b el de chicas, nos dicen que $\frac{a}{a+b}=\frac{2}{3}\cdot\frac{b}{a+b}$, es decir, $a=\frac{2}{3}b$, por lo que 3a = 2b, con lo que $\frac{a}{a+b}=\frac{2}{5}$.

16.94. María escoge al azar dos números diferentes del conjunto {1, 2, 3, 4, 5} y Esteban uno del conjunto {1, 2, 3, …, 10}. ¿Cuál es la probabilidad de que el número de Esteban sea mayor que la suma de los dos números que sacó María?

a) $\frac{2}{5}$ **b)** $\frac{9}{20}$ **c)** $\frac{1}{2}$ **d)** $\frac{11}{20}$

María tiene 10 posibilidades de elegir sus parejas, y Esteban, otras 10, lo que hace un total de 100 casos posibles. De ellos, en 40 casos gana Esteban; así pues, la probabilidad es de $\frac{2}{5}$.

16.95. ¿Cuál es la probabilidad de que un divisor de 60, elegido al azar, sea menor que 7?

a) $\frac{1}{10}$ **b)** $\frac{1}{6}$ **c)** $\frac{1}{4}$ **d)** $\frac{1}{2}$

Los divisores de 60 son 1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30 y 60, es decir, un total de 12, de los cuales 6 son menores que 7. La probabilidad es de $\frac{1}{2}$.

AUTOEVALUACIÓN

16.A1. Indica cuáles de los siguientes experimentos son aleatorios.

a) El resultado de un partido de baloncesto.

b) El lanzamiento de un dado.

c) El cálculo de la superficie de un triángulo.

d) El precio de una llamada de teléfono.

a) Aleatorio b) Aleatorio c) No aleatorio d) No aleatorio

16.A2. En un experimento aleatorio que consiste en sacar una carta de una baraja española se consideran los siguientes sucesos:

***A* = "sacar un rey". *B* = "sacar una copa". *C* = "sacar un número menor que 3".**

Determina estos sucesos.

a) El contrario de *C*. **b)** $A \cup B$ **c)** $B \cap C$ **d)** $A \cap C$

a) $\overline{C}$ = "sacar un número mayor o igual que 3".

b) $A \cup B$ = "sacar un rey o una copa".

c) $B \cap C$ = "sacar el 1 o el 2 de copas".

d) $A \cap C$ es el suceso imposible.

16.A3. Se lanza un dado cúbico. Calcula la probabilidad de obtener:

a) 6. **b) Más que 4.** **c) Menos que 7.** **d) 2 ó 3.**

a) $\frac{1}{6}$ b) $\frac{1}{3}$ c) 1 d) $\frac{1}{3}$

16.A4. Si *A* y *B* son dos sucesos tales que *P*(A) = 0,4, $P(\overline{B}) = 0{,}3$ y $P(A \cap B) = 0{,}2$, calcula $P(A \cup B)$.

$P(B) = 1 - P(\overline{B}) = 1 - 0{,}3 = 0{,}7 \Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0{,}4 + 0{,}7 - 0{,}2 = 0{,}9$

16.A5. ¿Cuántos números de tres cifras se pueden formar con los dígitos {1, 3, 5}? ¿Cuántos tienen las tres cifras distintas?

Se forman 3 · 3 · 3 = 27 números, de los cuales 3 · 2 · 1 = 6 son distintos.

16.A6. ¿Cuál es la probabilidad de que, al extraer dos cartas de una baraja española, ambas sean oros?

a) Si la primera se devuelve al mazo. **b) Si no se devuelve.**

a) $\frac{10}{40} \cdot \frac{10}{40} = \frac{1}{16}$

b) $\frac{10}{40} \cdot \frac{9}{39} = \frac{9}{156} = \frac{3}{52}$

PON A PRUEBA TUS COMPETENCIAS

Aprende a pensar > La probabilidad de ser mujer

Fíjate en los siguientes datos de las Naciones Unidas (2009) sobre hombres y mujeres:

El número total de mujeres en el mundo es de 3386 millones, mientras que el número de hombres asciende a 3442 millones.

En ningún país democrático el número de mujeres en el parlamento llega al 50%; el más cercano es Suecia, con un 46% de parlamentarias, y en muchos países no hay ninguna.

En la mitad de los países del mundo, la tasa de analfabetismo de las mujeres es superior a la de los hombres, tanto en jóvenes como en adultos.

16.1. Suponiendo que ha nacido un bebé, dibuja el diagrama de árbol del suceso *A* = "es niño" y *B* = "es niña". ¿Son sucesos complementarios? ¿Son equiprobables?

