Problemas de Selectividad de Matemáticas II
Comunidad de Madrid
(Resueltos)

Isaac Musat Hervás

22 de mayo de 2013

Capítulo 3

Año 2002

3.1. Modelo 2002 - Opción A

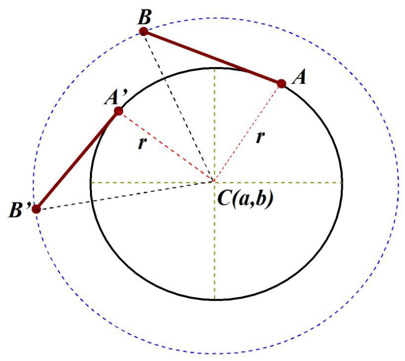
Problema 3.1.1 *(2 puntos)* Se considera una varilla $\overline{AB}$ de longitud 1. El extremo A de esta varilla recorre completamente la circunferencia de ecuación: $x^2 + y^2 - 4x - 2y + 1 = 0$; la varilla se mantiene en todo momento tangente a dicha circunferencia.

a) (1 punto) Determinar el lugar geométrico descrito por el extremo B de la varilla.

b) (1 punto) Obtener la ecuación cartesiana de dicho lugar geométrico.

Solución:

a) Veamos un dibujo aproximado:



Como se puede ver en la figura el segmento $\overline{CA} = \overline{CA'} = r$ radio de la circunferencia descrita por el punto A. El segmento $\overline{AB} = \overline{A'B'}$, ya que la varilla suponemos que siempre es del mismo tamaño. El ángulo $\widehat{CAB} = \widehat{CA'B'} = 90^{\circ}$. Luego los triángulos formados por los puntos ABC y $A'B'C$ son iguales y, por tanto, $\overline{CB} = \overline{CB'}$. En conclusión, el punto B recorre una circunfenecia de centro C y radio $R = \overline{CB}$, que sería concéntrica con la dada en el problema.

b) La circunferencia $x^2 + y^2 - 4x - 2y + 1 = 0 \Longrightarrow C(2,1), \quad r = 2.$

$$R = \sqrt{\overline{AB}^2 + r^2} = \sqrt{5}$$

La circunferencia que buscamos es de centro $C(2,1)$ y radio $R = \sqrt{5}$:

$$(x-2)^2 + (y-1)^2 = 5 \Longrightarrow x^2 + y^2 - 4x - 2y = 0$$

Problema 3.1.2 *(2 puntos)* Sean las rectas:

$$r : \left\{ \begin{array}{c} x - 2y - 6z = 1 \\ x + y = 0 \end{array} \right. \qquad s : \frac{x}{2} = \frac{y-1}{a} = z$$

a) (1 punto) Determinar la posición relativa de r y s según los valores de a.

b) (1 punto) Calcular la distancia entre las rectas r y s cuando $a = -2$:

Solución:

a)

$$r : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_r} = (2,-2,1) \\ P_r(0,0,-1/6) \end{array} \right. , \quad s : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_s} = (2,a,1) \\ P_s(0,1,0) \end{array} \right. , \quad \overrightarrow{P_rP_s} = (0,1,1/6)$$

$$A = \left(\begin{array}{ccc} 0 & 1 & 1/6 \\ 2 & -2 & 1 \\ 2 & a & 1 \end{array} \right), \quad |A| = \frac{a+2}{3} = 0 \Longrightarrow a = -2$$

Si $a \neq -2 \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow$ las dos rectas se cruzan.

Si $a = -2 \Longrightarrow \overrightarrow{u_r} = \overrightarrow{u_s} = (2,-2,1)$ y además el Rango$(A) = 2$, ya que $\left| \begin{array}{cc} 0 & 1 \\ 2 & -2 \end{array} \right| = -2 \neq 0$, luego las rectas son paralelas.

b) Cuando $a = -2$ hemos visto que las rectas son paralelas, luego

$$d(r,s) = d(P_r, s) = \frac{|\overrightarrow{P_rP_s} \times \overrightarrow{u_s}|}{|\overrightarrow{u_s}|} = \frac{\sqrt{53}}{9}$$

$$|\overrightarrow{P_rP_s} \times \overrightarrow{u_s}| = | \left| \begin{array}{ccc} i & j & k \\ 0 & 1 & 1/6 \\ 2 & -2 & 1 \end{array} \right| | = |(4/3, 1/3, -2)| = \frac{\sqrt{53}}{3}\, u$$

$$|\overrightarrow{u_s}| = 3$$

Problema 3.1.3 *(3 puntos)* Sea A una matriz cuadrada que verifica $A^2 + 2A = I$, donde I denota la matriz identidad.

a) (1 punto) Demostrar que A es no singular ($det(A) \neq 0$) y expresa A^{-1} en función de A e I.

b) (1 punto) Calcular dos números p y q tales que $A^3 = pI + qA$

c) (1 punto) Si

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & k \end{pmatrix}$$

cumple la relación de partida, calcular el valor de k.

