

Problemas de Selectividad de Matemáticas II
Comunidad de Madrid
(Resueltos)

Isaac Musat Hervás

22 de mayo de 2013

Capítulo 2

Año 2001

2.1. Modelo 2001 - Opción A

Problema 2.1.1 (2 puntos) Comprobar que las siguientes matrices tienen el mismo determinante

$$A = \begin{pmatrix} 1+a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+b & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1-b \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 1+a & 1 \\ 1 & 1-a \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1+b & 1 \\ 1 & 1-b \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

Solución:

$$\begin{aligned} |B| &= \begin{vmatrix} -a^2 & 0 \\ 0 & 1-b^2 \end{vmatrix} = a^2b^2 \\ |A| &= \begin{vmatrix} F_1 - F_2 \\ F_2 \\ F_3 - F_4 \\ F_4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & a & 0 & 0 \\ 1 & 1-a & 1 & 1 \\ 0 & 0 & b & b \\ 1 & 1 & 1 & 1-b \end{vmatrix} = ab \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1-a & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1-b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} F_1 \\ F_2 - F_3 \\ F_3 \\ F_4 - F_1 \end{vmatrix} = \\ &= ab \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1-a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1-b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} F_1 \\ F_2 - F_1 \\ F_3 \\ F_4 - F_3 \end{vmatrix} = ab \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -b \end{vmatrix} = \\ &= -a^2b \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -b \end{vmatrix} = a^2b^2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = a^2b^2 \end{aligned}$$

Problema 2.1.2 (2 puntos) Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$

a) calcular A^{-1}

b) Resolver el sistema $A \cdot \left[\begin{pmatrix} 5 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} 21 \\ 24 \end{pmatrix}$

Solución:

a) $A^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

b) $A(B + X) = C \implies X = A^{-1}C - B$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 21 \\ 24 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Problema 2.1.3 (3 puntos) Sea la parábola $x^2 = 4y$. Sean u y v las rectas tangentes a la parábola en los puntos P de abscisa a y Q de abscisa b , (a, b) , $(a_1, 0)$, $(b_1, 0)$.

- a) (1,5 puntos) Hallar las coordenadas del punto R de intersección de u y v .
- b) (1 punto) Hallar la relación entre a y b para que las rectas u y v sean perpendiculares.
- c) (0,5 puntos) Probar que en el caso del apartado anterior, el punto R está en la directriz de la parábola.

Solución:

- a) Sean u tangente en el punto $P(a, 0)$ y v tangente en el punto $Q(b, 0)$.
Tenemos $f'(x) = \frac{1}{2}x$:

$$m_1 : f'(a) = \frac{1}{2}a, \quad m_2 = f'(b) = \frac{1}{2}b$$

$$\begin{cases} u : y = \frac{1}{2}a(x - a) \\ u : y = \frac{1}{2}b(x - b) \end{cases} \implies \begin{cases} x = a + b \\ y = \frac{ab}{2} \end{cases} \implies R\left(a + b, \frac{ab}{2}\right)$$

b)

$$m_1 = \frac{-1}{m_2} \implies ab = -4$$

- c) Se trata de una parábola vertical cuya directriz es la recta $d : y = -2$.
Si $ab = -4 \implies R\left(a + b, \frac{-4}{2}\right) = R(a + b, -2) \in d$

Problema 2.1.4 (3 puntos) Se considera la función

$$f(x) = \frac{1}{4 - x^2}$$

- (1 punto) Indicar el dominio de definición de la función f y hallar sus asíntotas.
- (1 punto) Hallar los extremos relativos de la función f y sus intervalos de concavidad y convexidad.
- (1 punto) Dibujar la gráfica de f y hallar su máximo y su mínimo absolutos en el intervalo $[-1, 1]$.

Solución:

- $Dom(f) = \mathbb{R} - \{-2, 2\}$. Sus asíntotas:

■ Verticales:

En $x = 2$:

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{1}{4 - x^2} = \left[\frac{1}{0^+} \right] = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{1}{4 - x^2} = \left[\frac{1}{0^-} \right] = -\infty$$

En $x = -2$:

$$\lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{1}{4 - x^2} = \left[\frac{1}{0^-} \right] = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{1}{4 - x^2} = \left[\frac{1}{0^+} \right] = +\infty$$

■ Horizontales:

En $y = 0$:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{4 - x^2} = 0$$

■ Oblicuas: No hay al haber horizontales.

b)

$$f'(x) = \frac{2x}{(4 - x^2)^2}, \quad f''(x) = \frac{2(3x^2 + 4)}{(4 - x^2)^3}$$

La segunda derivada no se anula nunca y, por tanto, no hay puntos de inflexión, y además $2(3x^2 + 4) > 0$ siempre. Por otro lado, por el denominador:

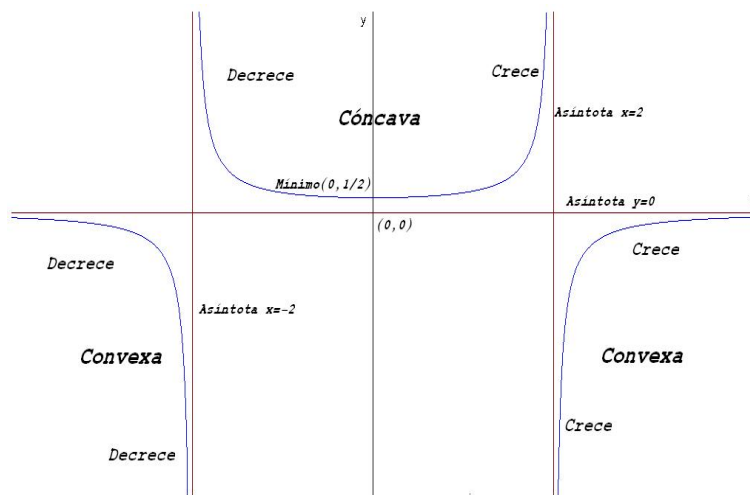
	$(-\infty, -2)$	$(-2, 2)$	$(2, \infty)$
$f''(x)$	—	+	—
$f(x)$	Convexa	Cóncava	Convexa

c)

$$f'(x) = \frac{2x}{(4-x^2)^2} = 0 \implies x = 0$$

	$(-\infty, 0)$	$(0, \infty)$
$f''(x)$	$-$	$+$
$f(x)$	Decrece	Crece

Luego en el punto $(0, 1/4)$ la función presenta un mínimo.



