Problemas de Selectividad de Matemáticas II
Comunidad de Madrid
(Resueltos)

Isaac Musat Hervás

22 de mayo de 2013

Índice general

Capítulo 1

Año 2000

1.1. Modelo 2000 - Opción A

Problema 1.1.1 *(2 puntos)* Dados los vectores $\overrightarrow{u} = (a, 1 + a, 2a)$, $\overrightarrow{v} = (a, 1, a)$ y $\overrightarrow{w} = (1, a, 1)$, se pide:

a) (1 punto) Determinar los valores de a para que los vectores $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ y $\overrightarrow{w}$ sean linealmente dependientes.

b) (0,5 puntos) Estudiar si el vector $\overrightarrow{c} = (3, 3, 0)$ depende linealmente de los vectores $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ y $\overrightarrow{w}$ para el caso $a = 2$. Justificar la respuesta.

c) (0,5 puntos) Justificar razonadamente si para $a = 0$ se cumple la igualdad

$$\overrightarrow{u} \cdot (\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{w}) = 0$$

Nota: el símbolo $\wedge$ significa producto vectorial.

Solución:

a)

$$\begin{vmatrix} a & 1+a & 2a \\ a & 1 & a \\ 1 & a & 1 \end{vmatrix} = a(a^2 - 1)0 \Longrightarrow a = 0, \ \ a = \pm 1$$

Si $a \neq 0$ y $a \neq \pm 1 \Longrightarrow$ $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ y $\overrightarrow{w}$ son Linealmente Independientes.

Si $a = 0$ o $a = \pm 1 \Longrightarrow$ $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ y $\overrightarrow{w}$ son Linealmente Dependientes.

b) si $a = 2$, los tres vectores son linealmente independientes y, por tanto, forman una base. Luego el vector $\overrightarrow{c} = (3, 3, 0)$ es combinación lineal de $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ y $\overrightarrow{w}$. Veamos de que combinación lineal se trata, tenemos:

$$\left\{\begin{array}{l}\overrightarrow{u}=(2,3,4)\\ \overrightarrow{v}=(2,1,2)\\ \overrightarrow{w}=(1,2,1)\end{array}\right.$$

$$(3,3,0)=a(2,3,4)+b(2,1,2)+c(1,2,1)\Longrightarrow$$

$$\left\{\begin{array}{rrrr}2a+ & 2b+ & c= & 3\\ 3a+ & b+ & 2c= & 3\\ 4a+ & 2b+ & c= & 0\end{array}\right.\Longrightarrow\left\{\begin{array}{l}a=-\dfrac{3}{2}\\ \\ b=\dfrac{3}{2}\\ \\ c=3\end{array}\right.$$

$$\overrightarrow{c}=-\frac{3}{2}\overrightarrow{u}+\frac{3}{2}\overrightarrow{v}+3\overrightarrow{w}$$

c) Si $a=0$ tenemos:

$$\left\{\begin{array}{l}\overrightarrow{u}=(0,1,0)\\ \overrightarrow{v}=(0,1,0)\\ \overrightarrow{w}=(1,0,1)\end{array}\right.$$

Sabemos que $[\overrightarrow{u},\overrightarrow{v},\overrightarrow{w}]=\overrightarrow{u}\cdot(\overrightarrow{v}\wedge\overrightarrow{w})$. Pero

$$[\overrightarrow{u},\overrightarrow{v},\overrightarrow{w}]=\left|\begin{array}{ccc}0&1&0\\0&1&0\\1&0&1\end{array}\right|=0$$

Luego $\overrightarrow{u}\cdot(\overrightarrow{v}\wedge\overrightarrow{w})=0$

Problema 1.1.2 *(2 puntos)*

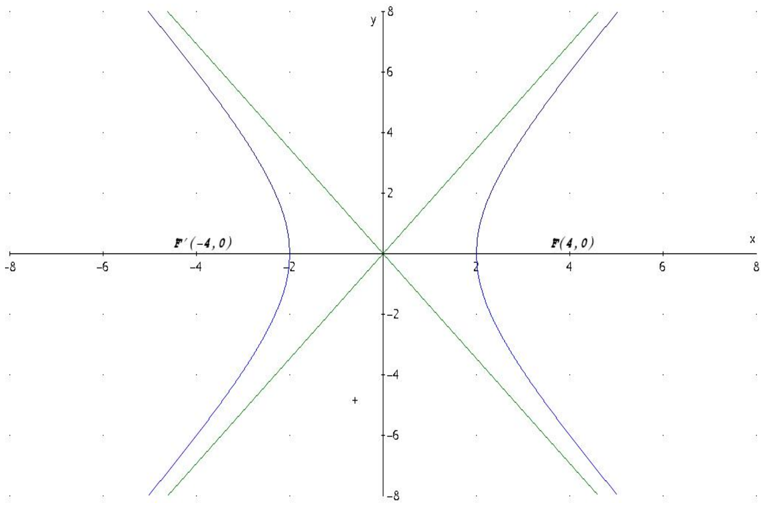
a) Hallar la ecuación del lugar geométrico de los puntos del plano tales que su distancia al punto $A(4,0)$ es el doble de su distancia a la recta $x=1$.

b) Comprobar que el anterior lugar geométrico es una cónica. Indicar el tipo de cónica que es y hallar sus focos.

Solución:

a)

$$d(P,A)=2d(P,r),\quad r:x=1,\quad A(4,0)$$



$$\left\{\begin{array}{l} d(P,A) = |\overrightarrow{AP}| = \sqrt{(x-4)^2+y^2} \\ \\ d(P,r) = \dfrac{|x-1|}{1} \end{array}\right. \Longrightarrow (x-4)^2+y^2 = 4(x-1)^2 \Longrightarrow$$

$$\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{12} = 1$$

b) Se trata de una hipérbola $a^2 = 4$ y $b^2 = 12$, como $c^2 = a^2 + b^2 = 16 \Longrightarrow c = 4$. Los focos serían los puntos $F'(-4,0)$ y $F(4,0)$.