Solución:

a) Aplicamos la propiedad $|A \cdot B| = |A| \cdot |B|$:

$$A^2 + 2A = I \Longrightarrow (A + 2I)A = I \Longrightarrow |A + 2I||A| = |I| = 1$$

Si $|A| = 0 \Longrightarrow 0 = 1$, lo que es imposible y, por tanto, la matriz A no es singular ($|A| \neq 0$). Esto quiere decir que siempre tiene inversa:

$$A^2 + 2A = I \Longrightarrow (A + 2I)A = I \Longrightarrow A^{-1} = A + 2I$$

b) $A^2 = I - 2A$

$$A^3 = A^2 \cdot A = A - 2A^2 = A - 2I + 4A = -2I + 5A$$

Luego $p = -2$ y $q = 5$.

c)

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & k \\ k & k^2+1 \end{pmatrix} \Longrightarrow A^2{+}2A = \begin{pmatrix} 1 & k+2 \\ k+2 & (k+1)^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow k = -2$$

Problema 3.1.4 *(3 puntos)* Dada la parábola $y = 4 - x^2$, se considera el triángulo rectángulo $T(r)$ formado por los ejes de coordenadas y la tangente a la parábola en el punto de abcisa $x = r > 0$.

a) (2 puntos) Hallar r para que $T(r)$ tenga área mínima.

b) (1 punto) Calcular el área de la región delimitada por la parábola, su tangente en el punto de abcisa $x = 1$, y el eje vertical.

Solución:

a) La pendiente de la recta tangente en $x = r$ es $m = -2r$, y la ecuación de esta recta será:

$$y - (4 - r^2) = -2r(x - r) \Longrightarrow 2rx + y - (4 + r^2) = 0$$

La base del triángulo que buscamos será el corte de esta recta con el eje de abcisas, haciendo $y = 0 \Longrightarrow x = \dfrac{4 + r^2}{2r}$

La altura del triángulo que buscamos será el corte de esta recta con el eje de ordenadas, haciendo $x = 0 \Longrightarrow y = 4 + r^2$.

La función a minimizar será:

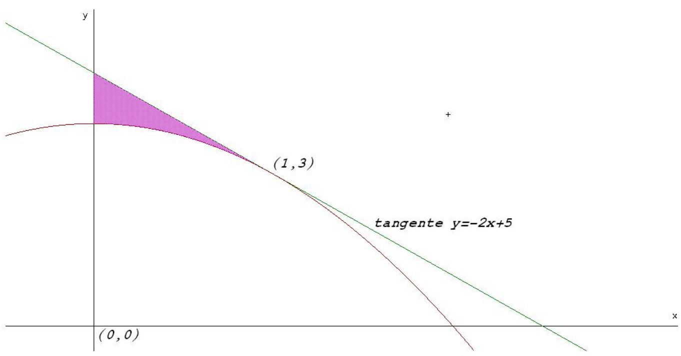
$$S(r) = \frac{\frac{4 + r^2}{2r}(4 + r^2)}{2} = \frac{(4 + r^2)^2}{4r}$$

$$S'(r) = \frac{(4 + r^2)(3r^2 - 4)}{4r^2} = 0 \Longrightarrow r = \pm\frac{2}{\sqrt{3}}$$

	$(-\infty, -2/\sqrt{3})$	$(-2/\sqrt{3}, 2/\sqrt{3})$	$(2/\sqrt{3}, \infty)$
$S'(r)$	$+$	$-$	$+$
$S(r)$	Creciente	Decreciente	Creciente

Luego la función es mínima cuando $r = \dfrac{2}{\sqrt{3}} = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}$

b) El recinto es el siguiente:



La ecuación de la recta tangente en $x = 1$ es $2x + y - 5 = 0 \Longrightarrow y = -2x + 5$. El área es el comprendido entre esta recta y la parábola en el intervalo de integración $[0, 1]$:

$$S = \left|\int_0^1 (-2x + 5 - (4 - x^2))dx\right| = \left|\int_0^1 (x^2 - 2x + 1)dx\right| =$$

$$= \left| \left[\frac{x^3}{3} - x^2 + x \right]_0^1 \right| = \left| \frac{1}{3} - 1 + 1 \right| = \frac{1}{3}\, u^2$$

3.2. Modelo 2002 - Opción B

Problema 3.2.1 *(3 puntos)* Sean las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

a) (1 punto) Calcular A^{-1}.

b) (1 punto) Resolver la ecuación matricial $AX = BA$.