2.2. Modelo 2001 - Opción B

Problema 2.2.1 (2 puntos) Los vértices de un triángulo son $A(-2, -1)$, $B(7, 5)$ y $C(x, y)$.

- Calcular el área del triángulo en función de x e y .
- Encontrar el lugar geométrico de los puntos (x, y) tales que la anterior área es 36.

Solución:

a)

$$\begin{cases} \overrightarrow{AC} = (x+2, y+1, 0) \\ \overrightarrow{AB} = (9, 6, 0) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} |\overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{AB}| = \frac{1}{2} \left| \begin{vmatrix} i & j & k \\ x+2 & y+1 & 0 \\ 9 & 6 & 0 \end{vmatrix} \right| = \\ &= \frac{1}{2} |(0, 0, 6x - 9y + 3)| = \frac{3}{2} (2x - 3y + 1) \end{aligned}$$

b)

$$\frac{3}{2}(2x - 3y + 1) = 36 \implies 2x - 3y - 23 = 0$$

Problema 2.2.2 (2 puntos) Sea $A(1, 1)$ y $B(-1, 1)$ dos puntos del plano.

- a) Determinar las ecuaciones de todas las circunferencias que pasan por los puntos A y B razonando dónde están situados sus centros.
- b) De entre las circunferencias del apartado anterior hallar el centro y el radio de la que es tangente a la recta $y = x$.

Solución:

- a) Los centros de las circunferencias están en la mediatriz que une los dos puntos, es decir, la recta $x = 0$. Luego el centro de ellas es de la forma $C(0, a)$ y el radio $r = d(C, A) = \sqrt{a^2 - 2a + 2}$. La ecuación de una circunferencia con este centro y este radio es:

$$x^2 + (y - a)^2 = a^2 - 2a + 2 \implies x^2 + y^2 - 2ay + 2a - 2 = 0$$

- b) Si la recta $y = x$ es tangente a la circunferencia y el punto de tangencia tiene que ser $A(1, 1)$, necesariamente.

Una recta perpendicular a $y = x$ tiene de pendiente $m = -1$.

Construimos una recta con esta pendiente que pase por A :

$$y - 1 = -(x - 1) \implies x + y - 2 = 0$$

Esta recta corta a $x = 0$ en el punto $(0, 2)$, que será el centro de la circunferencia. Y el radio $r = |\overrightarrow{CP}| = \sqrt{2}$. Luego la circunferencia buscada es

$$x^2 + (y - 2)^2 = 2 \implies x^2 + y^2 - 2y + 2 = 0$$

Problema 2.2.3 (3 puntos)

- a) (1,5 puntos) Discutir en función de los valores de k y resolver cuando tenga más de una solución, el sistema

$$\begin{cases} x+ & y+ & 2z = 3 \\ 2x- & y+ & kz = 9 \\ x- & y- & 6z = 5 \end{cases}$$

- b) (1,5 puntos) Si el rango de la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & k & 9 \\ 1 & -1 & -6 & 5 \end{pmatrix}$ es 2, determinar una combinación lineal nula de los vectores fila $\vec{F}_1, \vec{F}_2$ y $\vec{F}_3$, así como una combinación lineal nula de los vectores columna $\vec{C}_1, \vec{C}_2, \vec{C}_3$ y $\vec{C}_4$.

Solución:

a)

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & k & 9 \\ 1 & -1 & -6 & 5 \end{array} \right), \quad |A| = 2k + 16 = 0 \implies k = -8$$

- Si $\lambda \neq -8 \implies |A| \neq 0 \implies \text{Rango}(A) = 3 = \text{Rango}(\overline{A}) = n^\circ$ de incógnitas $\implies$ Sistema Compatible Determinado. (Solución única)
- Si $\lambda = -8$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & -8 & 9 \\ 1 & -1 & -6 & 5 \end{array} \right), \quad \left| \begin{array}{cc} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{array} \right| = -3 \neq 0 \implies \text{Rango}(A) = 2$$

$$|A| = 0, \quad |A_2| = 0, \quad |A_3| = 0, \quad |A_4| = 0$$

Luego tenemos que $\text{Rango}(A) = 2 = \text{Rango}(\overline{A}) < n^\circ$ incógnitas $\implies$ Sistema Compatible Indeterminado. (Infinitas soluciones)

Podemos tachar la tercera ecuación y nos queda el sistema

$$\begin{cases} x + y + 2z = 3 \\ 2x - y - 8z = 9 \end{cases} \implies \begin{cases} x = 4 + 2\lambda \\ y = -1 - 4\lambda \\ z = \lambda \end{cases}$$

b)

$$\vec{F}_3 + a\vec{F}_1 + b\vec{F}_2 = (0, 0, 0, 0) \implies a = \frac{1}{3}, \quad b = -\frac{2}{3}$$

$$\frac{1}{3}\vec{F}_1 - \frac{2}{3}\vec{F}_2 + \vec{F}_3 = \vec{O}$$

$$4\vec{C}_1 - \vec{C}_2 + 0\vec{C}_3 - \vec{C}_4 = \vec{O}$$

Problema 2.2.4 (3 puntos)

a) (1,5 puntos) Hallar el valor de la integral definida

$$\int_{-10}^{-1} \frac{e^x dx}{\sqrt{1-e^x}}$$

b) (1,5 puntos) Calcular la integral indefinida de la función

$$f(x) = \frac{1}{1-e^x}$$

mediante un cambio de variable.