Problema 1.1.3 *(3 puntos)* Sea

$$f(x) = \left\{\begin{array}{lll} \dfrac{\sin x}{x} + 2 & \text{si} & x \neq 0 \\ \\ k & \text{si} & x = 0 \end{array}\right.$$

a) (1 punto) ¿Hay algún valor de k para el cual $f(x)$ sea continua en $x = 0$?

b) (1 punto) ¿Hay algún valor de k para el cual $f(x)$ sea derivable en $x = 0$?

c) (1 punto) Determinar sus asíntotas.

Solución:

a)

$$\lim_{x\longrightarrow 0}\left(\frac{\sin x}{x} + 2\right) = \lim_{x\longrightarrow 0}\frac{\sin x + 2x}{x} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\longrightarrow 0}\frac{\cos x + 2}{1} = 3$$

Para que f sea continua en $x = 0 \Longrightarrow k = 3$

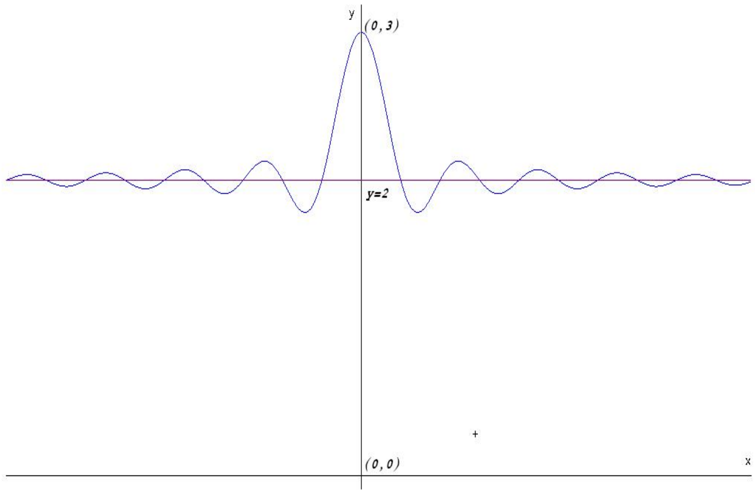
b)

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{x\cos x - \sin x}{x^2} & \text{si} \quad x \neq 0 \\ \\ 0 & \text{si} \quad x = 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x\longrightarrow 0} \frac{x\cos x - \sin x}{x^2} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\longrightarrow 0} \frac{-x\sin x}{2x} =$$

$$\left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\longrightarrow 0} \frac{-\sin x - x\cos x}{2} = 0$$

En conclusión, para que una función sea derivable antes tiene que ser continua y por tanto $k = 3$. Luego en este caso también se cumple $f'(0^-) = f'(0^+)$ y es derivable.



c) Asíntotas:

- Verticales no hay, la única posible sería en $x = 0$ y en ese punto hay una discontinuidad evitable.
- Horizontales

$$\lim_{x\longrightarrow\infty} \left(\frac{\sin x}{x} + 2\right) = 2 \Longrightarrow y = 2$$

- Oblicuas no hay al haber horizontales

Problema 1.1.4 *(3 puntos)* Sea el sistema

$$\begin{cases} -x+ & \lambda y+ & 2z = & \lambda \\ 2x+ & \lambda y- & z = & 2 \\ \lambda x- & y+ & 2z = & \lambda \end{cases}$$

a) (1 punto) Discutir la compatibilidad del sistema según los diversos valores de λ.

b) (1 punto) Resolver el sistema para $\lambda = -1$.

c) (1 punto) Resolver el sistema para $\lambda = 2$.

Solución:

a)

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{rrr|r} -1 & \lambda & 2 & \lambda \\ 2 & \lambda & -1 & 2 \\ \lambda & -1 & 2 & \lambda \end{array}\right), \quad |A| = -3\lambda^2 - 6\lambda - 3 = 0 \Longrightarrow \lambda = -1$$

- Si $\lambda \neq -1 \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow$Rango$(A) = 3 =$Rango$(\overline{A})$ =nº de incógnitas $\Longrightarrow$ Sistema Compatible Determinado. (Solución única)
- Si $\lambda = -1$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{rrr|r} -1 & -1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & -1 & 2 \\ -1 & -1 & 2 & -1 \end{array}\right)$$

Como tiene dos filas iguales y el menor $\left|\begin{array}{rr} -1 & -1 \\ 2 & -1 \end{array}\right| = 3 \neq 0$ tenemos que Rango$(A) = 2 =$Rango$(\overline{A})$ <nº incógnitas $\Longrightarrow$ Sistema Compatible Indeterminado. (Infinitas soluciones)

b) Si $\lambda = -1$:

$$\left\{\begin{array}{rrrr} -x- & y+ & 2z = & -1 \\ 2x- & y- & z = & 2 \end{array}\right. \quad \left\{\begin{array}{rr} x = & 1+t \\ y = & t \\ z = & t \end{array}\right.$$

c) Si $\lambda = 2$:

$$\left\{\begin{array}{rrrr} -x+ & 2y+ & 2z = & 2 \\ 2x+ & 2y- & z = & 2 \\ 2x- & y+ & 2z = & 2 \end{array}\right. \quad \left\{\begin{array}{rr} x = & 2/3 \\ y = & 2/3 \\ z = & 2/3 \end{array}\right.$$

1.2. Modelo 2000 - Opción B

Problema 1.2.1 *(2 puntos)* De una función derivable $f(x)$ se conoce que pasa por el punto $A(-1,-4)$ y que su derivada es

$$f'(x) = \left\{\begin{array}{lll} 2-x & \text{si} & x \leq 1 \\ \\ \dfrac{1}{x} & \text{si} & x > 1 \end{array}\right.$$

a) Hallar la expresión de $f(x)$.

b) Obtener la ecuación de la recta tangente a $f(x)$ en $x = 2$.

Solución:

a)

$$f(x) = \begin{cases} 2x - \dfrac{x^2}{2} + a & \text{si} \quad x \le 1 \\ \\ \ln|x| + b & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}$$

Como $f(-1) = -4 \Longrightarrow a = -\dfrac{3}{2}$. Si f es derivable en $x = 1 \Longrightarrow f$ es continua en $x = 1 \Longrightarrow b = 0$. Luego:

$$f(x) = \begin{cases} 2x - \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{3}{2} & \text{si} \quad x \le 1 \\ \\ \ln x & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}$$

b) Si $x = 2 \Longrightarrow f(2) = \ln 2 \Longrightarrow (2, \ln 2)$.