Solución:

a)

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

b) $AX = BA \Longrightarrow X = A^{-1}BA$:

$$X = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Problema 3.2.2 *(2 puntos)* Sea la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Para cada número real O definimos la matriz $B = A - OI$, donde I denota la matriz identidad 2×2.

a) (1 punto) Hallar los valores de O que hacen que el determinate de B sea nulo.

b) (1 punto) Resolver el sistema

$$B \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Para los diferente valores de O.

Solución:

a)

$$B = A - OI = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} O & 0 \\ 0 & O \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-O & -3 \\ 1 & -2-O \end{pmatrix}$$

$$|B| = O^2 - 1 \Longrightarrow O = \pm 1$$

b) Se trata de un sistema homogéneo

$$B = \begin{pmatrix} 2-O & -3 \\ 1 & -2-O \end{pmatrix}$$

Por el apartado anterior tenemos que:

Si $O \neq \pm 1 \Longrightarrow |B| \neq 0 \Longrightarrow$ Sistema Compatible Determinado (solución única). La solución es la trivial $x = y = 0$.

Si $O = \pm 1 \Longrightarrow |B| = 0 \Longrightarrow$ Sistema Compatible Indeterminado (infinitas soluciones):

- Si $O = 1$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$$

tenemos $x - 3y = 0 \Longrightarrow \begin{cases} x = 3\lambda \\ y = \lambda \end{cases}$

- Si $O = -1$

$$B = \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

tenemos $x - y = 0 \Longrightarrow \begin{cases} x = \lambda \\ y = \lambda \end{cases}$

Problema 3.2.3 *(3 puntos)* Sea la circunferencia de ecuación $x^2 + y^2 - 2x - 4y + 1 = 0$.

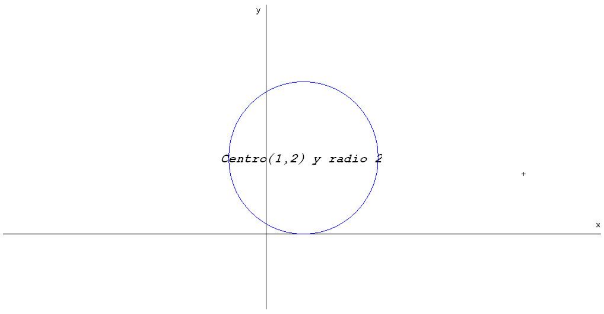
a) (1 punto) Hallar su centro y su radio y dibujarla.

b) (1 punto) Hallar el punto de la curva, de abcisa cero, más alejado del origen; hallar también la recta tangente a la curva en ese punto.

c) (1 punto) Hallar las ecuaciones de las tangentes trazadas desde el punto $P(3, 0)$ razonando la respuesta.

Solución:

a) El centro es $C(1, 2)$ y el radio $r = 2$

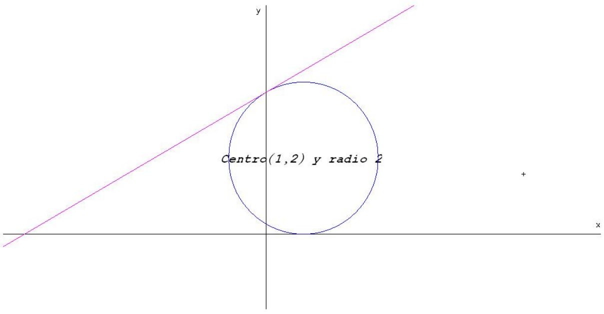


b) Para encontrar el punto hacemos $x = 0 \Longrightarrow y^2 - 4y + 1 = 0 \Longrightarrow$ $(0, 2 + \sqrt{3})$ y $(0, 2 - \sqrt{3})$. El punto más alejado es: $(0, 2 + \sqrt{3})$