Solución:

a)

$$\begin{aligned} \int_{-10}^{-1} \frac{e^x dx}{\sqrt{1-e^x}} &= - \int_{-10}^{-1} (1-e^x)^{-1/2} e^x dx = \\ &= -2\sqrt{1-e^x} \Big|_{-10}^{-1} = 0,4098344043 \end{aligned}$$

b) $t = 1 - e^x \implies dt = -e^x dx = (t-1)dx \implies dx = \frac{dt}{t-1}$

$$\int \frac{1}{1-e^x} dx = \int \frac{1}{t(t-1)} dt = -\ln|t| + \ln|t-1| = \ln \frac{e^x}{1-e^x} + C$$

$$\frac{1}{t(t-1)} = \frac{A}{t} + \frac{B}{t-1} = \frac{A(t-1) + Bt}{t(t-1)}$$

$$\begin{cases} t=1 \implies B=1 \\ t=0 \implies A=-1 \end{cases}$$

2.3. Junio 2001 - Opción A

Problema 2.3.1 (2 puntos) Dado el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x + y + 2z = 2 \\ 2x - y + 3z = 2 \\ 5x - y + az = 6 \end{cases}$$

a) (1 punto) Discutirlo según los valores del parámetro a .

b) (1 punto) Resolverlo cuando tenga infinitas soluciones.

Solución:

a)

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 3 & 2 \\ 5 & -1 & a & 6 \end{array} \right), \quad |A| = -3a + 24 = 0 \implies a = 8$$

■ Si $a \neq 8 \implies \text{Rango}(\overline{A}) = \text{Rango}(A) = 3 = \text{n}^\circ \text{ de incógnitas} \implies \text{SCD}$.

■ Si $a = 8$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 3 & 2 \\ 5 & -1 & 8 & 6 \end{array} \right)$$

$$\left| \begin{array}{cc} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{array} \right| = -3 \neq 0 \implies \text{Rango}(A) = 2. \text{ Estudiamos el } \text{Rango}(\overline{A}):$$

$$|A_1| = |A| = 0, \quad |A_2| = \left| \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 2 \\ 5 & 8 & 6 \end{array} \right| = 0$$

$$|A_3| = \left| \begin{array}{ccc} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 5 & -1 & 6 \end{array} \right| = 0, \quad |A_3| = \left| \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 2 \\ -1 & 3 & 2 \\ -1 & 8 & 6 \end{array} \right| = 0$$

Luego $\text{Rango}(\overline{A}) = 2 = \text{Rango}(A) = \text{n}^\circ \text{ de incógnitas} \implies \text{SCI}$. El sistema tiene infinitas soluciones.

b) Si $a = 8$ por el menor elegido podemos eliminar la tercera ecuación.

$$\left\{ \begin{array}{l} x + y + 2z = 2 \\ 2x - y + 3z = 2 \end{array} \right. \implies \left\{ \begin{array}{l} x + y = 2 - 2z \\ 2x - y = 2 - 3z \end{array} \right. \implies \left\{ \begin{array}{l} x = 4/3 - 5/3\lambda \\ y = 2/3 - 1/3\lambda \\ z = \lambda \end{array} \right.$$

Problema 2.3.2 (2 puntos) Sea k un número natural y sean las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

a) (1 punto) Calcular A^k .

b) (1 punto) Hallar la matriz X que verifica la ecuación $A^k X = BC$.

Solución:

a)

$$A^1 = A, \quad A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^k = \begin{pmatrix} 1 & k & k \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

b) $A^k X = BC \implies X = (A^k)^{-1} BC$

$$BC = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$(A^k)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -k & -k \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} 1 & -k & -k \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

Problema 2.3.3 (3 puntos) Dado el plano $\pi : x + y + z = 1$, la recta $r : (x, y, z) = (1, 0, 0) + \lambda(0, 1, 1)$, y el punto $P(1, 1, 0)$, se pide:

- (1 punto) Hallar la ecuación de la recta s que sea perpendicular a r y pase por P .
- (1 punto) Hallar el punto P' , simétrico de P respecto de r .
- (1 punto) Hallar el punto P'' , simétrico de P respecto de π .

Solución:

- a) Hallamos un plano perpendicular a r que contenga a P

$$\pi_1 : \begin{cases} \vec{u}_{\pi_1} = \vec{u}_r = (0, 1, 1) \\ P(1, 1, 0) \end{cases} \implies y + z + \lambda = 0 \implies 1 + \lambda = 0$$

Como $\lambda = -1 \implies \pi_1 : y + z - 1 = 0$.

Ahora encontramos el punto de corte de este plano π_1 con la recta r :

$$r : \begin{cases} x = 1 \\ y = \lambda \\ z = \lambda \end{cases} \implies \lambda + \lambda - 1 = 0 \implies \lambda = \frac{1}{2}$$

El punto de corte será $Q\left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

La recta que buscamos pasa por P y por Q :

$$s : \begin{cases} \vec{u}_s = \overrightarrow{PQ} = (0, 1/2, -1/2) \\ P_s = P(1, 1, 0) \end{cases} \implies \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 + 1/2t \\ z = -1/2t \end{cases}$$

- b) El simétrico de P respecto de r será el simétrico de P respecto del punto Q hallado en el apartado anterior:

$$Q = \frac{P + P'}{2} \implies P' = 2Q - P = (1, 0, 1)$$

- c) Primero hallamos la ecuación de la recta t perpendicular a π que pasa por P :

$$t : \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 1 + \lambda \\ z = \lambda \end{cases}$$

Ahora hallamos el punto de corte de esta recta t con el plano π :

$$(1 + \lambda) + (1 + \lambda) + \lambda = 1 \implies \lambda = -\frac{1}{3} \implies$$

El punto de corte será $R\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\right)$.