Tenemos $m = f'(2) = \dfrac{1}{2}$ y, por tanto, la recta tangente es:

$$y - \ln 2 = \frac{1}{2}(x - 2)$$

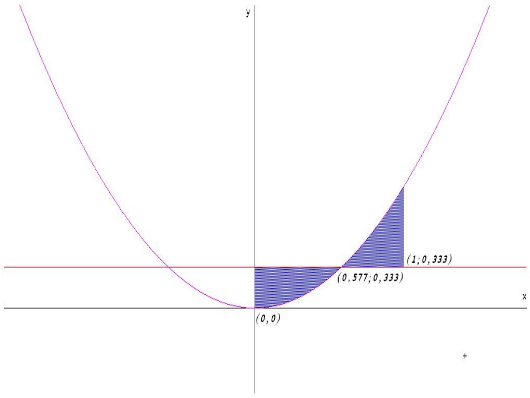
Problema 1.2.2 *(2 puntos)* Se consideran las curvas $y = x^2$ e $y = a$ donde a es un número real comprendido entre 0 y 1 ($0 < a < 1$). Ambas curvas se cortan en un punto (x_0, y_0) con abcisa positiva. Hallar a sabiendo que el área encerrada entre ambas curvas desde $x = 0$ hasta $x = x_0$ es igual a la encerrada entre ellas desde $x = x_0$ hasta $x = 1$.

Solución:

Calculamos la abcisa del punto de corte de ambas gráficas en función del parámetro a:

$$x^2 = a \Longrightarrow x = \sqrt{a}$$

Elegimos la solución positiva porque así nos lo indica el enunciado del problema. Tenemos, por tanto, que cuando $x = \sqrt{a}$ ambas curvas se cortan



$(x_0, y_0) = (\sqrt{a}, a)$ y la posición de las curvas cambia, de manera que, la que estaba por encima pasará a estar debajo. Es decir,

$$\int_0^{\sqrt{a}} (a - x^2)\, dx = \int_{\sqrt{a}}^1 (x^2 - a)\, dx \Longrightarrow$$

$$ax - \frac{x^3}{3}\bigg]_0^{\sqrt{a}} = \frac{x^3}{3} - ax\bigg]_0^{\sqrt{a}} \Longrightarrow a = \frac{1}{3}$$

Problema 1.2.3 *(3 puntos)*

a) (1 punto) Encontrar la distancia del punto $P(1, -1, 3)$ a la recta que pasa por los puntos $Q(1, 2, 1)$ y $R(1, 0, -1)$.

b) (1 punto) Hallar el área del triángulo cuyos vértices son los puntos P, Q y R.

c) (1 punto) Encontrar todos los puntos S del plano determinado por P, Q y R de manera que el cuadrilátero de vértices P, Q, R y S sea un paralelogramo.

Solución:

a) Calculamos la ecuación de la recta r que pasa por Q y R:

$$\left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{QR} = (0, -2, -2) \\ Q(1, 2, 1) \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 1 \\ y = 2 - 2\lambda \\ z = 1 - 2\lambda \end{array} \right.$$

$$|\overrightarrow{QP} \times \overrightarrow{QR}| = |\begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & -2 & -2 \\ 0 & -3 & 2 \end{vmatrix}| = |(-10, 0, 0)| = 10$$

$$d(P, r) = \frac{|\overrightarrow{QP} \times \overrightarrow{QR}|}{|\overrightarrow{QR}|} = \frac{10}{2\sqrt{2}} = \frac{5\sqrt{2}}{2}\, u$$

b) Tenemos

$$\left\{\begin{array}{l}\overrightarrow{QP}=(0,-3,2)\\ \overrightarrow{QR}=(0,-2,-2)\end{array}\right.$$

$$S=\frac{1}{2}|\overrightarrow{QP}\times\overrightarrow{QR}|=5\ u^2$$

c) El plano π que contiene a los puntos P, Q y R es el siguiente

$$\pi:\left|\begin{array}{ccc}0 & 0 & x-1\\ -3 & -2 & y\\ 2 & -2 & z+1\end{array}\right|=10(x-1)=0\Longrightarrow\pi:x-1=0$$

- Sean P, Q y R vértices consecutivos, entonces $S=P+\overrightarrow{QR}=(1,-1,3)+(0,-2,-2)=(1,-3,1)$
- Sean P, R y Q vértices consecutivos, entonces $S=P+\overrightarrow{RQ}=(1,-1,3)+(0,2,2)=(1,1,5)$
- Sean Q, P y R vértices consecutivos, entonces $S=Q+\overrightarrow{PR}=(1,2,1)+(0,1,-4)=(1,3,-3)$
- Sean Q, R y P vértices consecutivos, entonces $S=Q+\overrightarrow{RP}=(1,2,1)+(0,-1,4)=(1,1,5)$
- Sean R, P y Q vértices consecutivos, entonces $S=R+\overrightarrow{PQ}=(1,0,-1)+(0,3,-2)=(1,3,-3)$
- Sean R, Q y P vértices consecutivos, entonces $S=R+\overrightarrow{QP}=(1,0,-1)+(0,-3,2)=(1,-3,1)$

Los puntos S son $(1,-3,1)$, $(1,1,5)$ y $(1,3,-3)$. Todos ellos están contenidos en el plano π

Problema 1.2.4 *(3 puntos)*

a) (1 punto) Encontrar los valores de λ para los que la matriz

$$A=\left(\begin{array}{ccc}\lambda-1 & 1 & -1\\ 0 & \lambda-2 & 1\\ \lambda & 0 & 2\end{array}\right)$$

es invertible.

b) (1 punto) Para $\lambda=2$, hallar la inversa de A y comprobar el resultado.

c) (1 punto) Resolver el sistema

$$A\left(\begin{array}{c}x\\ y\\ z\end{array}\right)=\left(\begin{array}{c}0\\ 0\\ 0\end{array}\right)$$

para $\lambda=1$

Solución:

a) $|A| = (\lambda - 1)(3\lambda - 4) = 0 \Longrightarrow \lambda = 1$ y $\lambda = \dfrac{4}{3}$.

Si $\lambda = 1$, o $\lambda = \dfrac{4}{3} \Longrightarrow$ No es invertible.