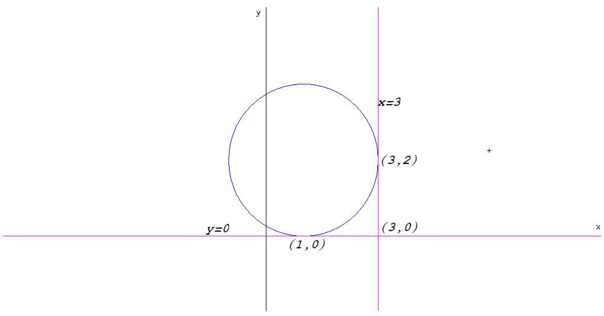
$$2xdx + 2ydy - 2dx - 4dy = 0 \Longrightarrow (2y - 4)dy = -(2x - 2)dx$$

$$y' = \frac{dy}{dx} = -\frac{2x - 2}{2y - 4} \Longrightarrow m = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

La recta tangente es $y - 2 - \sqrt{3} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}x \Longrightarrow \sqrt{3}x - 3y - 6 - 3\sqrt{3} = 0$



c) El dibujo es:



Una de ellas es el eje de abcisa $y = 0$ y tendrá de punto de tangencia el $(2,0)$, ya que el punto $(3,0)$ está en el eje de abcisas. La otra recta tangente que pase por este punto debe de ser $x=3$, ya que el punto de tangencia es el $(3,2)$.

Problema 3.2.4 *(3 puntos)* Se considera la función $f(x)=xe^{3x}$

a) (1,5 puntos) Estudiar y representar gráficamente la función f.

b) (1,5 puntos) Sabiendo que el área de la región determinada por la gráfica de f y el eje OX entre $x=0$ y $x=p$ ($p>0$) vale $1/9$, calcular el valor de p.

Solución:

a) Estudio:

- Dominio: $\text{Dom}(f)=R$
- Signo:

	$(-\infty,0)$	$(0,\infty)$
$f(x)$	$-$	$+$

- Simetría: No hay $f(-x)\neq f(x)$ y $f(-x)\neq -f(x)$
- Puntos de corte:
  - Si $x=0\Longrightarrow f(0)=0\Longrightarrow (0,0)$
  - Si $f(x)=0\Longrightarrow x)=0\Longrightarrow (0,0)$
- Asíntotas:
  - Verticales no hay
  - Horizontales:

$$\lim_{x\longrightarrow\infty} xe^{3x}=\infty$$

    $y=-x\Longrightarrow$ si $x\longrightarrow -\infty$ entonces $y\longrightarrow\infty$

$$\lim_{x\longrightarrow-\infty} xe^{3x}=\lim_{y\longrightarrow\infty} ye^{-3y}=\lim_{y\longrightarrow\infty}\frac{-y}{e^{3y}}=\left[\frac{-\infty}{\infty}\right]=\lim_{y\longrightarrow\infty}\frac{-1}{3e^{3y}}=0$$

    Luego hay una asíntota horizontal en $y=0$ cuando $x\longrightarrow -\infty$.
  - Oblicuas: No hay al haber horizontales.
- Monotonía: $f'(x)=e^{3x}(3x+1)=0\Longrightarrow x=-\dfrac{1}{3}$

	$(-\infty,-1/3)$	$(-1/3,\infty)$
$f'(x)$	$-$	$+$
$f(x)$	Decrece	Crece

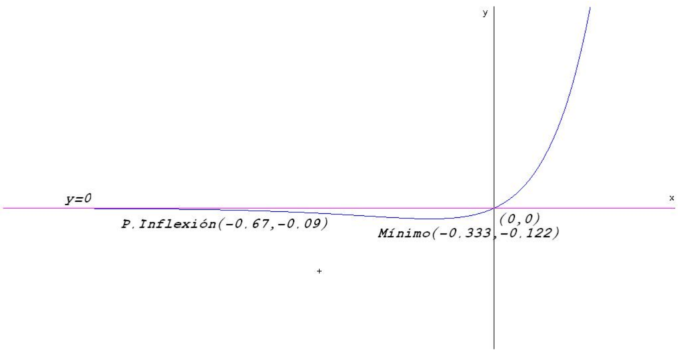
  La función presenta un mínimo en el punto $\left(-\dfrac{1}{3},-\dfrac{1}{3e}\right)$