Este punto R es el punto medio entre P y su simétrico P' :

$$R = \frac{P + P'}{2} \implies P' = 2R - P = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{2}{3}\right)$$

Problema 2.3.4 (3 puntos) Sea la función $f(x) = \sin x$

- a) (0,5 puntos) Calcular $a > 0$ tal que el área encerrada por la gráfica de f , el eje $y = 0$, y la recta $x = a$, sea $\frac{1}{2}$.
- b) (1 punto) Calcular la ecuación de la tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = \frac{\pi}{4}$
- c) (1,5 puntos) Calcular el área de la superficie encerrada por la tangente anterior, la gráfica de la función f y las rectas $x = \frac{\pi}{4}$, $x = \frac{3\pi}{4}$.

Solución:

a)

$$\int_0^a \sin x \, dx = -\cos x \Big|_0^a = -\cos a + 1 = \frac{1}{2} \implies a = \frac{\pi}{3}$$

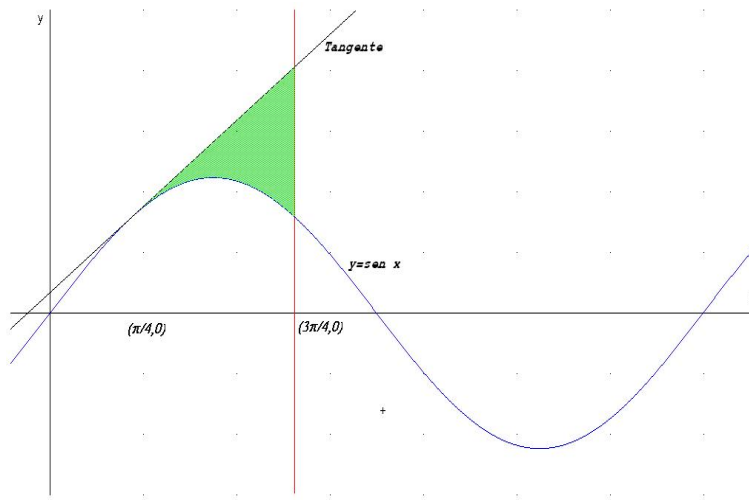
b)

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$f'(x) = \cos x \implies m = f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

La recta tangente es

$$y - \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \left(x - \frac{\pi}{4}\right)$$



c) Calculamos la primitiva de $f(x) - g(x)$:

$$F(x) = \int \left[\sin x - \frac{\sqrt{2}}{2} \left(x - \frac{\pi}{4} + 1\right) \right] dx = -\cos x - \frac{\sqrt{2}}{2} \left(\frac{x^2}{2} - \frac{\pi x}{4} + x\right)$$

$$S = \left| F\left(\frac{3\pi}{4}\right) - F\left(\frac{\pi}{4}\right) \right| = \left| -\frac{\sqrt{2}\pi^2}{16} - \frac{\sqrt{2}\pi}{4} + \sqrt{2} \right| = \frac{\sqrt{2}}{16}(\pi^2 + 4\pi - 16)$$

2.4. Junio 2001 - Opción B

Problema 2.4.1 (2 puntos) Sea la función real de variable real definida por

$$f(x) = \begin{cases} (2-x)^3 & \text{si } x \leq 1 \\ x^2 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

- a) (0,5 puntos) Razonar si la función es continua en toda la recta real.
- b) (0,5 puntos) Razonar si f es derivable en toda la recta real.
- c) (1 punto) Determinar el área encerrada por la gráfica de f y por las tres rectas $y = 8$, $x = 0$, $x = 2$.

Solución:

- a) Las dos ramas son continuas, el único punto en el que puede haber discontinuidad es en $x = 1$:

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (2 - x)^3 = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} x^2 = 1$$

Como además $f(1) = 1$, podemos concluir que f es continua en R .

- b)

$$f'(x) = \begin{cases} -3(2-x)^2 & \text{si } x \leq 1 \\ 2x & \text{si } x > 1 \end{cases} \implies \begin{cases} f'(1^-) = -3 \\ f'(1^+) = 2 \end{cases}$$

Como $f'(1^-) \neq f'(1^+) \implies f$ no es derivable en $x = 1$.

- c)

$$S_1 = \int_0^1 (8 - (2-x)^3) dx = \left[\frac{x^4}{4} - 2x^3 + 6x^2 \right]_0^1 = \frac{17}{4}$$

$$S_2 = \int_1^2 (8 - x^2) dx = \left[8x - \frac{x^3}{3} \right]_1^2 = \frac{17}{3}$$

$$S = |S_1| + |S_2| = \frac{17}{4} + \frac{17}{3} = \frac{119}{12} u^2$$

Problema 2.4.2 (2 puntos)

- a) (1 punto) Determinar los extremos relativos de la función $f(x) = x^2 - 4x + 2$. Dibujar su gráfica
- b) (1 punto) Hallar las ecuaciones de las dos rectas tangentes a la gráfica de f que pasan por el punto $P(3, -5)$.