Si $\lambda \neq 1$, y $\lambda \neq \dfrac{4}{3} \Longrightarrow$ Si es invertible.

b) Si $\lambda = 2$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1/2 \\ 1 & 2 & -1/2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1/2 \\ 1 & 2 & -1/2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

c) Con $\lambda = 1$ y $AX = O$:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{rrr} & y- & z = 0 \\ - & y+ & z = 0 \\ x+ & & 2z = 0 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{rrr} & y- & z = 0 \\ x+ & & 2z = 0 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{rr} x = & -2t \\ y = & t \\ z = & t \end{array} \right.$$

1.3. Junio 2000 - Opción A

Problema 1.3.1 *(2 puntos)* Resolver la siguiente ecuación vectorial:

$$\overrightarrow{x} \wedge (2, 1, -1) = (1, 3, 5)$$

sabiendo que $|\overrightarrow{x}| = \sqrt{6}$, donde $\wedge$ significa "producto vectorial".

Solución:

LLamamos $\overrightarrow{x} = (a, b, c) \Longrightarrow (a, b, c) \wedge (2, 1, -1) = (1, 3, 5)$:

$$\begin{vmatrix} i & j & k \\ a & b & c \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = (-b - c, a + 2c, a - 2b) = (1, 3, 5) \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} -b - c = 1 \\ a + 2c = 3 \\ a - 2b = 5 \end{array} \right.$$

Como la primera ecuación es el resultados de restar a la tercera la segunda, sólo tendríamos dos ecuaciones, la tercera la obtenemos de $|\overrightarrow{x}| = \sqrt{6} \Longrightarrow a^2 + b^2 + c^2 = 6$:

$$\left\{\begin{array}{c} -b - c = 1 \\ a + 2c = 3 \\ a^2 + b^2 + c^2 = 6 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} a = 1 \\ b = -2 \\ c = 1 \end{array}\right. \quad \text{o} \quad \left\{\begin{array}{l} a = 5/3 \\ b = -5/3 \\ c = 2/3 \end{array}\right.$$

Es decir, $\overrightarrow{x} = (1, -2, 1)$ y $\overrightarrow{x} = \left(\frac{5}{3}, -\frac{5}{3}, \frac{2}{3}\right)$

Problema 1.3.2 *(2 puntos)*

a) Determinar el centro y el radio de la esfera:

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y + 8z - 4 = 0$$

b) Determinar el centro y el radio de la circunferencia intersección de la esfera del apartado anterior con el plano $z = 0$.

Solución:

a)

$$\left\{\begin{array}{l} -2a = -2 \\ -2b = 4 \\ -2c = 8 \\ a^2 + b^2 + c^2 - r^2 = -4 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} a = 1 \\ b = -2 \\ c = -4 \\ r = 5 \end{array}\right.$$

Esfera de centro $(1, -2, -4)$ y radio $r = 5$.

b) Al cortar la esfera con el plano $z = 0$ nos queda la circunferencia:

$$x^2 + y^2 - 2x + 4y - 4 = 0$$

$$\left\{\begin{array}{l} -2a = -2 \\ -2b = 4 \\ a^2 + b^2 - r^2 = -4 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} a = 1 \\ b = -2 \\ r = 3 \end{array}\right.$$

Circunferencia de centro $(1, -2)$ y radio $r = 3$.

Problema 1.3.3 *(3 puntos)* Para una matriz cuadrada, se define su traza como la suma de los elementos de la diagonal principal. En lo que sigue, A y B son matrices cuadradas 2×2.

a) (0,5 puntos) Comprobar que se verifica:

$$Traza(A + B) = Traza(A) + Traza(B)$$

b) (1 punto) Comprobar que

$$Traza(A \cdot B) = Traza(B \cdot A)$$

c) (1 punto) Utilizando los resultados anteriores, demostrar que es imposible tener $AB - BA = I$, donde I denota la matriz identidad.

d) (0,5 puntos) Encontrar dos matrices A y B para las que:

$$Traza(AB) \neq Traza(A) \cdot Traza(B)$$

Solución:

a) Sean

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{pmatrix}$$

$$Traza(A) = a_1 + a_4, \quad Traza(B) = b_1 + b_4$$

$$Traza(A) + Traza(B) = a_1 + b_1 + a_4 + b_4$$

$$A + B = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 & a_2 + b_2 \\ a_3 + b_3 & a_4 + b_4 \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow Traza(A + B) = a_1 + b_1 + a_4 + b_4$$

Luego:

$$Traza(A + B) = Traza(A) + Traza(B)$$

b)

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1b_1 + a_2b_3 & a_1b_2 + a_2b_4 \\ a_3b_1 + a_4b_3 & a_3b_2 + a_4b_4 \end{pmatrix}$$

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1b_1 + a_3b_2 & a_2b_1 + a_4b_2 \\ a_1b_3 + a_3b_4 & a_2b_3 + a_4b_4 \end{pmatrix}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} Traza(AB) = a_1b_1 + a_2b_3 + a_3b_2 + a_4b_4 \\ Traza(BA) = a_1b_1 + a_3b_2 + a_2b_3 + a_4b_4 \end{array} \right. \Longrightarrow Traza(AB) = Traza(BA)$$

c) Suponemos que la igualdad es cierta, es decir:

$$AB - BA = I \Longrightarrow AB = BA + I \Longrightarrow Traza(AB) = Traza(BA + I) \Longrightarrow$$

$$Traza(AB) = Traza(BA) + Traza(I), \text{ como } Traza(AB) = Traza(BA)$$

$$\Longrightarrow 0 = 2$$

Luego esta igualdad es falsa.

d) Sea A una matriz cualquiera y $B = I$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot B = A \Longrightarrow Traza(A \cdot B) = Traza(A) = 4, \quad Traza(B) = 2$$

$$Traza(A) \cdot Traza(B) = 4 \cdot 2 = 8$$

Luego $Traza(A \cdot B) \neq Traza(A) \cdot Traza(B)$

Problema 1.3.4 *(3 puntos)* Sea $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ un polinomio que cumple $f(1) = 0$, $f'(0) = 2$, y tiene dos extremos relativos para $x = 1$ y $x = 2$.

a) (2 puntos) Determinar a, b, c y d.

b) (1 punto) ¿Son máximos o mínimos los extremos relativos?