- Curvatura: $f''(x) = 3e^{3x}(3x+2) = 0 \Longrightarrow x = -\dfrac{2}{3}$

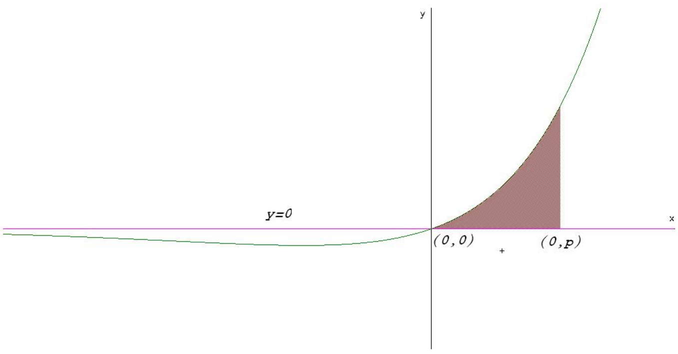
	$(-\infty, -2/3)$	$(-2/3, \infty)$
$f''(x)$	$-$	$+$
$f(x)$	Convexa	Cóncava

La función presenta un punto de inflexión en $\left(-\dfrac{2}{3}, -\dfrac{2}{3e^2}\right)$

- Representación gráfica:



b) Veamos la figura:



La integral se calcula por partes $u = x \Longrightarrow du = dx$ y $dv = e^{3x}dx \Longrightarrow v = \dfrac{1}{3}e^{3x}$:

$$\int xe^{3x}\,dx = \frac{xe^{3x}}{3} - \frac{1}{3}\int e^{3x}\,dx = \frac{xe^{3x}}{3} - \frac{1}{9}e^{3x} = e^{3x}\left(\frac{x}{3} - \frac{1}{9}\right)$$

$$\int_0^p xe^{3x}\,dx = e^{3x}\left(\frac{x}{3} - \frac{1}{9}\right)\Big]_0^p = e^{3p}\left(\frac{p}{3} - \frac{1}{9}\right) + \frac{1}{9} = \frac{1}{9}$$

$$e^{3p}\left(\frac{p}{3}-\frac{1}{9}\right)=0\Longrightarrow\frac{p}{3}-\frac{1}{9}=0\Longrightarrow p=\frac{1}{3}$$

3.3. Junio 2002 - Opción A

Problema 3.3.1 *(2 puntos)* Calcular las edades actuales de una madre y sus dos hijos sabiendo que hace 14 años la edad de la madre era 5 veces la suma de las edades de los hijos en aquel momento, que dentro de 10 años la edad de la madre será la suma de las edades que los hijos tendrán en ese momento y que cuando el hijo mayor tenga la edad actual de la madre, el hijo menor tendrá 42 años.

Solución:
Sea x la edad de la madre, y la edad del hijo mayor y z la del hijo menor:

$$\left\{\begin{array}{rl} x-14= & 5(y+z-28)\\ x+10= & y+z+20\\ x-42= & y-z \end{array}\right.\Longrightarrow\left\{\begin{array}{rrrr} x- & 5y- & 5z+ & 126=0\\ x- & y- & z- & 10=0\\ x- & y+ & z- & 42=0 \end{array}\right.$$

Multiplicamos la 2ª ecuación por -5 y la sumamos a la 1ª:

$$\left\{\begin{array}{rrrr} x- & 5y- & 5z+ & 126=0\\ -5x+ & 5y+ & 5z+ & 50=0 \end{array}\right.\Longrightarrow -4x+176=0\Longrightarrow x=44$$

Ahora por simple sustitución en la 2ª y la 3ª nos quedaría:

$$\left\{\begin{array}{rr} y+z= & 34\\ y-z= & 2 \end{array}\right.\Longrightarrow\left\{\begin{array}{l} y=18\\ z=16 \end{array}\right.$$

Problema 3.3.2 *(2 puntos)* Calcular el rango de la matriz A según los diferentes valores del parámetro real a:

$$A=\left[\begin{array}{rrrr} 2 & 0 & a & 2\\ -1 & 0 & -1 & 3\\ 5 & a+4 & -4 & -3 \end{array}\right]$$

Solución:

$$A=\left[\begin{array}{rrrr} 2 & 0 & a & 2\\ -1 & 0 & -1 & 3\\ 5 & a+4 & -4 & -3 \end{array}\right]$$

Es una matriz de dimensión 3×4 esto quiere decir que, el rango de la matriz como mucho será 3. Consideramos ahora las siguientes matrices:

$$A_1=\left(\begin{array}{rrr} 2 & 0 & a\\ -1 & 0 & -1\\ 5 & a+4 & -4 \end{array}\right)\quad A_2=\left(\begin{array}{rrr} 2 & 0 & 2\\ -1 & 0 & 3\\ 5 & a+4 & -3 \end{array}\right)$$

$$A_3 = \begin{pmatrix} 2 & a & 2 \\ -1 & -1 & 3 \\ 5 & -4 & -3 \end{pmatrix} \quad A_4 = \begin{pmatrix} 0 & a & 2 \\ 0 & -1 & 3 \\ a+4 & -4 & -3 \end{pmatrix}$$