Solución:

- a)

$$f(x) = x^2 - 4x + 2 \implies f'(x) = 2x - 4 = 0 \implies x = 2$$

$$f''(x) = 2 \implies f''(2) = 2 > 0 \implies \text{Mínimo}$$

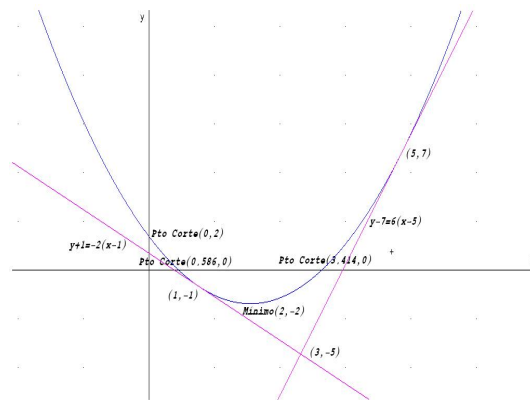
Luego tiene un mínimo en el punto $(2, -2)$

Se trata de una parábola vertical con vértice en el punto $(2, -2)$. Para dibujarla tan sólo será necesario encontrar los puntos de corte con los ejes:

Corte con el eje OX : hacemos $f(x) = 0 \Rightarrow x^2 - 4x + 2 \Rightarrow x = 2 \pm \sqrt{2}$

Corte con el eje OY : hacemos $x = 0 \Rightarrow f(0) = 2$

Los puntos serán: $(0, 2)$, $(2 - \sqrt{2}, 0)$ y $(2 + \sqrt{2}, 0)$.



b) La ecuación de una recta que pase por $(3, -5)$ es

$$y + 5 = m(x - 3), \text{ y } f'(x) = 2x - 4$$

Si el punto de tangencia con la gráfica es (a, b) tenemos

$$b + 5 = m(a - 3), \quad m = f'(a) = 2a - 4 \quad \text{y} \quad b = a^2 - 4a + 2$$

$$b + 5 = (2a - 4)(a - 3) \quad \text{y} \quad b = a^2 - 4a + 2 \Rightarrow a = 1, \quad a = 5$$

Los puntos de tangencia son: $(1, -1)$ y $(5, 7)$. Ahora calculamos las rectas tangentes en estos puntos

- En $(1, -1)$ la pendiente vale $m = -2$: $y + 1 = -2(x - 1)$
- En $(5, 7)$ la pendiente vale $m = 6$: $y - 7 = 6(x - 5)$

Problema 2.4.3 (3 puntos) Se considera el sistema de ecuaciones

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \lambda \\ 1 & \lambda & 1 \\ \lambda & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- a) (1 punto) Discutirlo según los valores del parámetro real λ .
- b) (1 punto) Resolverlo para $\lambda = -3$.
- c) (1 punto) Resolverlo para $\lambda = 1$.

Solución:

a)

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & \lambda \\ 1 & 1 & \lambda & 1 \\ 1 & \lambda & 1 & 1 \\ \lambda & 1 & 1 & 1 \end{array} \right), \quad |\overline{A}| = (3+\lambda)(\lambda-1)^3 = 0 \implies \lambda = 1, \lambda = -3$$

- Si $\lambda \neq 1$ y $\lambda \neq -3 \implies \text{Rango}(\overline{A}) = 4 \neq \text{Rango}(A) \implies \text{SI.}$
- Si $\lambda = -3$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & -3 & 1 \\ 1 & -3 & 1 & 1 \\ -3 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right) \quad \text{y} \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \\ 1 & -3 & 1 \end{vmatrix} = -16 \neq 0$$

Tenemos que $\text{Rango}(\overline{A}) = 3 = \text{Rango}(A) = n^\circ \text{ de incógnitas} \implies \text{SCD.}$

- Si $\lambda = 1$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right)$$

Tenemos que $\text{Rango}(\overline{A}) = 1 = \text{Rango}(A) < n^\circ \text{ de incógnitas} \implies \text{SCI.}$

- b) Si $\lambda = -3$ quitamos la cuarta ecuación y nos queda el sistema:

$$\begin{cases} x+ & y+ & z = & -3 \\ x+ & y+ & -3z = & 1 \\ x- & 3y+ & z = & 1 \end{cases} \implies \begin{cases} x = -1 \\ y = -1 \\ z = -1 \end{cases}$$

- c) Si $\lambda = 1$ tenemos que suprimir tres ecuaciones y nos queda $x + y + z = -3$, se trata de un plano, en forma paramétrica será:

$$\begin{cases} x = -3 - \lambda - \mu \\ y = \lambda \\ z = \mu \end{cases}$$

Problema 2.4.4 (3 puntos) Sean las rectas

$$r : x - 2 = \frac{y - 1}{k} = \frac{z + 1}{-2} \quad s : \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 2 - \lambda \\ z = 2\lambda \end{cases}$$

- a) (1 punto) Hallar k para que r y s sean coplanarias.
- b) (1 punto) Para el valor anterior de k , hallar la ecuación del plano que contiene a ambas rectas.
- c) (1 punto) Para el valor anterior de k , hallar la ecuación de la recta perpendicular común a las rectas dadas.

Solución:

a)

$$r : \begin{cases} \vec{u}_r = (1, k, -2) \\ P_r(2, 1, -1) \end{cases} \quad s : \begin{cases} \vec{u}_s = (1, -1, 2) \\ P_s(1, 2, 0) \end{cases} \quad \overrightarrow{P_r P_s} = (-1, 1, 1)$$

$$\begin{vmatrix} 1 & k & -2 \\ 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \implies k = -1$$

Si $k = -1$ las dos rectas son coplanarias.

b)

$$r : \begin{cases} \vec{u}_r = (1, -1, -2) \\ P_r(2, 1, -1) \end{cases} \quad s : \begin{cases} \vec{u}_s = (1, -1, 2) \\ P_s(1, 2, 0) \end{cases} \quad \overrightarrow{P_r P_s} = (-1, 1, 1)$$

$$\pi : \begin{vmatrix} 1 & 1 & x - 1 \\ -1 & -1 & y - 2 \\ -2 & 2 & z \end{vmatrix} = 0 \implies x + y - 3 = 0$$

c) Calculamos el punto de corte

$$r : \begin{cases} x = 2 + \lambda \\ y = 1 - \lambda \\ z = -1 - 2\lambda \end{cases} \quad s : \begin{cases} x = 1 + \mu \\ y = 2 - \mu \\ z = 2\mu \end{cases} \implies \lambda = -\frac{3}{4}, \quad \mu = \frac{1}{4}$$

El punto es $P\left(\frac{5}{4}, \frac{7}{4}, \frac{1}{2}\right)$.