$x \langle \begin{matrix} xx \\ xy \end{matrix}$ $\quad A: \{(x,\ x),(x,\ x)\}$

$x \langle \begin{matrix} xx \\ xy \end{matrix}$ $\quad B: \{(x,\ y),(x,\ y)\}$

Son sucesos complementarios y equiprobables.

16.2. Cuenta el número de chicos y chicas en tu clase o en tu centro. ¿La frecuencia relativa es de un 50%? Si no es así, ¿a qué atribuyes la diferencia?

Actividad abierta

16.3. Utilizando los datos de la ONU, calcula ahora la probabilidad experimental de ser mujer en el mundo. ¿En cuánto difiere de la probabilidad teórica?

$P(\text{mujer}) = \frac{3386}{6828} = 0{,}496$, que difiere de 0,5 en 0,004.

16.4. Teniendo en cuenta que los datos de la ONU se refieren al número de adultos, y que la probabilidad teórica se refiere al sexo del niño al nacer, ¿crees que la diferencia es debida al azar, o que puede haber otros factores que influyan? Si es así, ¿cuáles?

Uno de los factores de que haya menos hombres que mujeres es el mayor número de muertos entre los hombres, debido, principalmente, a las guerras.

16.5. Como sabes, en una sociedad democrática el parlamento debe representar a la población. Siendo así, ¿a qué crees que se debe que el porcentaje de parlamentarias sea inferior al 50% en todos los países?

Actividad abierta

16.6. Comenta tu opinión sobre la diferencia en la tasa de analfabetismo entre hombres y mujeres. ¿Crees que está relacionada con el papel que las niñas cumplen en los países más pobres?

Actividad abierta

16.7. Entra en www.e-sm.net/3esoz65, busca tres datos concretos en los que la probabilidad experimental difiera de la teórica e intenta explicar a qué se debe la diferencia.

Actividad abierta

Juega y deduce > El juego de los chinos

Pueden participar tantos jugadores como quieran y cada uno de ellos dispone de tres "chinos" (monedas, piedras o los mismos dedos). Todos los jugadores sacarán a la vez un cierto número de chinos en la mano cerrada (0, 1, 2 ó 3) y, por orden, tratarán de adivinar el número total de chinos que hay.

16.1. Si hay solo dos jugadores, ¿cuáles son los posibles resultados de una jugada?
0, 1, 2, 3, 4, 5, 6

16.2. ¿Crees que es importante tener en cuenta los chinos que tienes en tu mano?

Naturalmente que es importante a la hora de decir la suma entre los dos.

16.3. ¿Cuál de los resultados posibles crees que es más probable?

Calculemos en cuántas ocasiones se da cada uno de ellos:

0 $\rightarrow$ 1 (0, 0); 1 $\rightarrow$ 2 (0, 1) y (1, 0); 2 $\rightarrow$ 3 (0, 2), (1, 1), (2, 0); 3 $\rightarrow$ 4 (0, 3), (1, 2), (2, 1), (3, 0);
4 $\rightarrow$ 3 (1, 3), (2, 2), (3, 1); 5 $\rightarrow$ 2 (2, 3), (3, 2); 6 $\rightarrow$ 1 (3, 3)

Como todas las parejas tienen igual probabilidad de aparecer, el resultado más probable es "3".

16.4. Si puedes elegir, ¿qué prefieres?, ¿ser el primero en hablar o esperar a que hable tu contrincante?

Respuesta abierta, pero el primero que hable puede pedir 3, que es lo más probable.

16.5. Si llevas 3 chinos en la mano y hablas tú primero, ¿sería muy prudente decir 6 en total? ¿Por qué?

No, pues si le digo 6, él ya sabe que llevo 3.

16.6. Argumenta por qué el primero de los dos debe decir siempre 3, tenga en su mano las que tenga.

Porque al decir 3, no da ninguna pista de qué no puede llevar. Diciendo cualquier otro número, puede el rival deducir qué no puede llevar quien habló.

16.7. Juega con otros tres compañeros varias partidas y comprueba cuál es la suma que más veces sale.

Actividad abierta

Elabora estrategias > Monedas, cajas y canicas

Ana, Daniel y Jorge están diseñando un juego de azar con el siguiente material cada uno:

- **Dos cajas vacías (C_1 y C_2).**
- **Una moneda.**
- **8 canicas, 4 de ellas blancas (*B*) y las otras 4 negras (*N*).**

Deberán repartir las 8 canicas entre las dos cajas como cada uno crea conveniente y a continuación comienza el juego. Se lanza la moneda; si se obtiene cara, se extrae al azar una canica de la caja C1, y si sale cruz, se extrae de C2. En este juego se gana cuando se obtiene bola blanca (y, por tanto, puede haber más de un ganador en cada partida).