Calculamos sus determinantes:
$|A_1| = -(a+4)(a-2) = 0 \Longrightarrow \ a = -4 \ a = 2$
$|A_2| = -8(a+4) = 0 \Longrightarrow \ a = -4$
$|A_3| = 12a + 48 = 0 \Longrightarrow \ a = -4$
$|A_4| = (a+4)(3a+2) = 0 \Longrightarrow \ a = -4 \ a = -\frac{2}{3}$ El único valor de a que anula todos los determinantes es $a = -4$. Además tenemos que $\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} \neq 0$.
Por tanto podemos concluir de la siguiente manera:
Si $a = -4$ el rango de A es 2
Si $a \neq -4$ el rango de A es 3

Problema 3.3.3 *(3 puntos)* Se consideran las cónicas C_1 y C_2 cuyas ecuaciones cartesianas son:

$$C_1 : 9x^2 + 16y^2 = 144 \quad ; \quad C_2 : 9x^2 - 16y^2 = 144$$

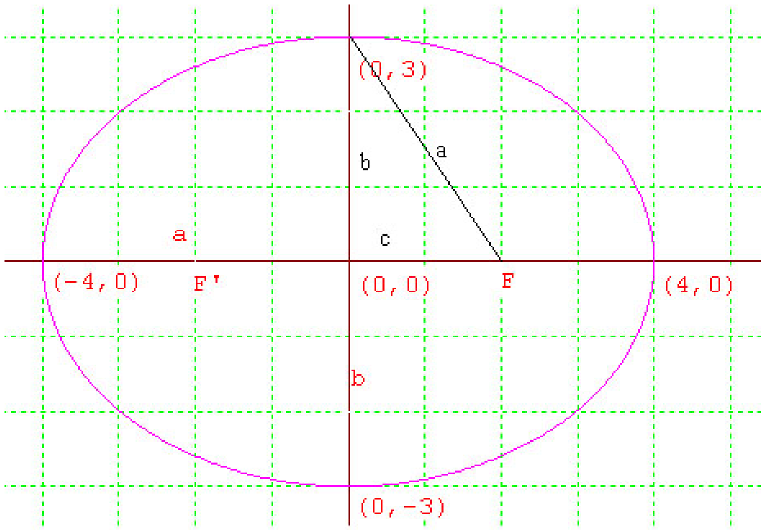
a) (2 puntos) Identificar C_1 y C_2. Especificar, para cada una de ellas, sus elementos característicos: vértices, focos, excentricidad, y asíntotas (si existen).

b) (1 punto) Hallar una ecuación cartesiana de la parábola de eje horizontal, abierta hacia la derecha y que pasa por tres de los vértices de la cónica C_1.

Solución:

a) $C_1 : 9x^2 + 16y^2 = 144 \Longrightarrow \frac{x^2}{144/9} + \frac{y^2}{144/16} = 1 \Longrightarrow \frac{x^2}{4^2} + \frac{y^2}{3^2} = 1$. Es decir, se trata de una elipse centrada en el origen con semieje mayor $a = 4$ y semieje menor $b = 3$.
Por la igualdad fundamental tenemos que $b^2 + c^2 = a^2 \Longrightarrow c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{16 - 9} = \sqrt{7}$.
Su excentricidad será: $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{7}}{4}$.
Podemos concluir:

- Focos: $F'(-\sqrt{7}, 0) \ \ F(\sqrt{7}, 0)$
- Vértices: $(-4, 0) \ (0, 3) \ (0, -3) \ (4, 0)$
- Excentricidad: $e = \frac{\sqrt{7}}{4}$
- Asíntotas: Una elipse no tiene asíntotas.