Solución:

a)

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d, \quad f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$$

$$\left\{ \begin{array}{l} f(1) = 0 \Longrightarrow a + b + c + d = 0 \\ f'(1) = 0 \Longrightarrow 3a + 2b + c = 0 \\ f'(2) = 0 \Longrightarrow 12a + 4b + c = 0 \\ f'(0) = 2 \Longrightarrow c = 2 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} a = 1/3 \\ b = -3/2 \\ c = 2 \\ d = -5/6 \end{array} \right.$$

La función será:

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 2x - \frac{5}{6}$$

b) Calculamos la segunda derivada

$$f''(x) = 2x - 3 \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} f''(1) = -3 < 0 \Longrightarrow \text{Máximo} \\ f''(2) = 1 > 0 \Longrightarrow \text{Mínimo} \end{array} \right.$$

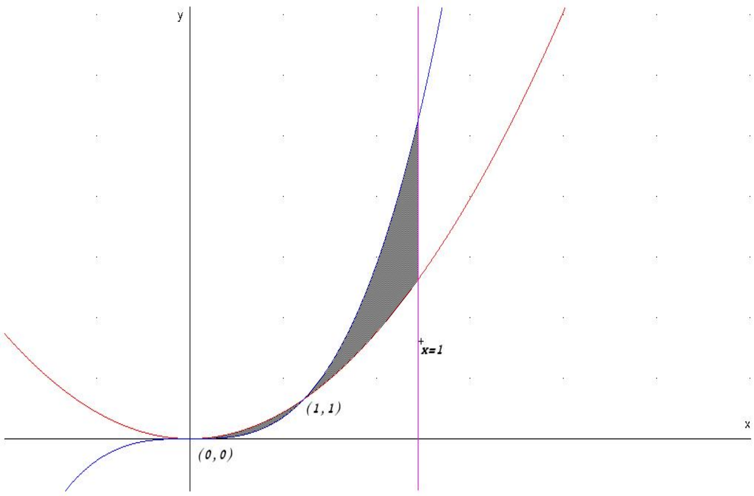
1.4. Junio 2000 - Opción B

Problema 1.4.1 *(2 puntos)* Sean las funciones:

$$f(x) = x^2 \text{ y } g(x) = x^3$$

Determinar el área encerrada por las gráficas de ambas funciones y la recta $x = 2$.

Solución:



Buscamos los puntos de corte de ambas funciones

$$x^2 = x^3 \Longrightarrow x^3 - x^2 = 0 \Longrightarrow x^2(x-1) = 0 \Longrightarrow x = 0, \ \ x = 1$$

Los intervalos de integración serán $[0, 1]$ y $[1, 2]$. Calculamos la primitiva de $f(x) - g(x)$:

$$F(x) = \int (f(x) - g(x))\, dx = \int (x^2 - x^3)\, dx = \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}$$

$$\int_0^1 (f(x) - g(x))\, dx = F(1) - F(0) = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$$

$$\int_1^2 (f(x) - g(x))\, dx = F(1) - F(0) = \frac{8}{3} - \frac{16}{4} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = -\frac{17}{12}$$

$$S = \left|\frac{1}{12}\right| + \left|-\frac{17}{12}\right| = \frac{18}{12} = \frac{3}{2}\ u^2$$

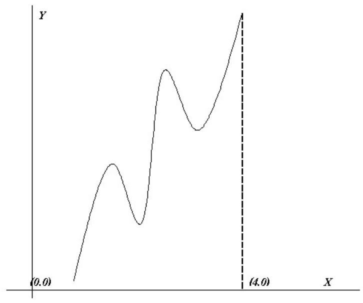
Problema 1.4.2 *(2 puntos)*

a) (1 punto) Si es posible, dibujar de forma clara la gráfica de una función continua en el intervalo $[0, 4]$ que tenga al menos un máximo relativo en el punto $(2, 3)$ y un mínimo relativo en el punto $(3, 4)$.

b) (1 punto) Si la función fuera polinómica, ¿cuál ha de ser como mínimo su grado?

Solución:

a) El dibujo sería el siguiente:



b) La función tiene al menos cuatro extremos, luego el grado del polinomio tiene que ser cinco como mínimo. Si fuese cuatro, la primera derivada tendría como mucho tres soluciones al igualar a cero.

Problema 1.4.3 *(3 puntos)* Se considera el sistema de ecuaciones

$$\left\{\begin{array}{rrrl} ax+ & y+ & z= & (a-1)(a+2)\\ x+ & ay+ & z= & (a-1)^2(a+2)\\ x+ & y+ & az= & (a-1)^3(a+2)\end{array}\right.$$

a) (1 punto) Comprobar que es compatible para todo valor de a.

b) (1 punto) Describir en términos geométricos el conjunto de soluciones para $a=1$ y para $a=-2$.

c) (1 punto) Resolverlo para $a=-2$.

Solución:

a)

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{ccc|c} a & 1 & 1 & (a-1)(a+2)\\ 1 & a & 1 & (a-1)^2(a+2)\\ 1 & 1 & a & (a-1)^3(a+2)\end{array}\right),\quad |A|=a^3-3a+2=0\Longrightarrow a=1,\ \ a=-2$$

- Si $a\neq 1$ y $a\neq -2\Longrightarrow$ Rango$(\overline{A})$ =Rango(A) $=3=$ nº de incógnitas $\Longrightarrow$ SCD.
- Si $a=1$: (Homogéneo)

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 1 & 0\end{array}\right)\Longrightarrow \text{Rango}(\overline{A})=\text{Rango}(A)<\text{n}^{\text{o}}\text{incógnitas}\Longrightarrow \text{SCI}$$

- Si $a=-2$:

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 1 & 0\\ 1 & -2 & 1 & 0\\ 1 & 1 & -2 & 0\end{array}\right),\quad \left|\begin{array}{cc} -2 & 1\\ 1 & -2\end{array}\right|=3\neq 0\Longrightarrow$$

Rango$(\overline{A})$ =Rango$(A)=2$ <nº incógnitas$\Longrightarrow$ SCI

Para cualquier valor de a el sistema es, por tanto, compatible.

b) Si $a = 1$ se trata de tres planos coincidentes, $x + y + z = 0$.