El vector director de la recta es

$$\vec{u}_t = \vec{u}_r \times \vec{u}_s = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & -1 & -2 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = -4(1, 1, 0)$$

$$t : \begin{cases} \vec{u}_t = (1, 1, 0) \\ P_r(5/4, 7/4, 1/2) \end{cases} \implies \begin{cases} x = 5/4 + \lambda \\ y = 7/4 + \lambda \\ z = 1/2 \end{cases}$$

2.5. Septiembre 2001 - Opción A

Problema 2.5.1 (2 puntos) Determinar la ecuación cartesiana de los puntos del lugar geométrico de los puntos del plano tales que la suma de los cuadrados de sus distancias a los puntos $(0, 0)$ y $(1, 1)$ es igual a 9. Si se trata de una curva cerrada, calcular el área que encierra.

Solución:

LLamamos $O(0, 0)$, $A(1, 1)$ y $P(x, y)$:

$$|\vec{OP}| = |\vec{AP}| \implies x^2 + y^2 - x - y - \frac{7}{2} = 0$$

Se trata de una circunferencia de centro $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ y radio $r = 2$. Luego el área será: $S = \pi r^2 = 4\pi u^2$.

Problema 2.5.2 (2 puntos) Sean A , B y C tres puntos del espacio tridimensional que verifican la relación

$$\vec{CB} = -3\vec{CA}$$

- (1 punto) Calcular el valor que toma k en la expresión $\vec{AC} = k\vec{AB}$
- (1 punto) Si $A(1, 2, -1)$ y $B(3, 6, 9)$, hallar las coordenadas del punto C que cumple la relación de partida.

Solución:

- Como $\vec{AC} = \vec{AB} + \vec{BC}$ y $\vec{BC} = 3\vec{CA} = -3\vec{AC}$ tenemos

$$\vec{AC} = \vec{AB} - 3\vec{AC} \implies 4\vec{AC} = \vec{AB} \implies k = \frac{1}{4}$$

- Volvemos a utilizar la propiedad triangular, para ello cogemos como punto auxiliar el $O(0, 0, 0)$ y el resultado del apartado anterior:

$$\vec{OC} = \vec{OA} + \vec{AC} = \vec{OA} + \frac{1}{4}\vec{AB} = (1, 2, -1) + \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2}\right) = \left(\frac{3}{2}, 3, \frac{3}{2}\right)$$

$$\text{Luego } C\left(\frac{3}{2}, 3, \frac{3}{2}\right)$$

Problema 2.5.3 (3 puntos) Se consideran las funciones $f(x) = x^2 - 2x + 3$, $g(x) = ax^2 + b$

- (1 punto) Calcular a y b para que las gráficas de f y g sean tangentes en el punto de abscisa $x = 2$.
- (1 punto) Para los valores de a y b calculados en el apartado anterior, dibujar las gráficas de ambas funciones y hallar la ecuación de la recta tangente común.
- (1 punto) Para los mismos valores de a y b , hallar el área limitada por las gráficas de las funciones y el eje vertical.

Solución:

- Se tiene que cumplir que $f(2) = g(2)$ y que $f'(2) = g'(2)$:

$$f(2) = 3 = 4a + b$$

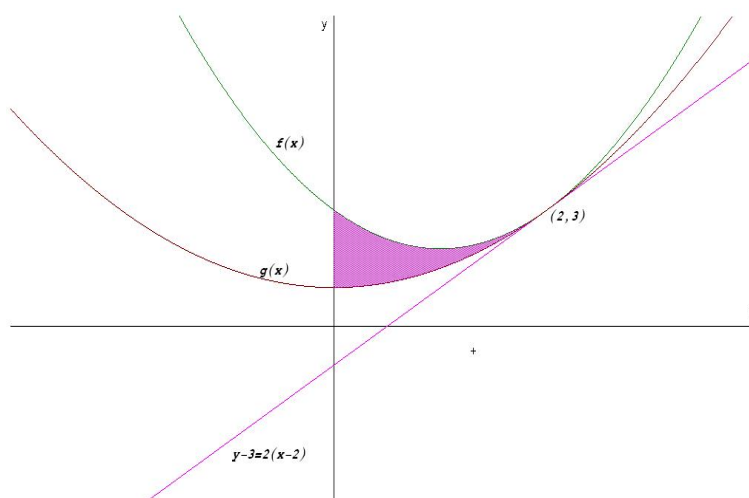
$$f'(x) = 2x - 2 \implies f'(2) = 2, \quad g'(x) = 2ax \implies g'(2) = 4a$$

luego $4a = 2 \implies a = \frac{1}{2}$ y $b = 1$. Con lo que

$$g(x) = \frac{x^2}{2} + 1$$

- En ambas funciones la pendiente en $x = 2$ vale $m = f'(2) = 2$ y el punto de tangencia común a ambas funciones es $(2, 3)$. La recta tangente es

$$y - 3 = 2(x - 2)$$



c) El área buscada sería:

$$S = \int_0^2 \left(x^2 - 2x + 3 - \frac{x^2}{2} + 1 \right) dx = \int_0^2 \left(\frac{x^2}{2} - 2x + 2 \right) dx =$$

$$= \left[\frac{x^3}{6} - x^2 + 2x \right]_0^2 = \frac{4}{3} u^2$$

Problema 2.5.4 (3 puntos) Sea el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} ax + y + 4z = 1 \\ -x + ay - 2z = 1 \\ y + z = a \end{cases}$$

- a) (1 punto) Discutir el sistema según los valores del parámetro a .
- b) (1 punto) Resolver el sistema para $a = 2$.
- c) (1 punto) Resolver el sistema para $a = 1$.