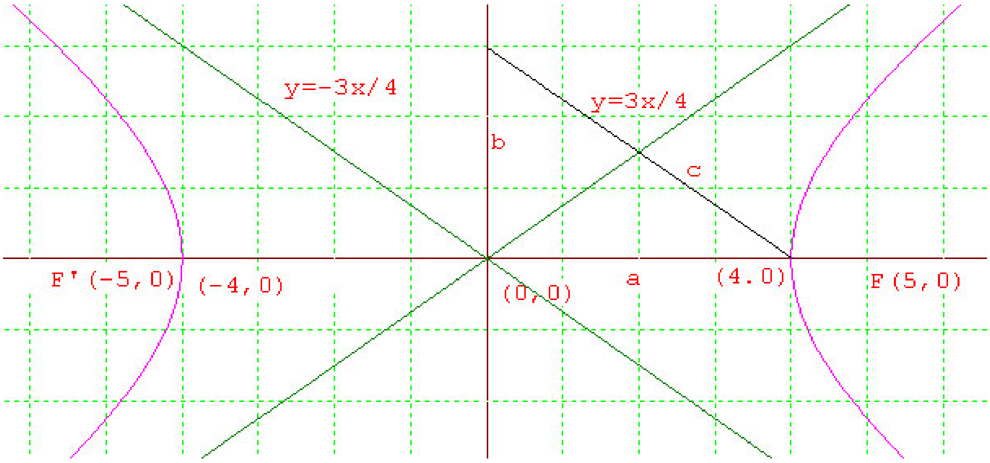
$C_2 : 9x^2 - 16y^2 = 144 \Longrightarrow \frac{x^2}{144/9} - \frac{y^2}{144/16} = 1 \Longrightarrow \frac{x^2}{4^2} - \frac{y^2}{3^2} = 1$ Es decir, se trata de una hipérbola donde $a = 4$, y $b = 3$, y se encuentra centrada en el origen.
Para calcular los focos $a^2 + b^2 = c^2 \Longrightarrow c = \sqrt{16+9} = 5$
Para calcular la excentricidad: $e = \frac{c}{a} = \frac{5}{4}$
Las pendientes de las asíntotas serían: $m = \frac{b}{a} = \frac{3}{4}$ y $m' = -\frac{b}{a} = -\frac{3}{4}$
Teniendo en cuenta que estas asíntotas pasan por el punto $(0,0)$ las rectas buscadas serían:

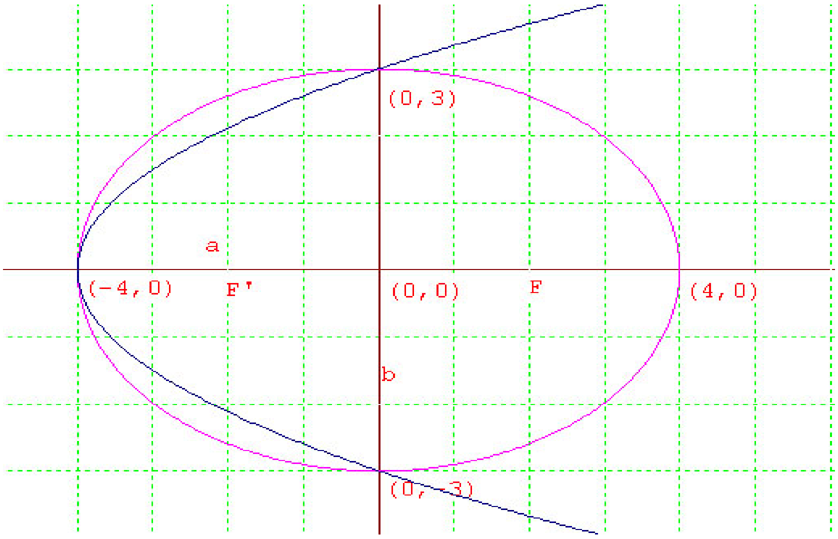
$$y = \frac{3}{4}x \quad ; \quad y = -\frac{3}{4}x$$

Podemos concluir:

- Focos: $(-5, 0) \quad (5, 0)$
- Vértices: $(-4, 0) \quad (4, 0)$
- Excentricidad: $e = \frac{5}{4}$
- Asíntotas:
$$y = \frac{3}{4}x \quad ; \quad y = -\frac{3}{4}x$$

b) La ecuación general de una parábola con vértice en el eje de abcisas y simétrica respecto a este eje es $x = ay^2 + by + c$, habrá que calcular estos coeficientes con la ayuda de los tres puntos que nos ofrece el problema.
Como pasa por el vértice $(-4, 0), (0, 3), (0, -3)$ por sustitución tendremos un sistema de tres ecuaciones con tres incognitas:





$$\left\{\begin{array}{rccc} -4 = & & & c \\ 0 = & 9a+ & 3b+ & c \\ 0 = & 9a- & 3b+ & c \end{array}\right. \Longrightarrow c = -4,\ a = \frac{4}{9}\ y\ b = 0 \Longrightarrow x = \frac{4}{9}y^2 - 4$$

Problema 3.3.4 *(3 puntos)* Se considera la función real de variable real definida por:

$$f(x) = \frac{1}{x^2+3}$$

a) (1 punto) Hallar la ecuación cartesiana de la recta tangente en el punto de inflexión de abcisa positiva de la gráfica de f.

b) (2 puntos) Calcular el área del recinto plano acotado limitado por la gráfica de f, la recta anterior y el eje $x = 0$.