Si $a = -2$ se cortan en una recta que calculamos en el siguiente apartado.

c)

$$\left\{ \begin{array}{rrrr} x- & 2y+ & z = & 0 \\ x+ & y+ & -2z = & 0 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{rrr} x- & 2y = & -z \\ x+ & y = & 2z \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = \lambda \\ y = \lambda \\ z = \lambda \end{array} \right.$$

Problema 1.4.4 *(3 puntos)* Sean los puntos $P(8, 13, 8)$ y $Q(-4, -11, -8)$. Se considera el plano π, perpendicular al segmento PQ por su punto medio.

a) (1 punto) Obtener la ecuación del plano π.

b) (1 punto) Calcular la proyección ortogonal del punto $O(0, 0, 0)$ sobre π.

c) (1 punto) Hallar el volumen del tetraedro determinado por los puntos en los que el plano π corta a los ejes coordenados y en el origen de coordenadas.

Solución:

a) Se trata de un plano mediador. Calculamos punto medio del segmento $\overline{PQ}$ que será $M(2, 1, 0)$ y el vector $\overrightarrow{PQ} = (-12, -24, -16) = -4(3, 6, 4)$.

$$3x + 6y + 4z + \lambda = 0, \;\; 6 + 6 + 0 + \lambda = 0 \Longrightarrow \lambda = -12$$

$$\pi : 3x + 6y + 4z - 12 = 0$$

b) Calculamos una recta r perpendicular a π que pase por O y después calculamos el corte de esa recta r y el plano π.

$$r : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_r} = (3, 6, 4) \\ P_r = O(0, 0, 0) \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 3\lambda \\ y = 6\lambda \\ z = 4\lambda \end{array} \right.$$

$$3(3\lambda) + 6(6\lambda) + 4(4\lambda) - 12 = 0 \Longrightarrow \lambda = \frac{12}{61}$$

El punto proyectado es: $O'\left(\frac{36}{61}, \frac{72}{61}\frac{48}{61}\right)$

c) Los puntos de corte son:

Con el eje OX: hacemos $y = 0$ y $z = 0 \Longrightarrow A\,(4, 0, 0)$.

Con el eje OY: hacemos $x = 0$ y $z = 0 \Longrightarrow B\,(0, 2, 0)$.

Con el eje OZ: hacemos $x = 0$ y $y = 0 \Longrightarrow C\,(0, 0, 3)$.

Los vectores:

$\overrightarrow{OA} = (4, 0, 0)$.

$\overrightarrow{OB} = (0, 2, 0)$.

$\overrightarrow{OC} = (0, 0, 3)$.

El volumen del tetraedro es

$$V = \frac{1}{6}|[\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}]| = \frac{1}{6}|\begin{vmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix}| = 4\ u^3$$

1.5. Septiembre 2000 - Opción A

Problema 1.5.1 *(2 puntos)* Sea la función $f(x) = 2x + \sin 2x$

a) (1 punto) Determinar si tiene asíntotas de algún tipo.

b) (1 punto) Estudiar su monotonía y la existencia de extremos relativos.

Solución:

a) Asíntotas:

- Verticales y Horizontales no hay claramente.
- Oblicuas: $y = mx + n$

$$m = \lim_{x\longrightarrow\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\longrightarrow\infty} \frac{2x + \sin 2x}{x} = 2$$

$$n = \lim_{x\longrightarrow\infty}(2x + \sin 2x - 2x) = \lim_{x\longrightarrow\infty}(\sin 2x)\ \text{ No existe}$$

Luego tampoco hay asíntotas oblicuas.

b) $f'(x) = 2 + 2\cos 2x = 0 \Longrightarrow x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$ Para cualquier x que escojamos $f'(x) > 0$, excepto en los puntos que la anulan, luego la función es siempre creciente y no hay ni máximos ni mínimos. Veamos los puntos de inflexión:

$$f''(x) = -4\sin 2x = 0 \Longrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi$$

$$f'''(x) = -8\cos 2x \Longrightarrow f'''(\pi/2) = 8 \neq 0$$

Luego los puntos $x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$ son puntos de inflexión.

Problema 1.5.2 *(2 puntos)* Dados tres números reales cualesquiera r_1, r_2 y r_3, hallar el número real x que minimiza la función

$$D(x) = (r_1 - x)^2 + (r_2 - x)^2 + (r_3 - x)^2$$

Solución:

$$D'(x) = -2(r_1 - x) - 2(r_2 - x) - 2(r_3 - x) = -2(r_1 + r_2 + r_3 - 3x) = 0 \Longrightarrow x = \frac{r_1 + r_2 + r_3}{3}$$

x es la media aritmética de los tres números.

$$D''(x) = 6 \Longrightarrow D''\left(\frac{r_1 + r_2 + r_3}{3}\right) = 6 > 0$$

Luego se trata de un mínimo.

Problema 1.5.3 *(3 puntos)* Considerar el sistema de ecuaciones

$$\left\{\begin{array}{rrrl} & y+ & z = & 1 \\ (\lambda-1)x+ & y+ & z = & \lambda \\ x+ & (\lambda-1)y- & z = & 0 \end{array}\right.$$

a) (1 punto) Discutirlo según los valores del parámetro λ.

b) (1 punto) Resolverlo para $\lambda = 0$.

c) (1 punto) Resolverlo para $\lambda = 3$.

Solución:

a)

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 1 \\ \lambda-1 & 1 & 1 & \lambda \\ 1 & \lambda-1 & -1 & 0 \end{array}\right), \quad |A| = \lambda(\lambda-1) = 0 \Longrightarrow \lambda = 0, \ \lambda = 1$$

- Si $\lambda \neq 0$ y $\lambda \neq 1 \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow$ Rango$(A) = 3 =$Rango$\overline{A}$ =nº de incógnitas $\Longrightarrow$ Sistema compatible determinado (solución única).