Las distribuciones que eligieron Ana, Daniel y Jorge fueron las siguientes.

Ana	
C_1	C_2
2*B*, 2*N*	**2*B*, 2*N***

Daniel	
C_1	C_2
4*B*	**4*N***

Jorge	
C_1	C_2
3*B*, 2*N*	**1*B*, 2*N***

16.1. Elabora distintas distribuciones de las bolas en las cajas.

Actividad abierta

16.8. Deduce cuántas distribuciones distintas pueden hacerse.

(c_1, c_2): Escribamos, en primer lugar, el número de distribuciones según el número de canicas en cada caja. Serían 9, a saber: (0, 8), (1, 7), …, (8, 0). Calculemos ahora, en cada una de las distribuciones, las distintas posibilidades según el color de las canicas:

(0, 8) $\rightarrow$ 1

(1, 7) $\rightarrow$ 2 (según que la canica de la caja 1 sea blanca o negra).

(2, 6) $\rightarrow$ 3 (según que las dos canicas de la caja 1 sean ambas blancas, negras o una de cada). No nos planteamos, por ahora, que todas estas tres distribuciones tengan igual probabilidad.

(3, 5) $\rightarrow$ 4 (3 blancas, 3 negras, 2 blancas y 1 negra o 1 blanca y 2 negras).

(4, 4) $\rightarrow$ 5. Las 4 canicas de la caja 1 podrían ser según el número de blancas: 0, 1, 2, 3 y 4, es decir, la distribución (4, 4) puede darse de 5 formas diferentes.

Los restantes son análogos a estos. El número total de distribuciones es: $2(1 + 2 + 3 + 4) + 5 = 25$.

16.9. Aparentemente, la probabilidad de ganar en cualquier distribución es la misma, $\frac{1}{2}$, porque hay el mismo número de canicas blancas y de negras. Confirma si esto es así.

No es verdad. Por ejemplo, la probabilidad de ganar en (0, 8) es de $\frac{1}{4}$ (gano si obtengo cruz –elijo c_2– y luego canica blanca en c_2), y la probabilidad de ganar, por ejemplo, en (1, 7), con 1 canica blanca en c_1, es mayor que $\frac{1}{2}$, pues si obtengo caras elijo c_1, y es seguro que allí obtendré canica blanca.

16.10. ¿En cuál de las tres distribuciones consideras que es más fácil ganar?

En Ana y Daniel, la probabilidad de obtener canica blanca es la misma que la de obtener canica negra –por la simetría de la distribución–, es decir, la probabilidad de ganar es de $\frac{1}{2}$, y en Jorge, gano si obtengo cara con probabilidad de $\frac{3}{5}$ y si obtengo cruz con probabilidad de $\frac{1}{3}$, o sea, $P(\text{obtener canica blanca}) = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{5} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{5}+\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{9+5}{15} < \frac{1}{2}$.

16.11. Elabora la distribución de canicas en la que es más probable ganar (la estrategia óptima) y la distribución en la que es menos probable ganar.

(1, 7) con canica blanca en c_1 y (7, 1) con canica blanca en c_2.

(1, 7) con canica negra en c_1 y (7, 1) con canica negra en c_2.

16.12. ¿Observas alguna relación entre ambas distribuciones?

La simetría esperada

16.13. Ahora que conoces la estrategia óptima, realiza ligeras variantes del juego, descubre su estrategia óptima y juega con tus compañeros. ¿Consigues ganar?

Actividad abierta

Proyecto editorial: **Equipo de Educación Secundaria del Grupo SM**

Autoría: **Rafaela Arévalo, José Luis González, Juan Alberto Torresano**

Edición: **Elena Calvo, Miguel Ángel Ingelmo, Yolanda Zárate**

Corrección: **Ricardo Ramírez**

Ilustración: **Félix Anaya, Modesto Arregui, Juan Francisco Cobos, Domingo Duque, Félix Moreno,**

Diseño: **Pablo Canelas, Alfonso Ruano**

Maquetación: **SAFEKAT S. L.**

Coordinación de diseño: **José Luis Rodríguez**

Coordinación editorial: **Josefina Arévalo**

Dirección del proyecto: **Aída Moya**

Impreso en España – *Printed in Spain*