Solución:

a)

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} a & 1 & 4 & 1 \\ -1 & a & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & a \end{array} \right), \quad |A| = a^2 + 2a - 3 = 0 \implies a = 1, \quad a = -3$$

- Si $a \neq 1$ y $a \neq -3 \implies \text{Rango}(\overline{A}) = \text{Rango}(A) = 3 = \text{n}^\circ$ de incógnitas $\implies$ Sistema Compatible Determinado. (Solución única)
- Si $a = 1$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 4 & 1 \\ -1 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right)$$

Como la segunda columna y la cuarta son iguales $\text{Rango}(\overline{A}) = \text{Rango}(A) < \text{n}^\circ$ de incógnitas $\implies$ Sistema Compatible Indeterminado. (Infinitas soluciones)

- Si $a = -3$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} -3 & 1 & 4 & 1 \\ -1 & -3 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -3 \end{array} \right), \quad \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ -1 & -3 \end{vmatrix} = 10 \neq 0 \implies$$

$\text{Rango}(A) = 2 < \text{pero el menor}$

$$\begin{vmatrix} -3 & 1 & 1 \\ -1 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & -3 \end{vmatrix} = -28 \neq 0 \implies$$

$\text{Rango}(\bar{A}) = 3.$

Como $\text{Rango}(A) \neq \text{Rango}(\bar{A}) \implies$ Sistema Incompatible. (No tiene solución).

b) Para $a = 2$

$$\begin{cases} 2x + y + 4z = 1 \\ -x + 2y + 2z = 1 \\ y + z = 2 \end{cases} \implies \begin{cases} x = -\frac{13}{5} \\ y = \frac{3}{5} \\ z = \frac{7}{5} \end{cases}$$

c) Para $a = 1$

$$\begin{cases} x + y + 4z = 1 \\ y + z = 1 \end{cases} \implies \begin{cases} x = -3\lambda \\ y = 1 - \lambda \\ z = \lambda \end{cases}$$

2.6. Septiembre 2001 - Opción B

Problema 2.6.1 (2 puntos) Sean la función $f(t) = \frac{1}{1+e^t}$

a) (1 punto) Calcular $\int f(t)dt$

b) (1 punto) Se definen $g(x) = \int_0^x f(t)dt$. Calcular $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x)}{x}$

Solución:

a) Hacemos el cambio de variable $1+e^t = x \implies e^t = x-1$ y $dt = \frac{1}{x-1}dx$

$$\int \frac{1}{1+e^t} dt = \int \frac{1}{x(x-1)} dx = \ln \left| \frac{x-1}{x} \right| + C = t - \ln |1+e^t| + C$$

La descomposición polinómica sería:

$$\frac{1}{x(x-1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} = \frac{A(x-1) + Bx}{x(x-1)} \implies 1 = A(x-1) + Bx$$

$$\begin{cases} x = 0 \implies A = -1 \\ x = 1 \implies B = 1 \end{cases}$$

$$\frac{1}{x(x-1)} = \frac{-1}{x} + \frac{1}{x-1}$$

b)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x)}{x} = \left[\frac{0}{0} \right]$$

Podemos aplicar la Regla de L'Hôpital para la resolución del límite. Para derivar $g(x)$ aplicamos el Teorema Fundamental del Cálculo y nos queda:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x)}{x} = \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \ln(1 + e^x)}{x} = \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{1 + e^x} = 1$$

Problema 2.6.2 (2 puntos) Sea $P(x)$ un polinomio de grado 4 tal que:

- $P(x)$ es una función par.
- Dos de sus raíces son $x = 1$ y $x = \sqrt{5}$.
- $P(0) = 5$.

Se pide:

- a) (1 punto) Hallar sus puntos de inflexión.
- b) (1 punto) Dibujar su gráfica.

Solución:

$$P(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$$

- $P(x)$ es una función par $P(-x) = P(x)$:

$$a(-x)^4 + b(-x)^3 + c(-x)^2 + d(-x) + e = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e \implies bx^3 + dx = 0$$

$$\text{Luego } P(x) = ax^4 + cx^2 + e$$

- Dos de sus raíces son $x = 1$ y $x = \sqrt{5}$:

$$\begin{cases} x = 1 \implies P(1) = 0 \implies a + c + 5 = 0 \\ x = \sqrt{5} \implies P(\sqrt{5}) = 0 \implies 5a + c + 1 = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} a = 1 \\ c = -6 \end{cases}$$

- $P(0) = 5 \implies e = 5$

El polinomio es $P(x) = x^4 - 6x^2 + 5$

- a) Tenemos: $P'(x) = 4x^3 - 12x$, $P''(x) = 12x^2 - 12$ y $P'''(x) = 24x$. Para obtener los puntos de inflexión igualamos la segunda derivada a cero:

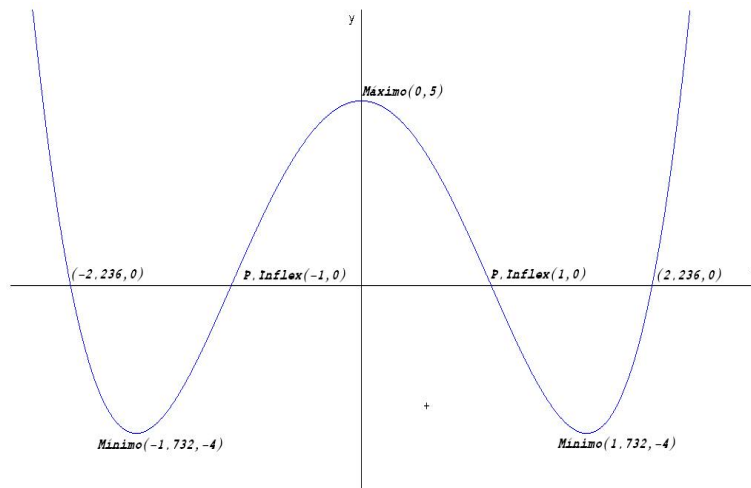
$$P''(x) = 12x^2 - 12 = 0 \implies x = \pm 1$$

Sustituimos en la tercera derivada:

$$\begin{cases} P'''(1) = 24 \neq 0 \\ P'''(-1) = -24 \neq 0 \end{cases}$$

Luego esta función tiene dos puntos de inflexión en los puntos $(1, 0)$ y $(-1, 0)$.

- b) La gráfica será la siguiente:



Calculamos sus máximos y mínimos:

$$P'(x) = 4x^3 - 12x = 0 \implies x = \pm\sqrt{3}, \quad x = 0$$

Por la segunda derivada

$$\begin{cases} P''(0) = -12 < 0 \\ P''(-\sqrt{3}) = 24 > 0 \\ P''(\sqrt{3}) = 24 > 0 \end{cases}$$

La función tiene un Máximo en el punto $(0, 5)$ y dos Mínimos en los puntos $(-\sqrt{3}, -4)$ y $(\sqrt{3}, -4)$.

Ahora calculamos puntos de corte:

Con el eje OY : Hacemos $x = 0$ y tenemos $(0, 5)$.

Con el eje OX : Hacemos $P(x) = 0$ y tenemos $(\sqrt{5}, 0)$ y $(-\sqrt{5}, 0)$.

Problema 2.6.3 (3 puntos) Se considera el tetraedro cuyos vértices son $A(1, 0, 0)$, $B(1, 1, 1)$, $C(-2, 1, 0)$ y $D(0, 1, 3)$.

- (1 punto) Hallar el área del triángulo ABC y el volumen del tetraedro $ABCD$.
- (1 punto) Calcular la distancia de D al plano determinado por los puntos A , B y C .
- (1 punto) Hallar la distancia entre las rectas AC y BD .

Solución:

- a) Tenemos:

$$\begin{cases} \overrightarrow{AB} = (0, 1, 1) \\ \overrightarrow{AC} = (-3, 1, 0) \\ \overrightarrow{AD} = (-1, 1, 3) \end{cases}$$

$$S = \frac{1}{2} \left| \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 1 & 1 \\ -3 & 1 & 0 \end{vmatrix} \right| = \frac{1}{2} |(-1, -3, 3)| = \frac{\sqrt{19}}{2} u^2$$

$$V = \frac{1}{6} \left| \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -3 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \end{vmatrix} \right| = \frac{1}{6} |7| = \frac{7}{6} u^3$$

- b) Construimos el plano π : $\begin{cases} \overrightarrow{AB} = (0, 1, 1) \\ \overrightarrow{AC} = (-3, 1, 0) \\ A(1, 0, 0) \end{cases}$

$$\pi : \begin{vmatrix} 0 & -3 & x-1 \\ 1 & 1 & y \\ 1 & 0 & z \end{vmatrix} = 0 \implies \pi : x + 3y - 3z - 1 = 0$$

$$d(D, \pi) = \frac{|0 + 3 - 9 - 1|}{\sqrt{1 + 9 + 9}} = \frac{7}{\sqrt{19}} = \frac{7\sqrt{19}}{19} u$$

- c) Calculamos las rectas r y s :

$$r : \begin{cases} \overrightarrow{AC} = (-3, 1, 0) \\ A(1, 0, 0) \end{cases} \quad s : \begin{cases} \overrightarrow{BD} = (-1, 0, 2) \\ B(1, 1, 1) \end{cases} \quad \overrightarrow{AB} = (0, 1, 1)$$

$$|[\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{BD}]| = \left| \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -3 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{vmatrix} \right| = 7$$

$$|\vec{AC} \times \vec{BD}| = \left| \begin{vmatrix} i & j & k \\ -3 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{vmatrix} \right| = |(2, 6, 1)| = \sqrt{41}$$

$$d(r, s) = \frac{|[\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{BD}]|}{|\vec{AC} \times \vec{BD}|} = \frac{7}{\sqrt{41}} = \frac{7\sqrt{41}}{41} u$$

Problema 2.6.4 (3 puntos) Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & -5 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ se pide:

- (1 punto) Comprobar que verifica la igualdad $A^3 + I = O$, siendo I la matriz identidad y O la matriz nula.
- (1 punto) Justificar que A tiene inversa y obtener A^{-1} .
- (1 punto) Calcular A^{100} .

Solución:

a)

$$A^1 = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & -5 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad A^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 4 \\ -1 & -3 & -3 \end{pmatrix}, \quad A^3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Luego } A^3 + I = -I + I = O.$$

$$\text{b) } A^3 + I = O \implies A \cdot A^2 = -I \implies A \cdot (-A^2) = I \implies A^{-1} = -A^2$$

$$A^{-1} = -A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & -4 & -4 \\ 1 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\text{c) Tenemos } A^1 = A, \quad A^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 4 \\ -1 & -3 & -3 \end{pmatrix}, \quad A^3 = -I, \quad A^4 = -A,$$

$$A^5 = -A^2, \quad A^6 = I, \dots \text{ Dividiendo 100 entre 6 el resto es 4 luego } A^{100} = A^4 = -A.$$