- Si $\lambda = 0$
$$\overline{A} = \left(\begin{array}{rrr|r} 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \end{array}\right)$$
Como la tercera fila es igual a la segunda multiplicada por -1, y como el menor $\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$ Tenemos que Rango$(A) = 2 =$Rango$(\overline{A}) <$nº de incógnitas $\Longrightarrow$ Sistema compatible indeterminado (infinitas soluciones).
- Si $\lambda = 1$
$$\overline{A} = \left(\begin{array}{rrr|r} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right)$$
Como la primera fila es igual a la segunda, y como el menor $\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$ Tenemos que Rango$(A) = 2 =$Rango$(\overline{A}) <$nº de incógnitas $\Longrightarrow$ Sistema compatible indeterminado (infinitas soluciones).

b) Si $\lambda = 0$
$$\left\{\begin{array}{rrrr} & y+ & z= & 1 \\ -x+ & y+ & z= & 0 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{rr} x= & 1 \\ y= & 1-t \\ z= & t \end{array}\right.$$

c) Si $\lambda = 3$
$$\left\{\begin{array}{rrrr} & y+ & z= & 1 \\ 2x+ & y+ & z= & 3 \\ x+ & 2y- & z= & 0 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=1 \\ y=0 \\ z=1 \end{array}\right.$$

Problema 1.5.4 *(3 puntos)* Sea la superficie esférica de ecuación $x^2+y^2+z^2-6x-6y-8z+9=0$.

a) (0,5 puntos) Determinar su centro y su radio.

b) (0,5 puntos) Hallar la ecuación de la recta que contiene al diámetro paralelo al eje OY.

c) (1 punto) Obtener el centro y el radio de la circunferencian que resulta al cortar dicha esfera con el plano $z=0$.

d) (1 punto) Hallar la ecuación del plano tangente a la esfera en su punto del eje OX.

Solución:

a) $x^2+y^2+z^2-6x-6y-8z+9=0 \Longrightarrow$ centro $C(3,3,4)$ y radio $r=5$

b)
$$t:\left\{\begin{array}{l}\overrightarrow{u_t}=(0,1,0)\\ P_t(3,3,4)\end{array}\right. \Longrightarrow t:\left\{\begin{array}{l}x=3\\ y=3+\lambda\\ z=4\end{array}\right.$$

c) Imponemos $z=0\Longrightarrow x^2+y^2-6x-6y+9=0$ circunferencia de centro $(3,3,0)$ y radio $r=3$

d) Si cortamos la esfera con el eje OX hacemos $y=0$ y $z=0\Longrightarrow$
$$(x-3)^2+(-3)^2+(-4)^2=25\Longrightarrow x=3\Longrightarrow P(3,0,0)$$
El vector característico del plano tangente puede ser $\overrightarrow{PC}=(0,3,4)$
$$\pi: 3y+4z+\lambda=0$$
Como tiene que contener al punto $P\Longrightarrow\lambda=0$. Luego el plano buscado es $\pi: 3y+4z=0$.

1.6. Septiembre 2000 - Opción B

Problema 1.6.1 *(2 puntos)* Se consideran los puntos $A(1,a,0)$, $B(1,1,a-2)$ y $C(1,-1,a)$.

a) (1 punto) Comprobar que no están alineados, cualquiera que sea el valor que tome el parámetro a.

b) (1 punto) Hallar el área del triángulo que determinan los tres puntos.

Solución:

a)
$$\left|\begin{array}{ccc}1&a&0\\1&1&a-2\\1&-1&a\end{array}\right|=-2\neq 0\ \ \forall a\in R$$
Luego no están alineados.

b)
$$\left\{\begin{array}{l}\overrightarrow{AB}=(1,1,a-2)-(1,a,0)=(0,1-a,a-2)\\ \overrightarrow{AC}=(1,-1,a)-(1,a,0)=(0,-1-a,a)\end{array}\right. \Longrightarrow$$
$$|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}|=|\left|\begin{array}{ccc}i&j&k\\0&1-a&a-2\\0&-1-a&a\end{array}\right||=|(-2,0,0)|=2$$
$$S=\frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}|=1\,u^2$$

Problema 1.6.2 *(2 puntos)* Sean la recta

$$r : \frac{x-1}{m} = \frac{y}{4}\frac{z-1}{2}$$

y el plano

$$\pi : 2x - y + kz = 0$$

a) (1 punto) Calcular m y k para que la recta sea perpendicular al plano.

b) (1 punto) Calcular m y k para que la recta esté contenida en el plano.

Solución:

a) Deben ser $\overrightarrow{u_r} = \overrightarrow{u_\pi}$ o o proporcionales:

$$(m, 4, 2) = (2, -1, k) \Longrightarrow m = 2, \ \ k = 2$$

b) El producto escalar de ambos vectores debe ser igual a cero:

$$2m - 4 + 2k = 0 \Longrightarrow m + k = 2$$

Todos aquellos valores de m y k que cumplan $m + k = 2$ harán que la recta r esté contenida en el plano π.

Problema 1.6.3 *(3 puntos)* Sea la función $f(x) = x^4 - 4x^3 + x^2 + 6x$.

a) (1,5 puntos) Determinar los puntos de corte de su gráfica con los ejes y los intervalos de crecimiento y decrecimiento.

b) (0,5 puntos) Esbozar la gráfica de la función.

c) (1 punto) Calcular el área determinada por la gráfica de f, el eje horizontal y las rectas $x = -1$ y $x = 2$.

Solución:

a) Los puntos de corte son:

Con el eje OX: hacemos $f(x) = 0 \Longrightarrow (-1, 0)$, $(0, 0)$, $(2, 0)$ y $(3, 0)$ $A\left(\frac{14}{3}, 0, 0\right)$.

Con el eje OY: hacemos $x = 0 \Longrightarrow (0, 0)$

Estudiamos su monotonía:

$$f(x) = 4x^3 - 12x^2 + 2x + 6 = 0 \Longrightarrow x = 1 - \frac{\sqrt{10}}{2}, \ \ x = 1 + \frac{\sqrt{10}}{2}, \ \ x = 1$$

	$\left(\infty, 1-\frac{\sqrt{10}}{2}\right)$	$\left(1-\frac{\sqrt{10}}{2}, 1\right)$	$\left(1, 1+\frac{\sqrt{10}}{2}\right)$
$f'(x)$	$-$	$+$	$-$
$f(x)$	decreciente	creciente	decreciente

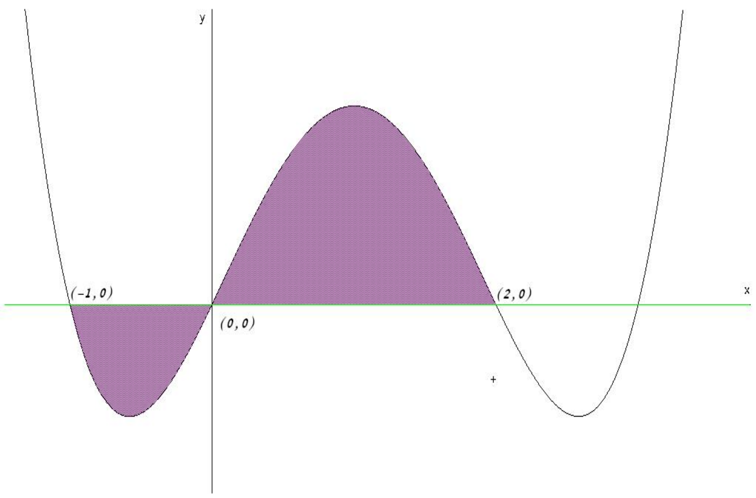
En el punto $(-0,58; -2,25)$ la función tiene un mínimo, en el punto $(1,4)$ la función tiene un máximo y en el punto $(2,58; -2,25)$ la función tiene un mínimo.

b) Hay un punto de corte con el eje de abcisas en el intervalo $(-1,2)$ ese punto es el $(0,0)$. Luego tendremos que hacer dos integrales, una entre -1 y 0, y otra entre 0 y 2.

$$S_1 = \int_{-1}^{0} (x^4 - 4x^3 + x^2 + 6x)\,dx = \left[\frac{x^5}{5} - x^4 + \frac{x^3}{3} + 3x^2\right]_{-1}^{0} = -\frac{22}{15}$$

$$S_2 = \int_{0}^{2} (x^4 - 4x^3 + x^2 + 6x)\,dx = \left[\frac{x^5}{5} - x^4 + \frac{x^3}{3} + 3x^2\right]_{0}^{2} = \frac{76}{15}$$

$$S = |S_1| + |S_2| = \frac{22}{15} + \frac{76}{15} = \frac{98}{15}\ u^2$$

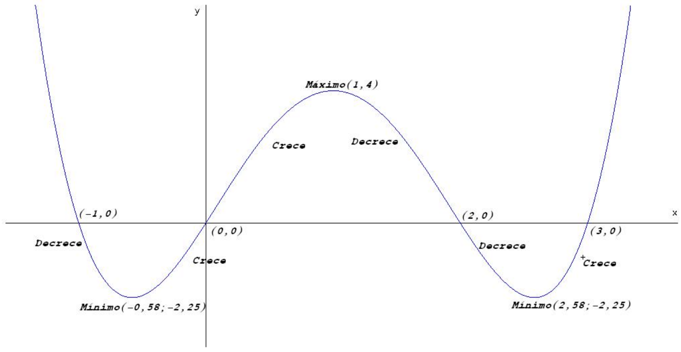


c) Representación gráfica

Problema 1.6.4 *(3 puntos)*

a) (2 puntos) Discutir en función de los valores de k y resolver el sistema

$$\left\{\begin{array}{rrrl} x+ & y+ & 5z = & 0 \\ 2x & - & kz = & 0 \\ x- & y+ & z = & 0 \end{array}\right.$$



b) (1 punto) Discutir en función de los valores de λ y resolver en los casos de compatibilidad del sistema

$$\left\{\begin{array}{rrrr} x+ & y+ & 5z = & 0 \\ 2x & - & 3z = & 0 \\ x- & y+ & z = & 0 \\ x+ & 2y+ & 2\lambda z = & \lambda \end{array}\right.$$

Solución:

a)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 2 & 0 & -k \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad |A| = -2k - 12 = 0 \Longrightarrow k = -6$$

Se trata de un sistema homgéneo y, por tanto, es siempre compatible.

- Si $k \neq -6 \Longrightarrow$ Rango$(A) = 3 =$ n$^{\text{o}}$ de incógnitas $\Longrightarrow$ Sistema Compatible Determinado. Como la solución es única, sólo tiene la trivial: $x = y = z = 0$
- Si $k = -6$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 2 & 0 & 6 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow \text{Rango}(A) < \text{n}^{\text{o}}\text{incógnitas} \Longrightarrow \text{SCI}$$

El sistema en este caso es Compatible Indeterminado, si escogemos el menor $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$, vemos que el Rango$(A) = 2$ y, además podemos eliminar la segunda fila, para la solución del sistema, y nos queda:

$$\left\{\begin{array}{rrrr} x+ & y+ & 5z = & 0 \\ x- & y+ & z = & 0 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{rrr} x+ & y = & -5\lambda \\ x- & y = & -\lambda \\ & z = & \lambda \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{rr} x = & -3\lambda \\ y = & -2\lambda \\ z = & \lambda \end{array}\right.$$

b) Ahora tenemos

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 5 & 0 \\ 2 & 0 & -3 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2\lambda & \lambda \end{array}\right) \text{ y que } \left|\begin{array}{rrr} 1 & 1 & 5 \\ 2 & 0 & -3 \\ 1 & -1 & 1 \end{array}\right| = -18$$

$$|\overline{A}| = \left|\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 5 & 0 \\ 2 & 0 & -3 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2\lambda & \lambda \end{array}\right| = \lambda \left|\begin{array}{rrr} 1 & 1 & 5 \\ 2 & 0 & -3 \\ 1 & -1 & 1 \end{array}\right| = -18\lambda = 0 \Longrightarrow \lambda = 0$$

- Si $\lambda \neq 0 \Longrightarrow$ Rango$(A) = 4 \neq$Rango$(\overline{A}) \Longrightarrow$ Sistema Incompatible.(No tiene solución)

- Si $\lambda = 0$ se trata de un sistema homogeneo. Tenemos que Rango$(A) =$ $3 =$ nº de incógnitas, ya que

  $$\left|\begin{array}{rrr} 1 & 1 & 5 \\ 2 & 0 & -3 \\ 1 & -1 & 1 \end{array}\right| = -18 \neq 0 \Longrightarrow \text{ Sistema Compatible Determinado}$$

  La única solución en este caso es la solución trivial: $x = y = z = 0$