Solución:

a) Para encontrar los puntos de inflexión tendremos que ver los puntos en los que se anula la segunda derivada:

$$f'(x) = \frac{-2x}{(x^2+3)^2}$$

$$f''(x) = \frac{6(x^2-1)}{(x^2+3)^3}$$

Es decir, tenemos que calcular los puntos que hacen $f''(x) = 0$. Como el denominador $(x^2+3)^3$ no se anula nunca, los puntos buscados son aquellos que anulen el numerador, $x^2 - 1 = 0 \Longrightarrow x = \pm 1$, de estas dos soluciones sólo nos interesa la positiva, que es la que nos pide el problema. Si sutituimos este punto en la función obtendremos la ordenada correspondiente: $f(1) = \frac{1}{4}$, luego la recta pedida pasará por el punto $(1, \frac{1}{4})$. Para encontrar la pediente utilizamos la primera derivada $m = f'(1) = -\frac{1}{8}$ En conclusión, la recta tangente será:

$$y - \frac{1}{4} = -\frac{1}{8}(x-1) \Longrightarrow x + 8y - 3 = 0$$

b) El recinto pedido se calcularía mediante la integral siguiente:

$$\int_0^1 \left[\frac{3-x}{8} - \frac{1}{x^2+3}\right] dx$$

Calculamos la integral

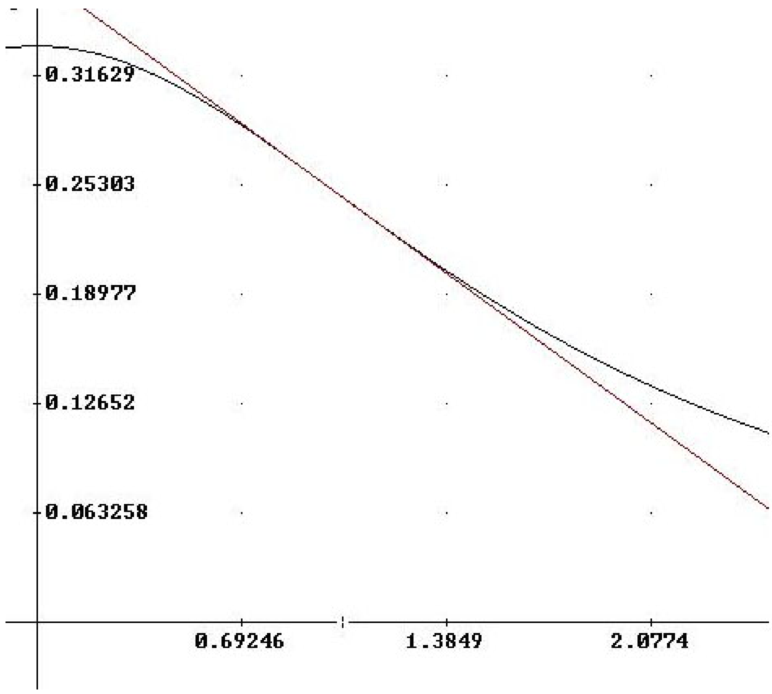
$$\int \frac{1}{x^2+3}\, dx = \int \frac{dx}{3\left[\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right)^2 + 1\right]} = \frac{1}{3}\int \frac{dx}{\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right)^2 + 1} = \frac{\sqrt{3}}{3}\int \frac{dt}{t^2+1} =$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{3}\arctan t = \frac{\sqrt{3}}{3}\arctan \frac{x}{\sqrt{3}}$$

Hemos utilizado el cambio de variable $\frac{x}{\sqrt{3}} = t \quad dx = \sqrt{3}dt$
Luego:

$$\int_0^1 \left[\frac{3-x}{8} - \frac{1}{x^2+3}\right] dx = \left[\frac{3x}{8} - \frac{x^2}{16} - \frac{\sqrt{3}}{3}\arctan\frac{x}{\sqrt{3}}\right]_0^1 =$$

$$= \frac{5}{16} - \frac{\sqrt{3}\pi}{18}$$



3.4. Junio 2002 - Opción B

Problema 3.4.1 *(2 puntos)* Hallar una ecuación cartesiana del plano que contiene a la recta r:

$$x = 1 + t \quad , \quad y = -1 + 2t \quad , \quad z = t$$

y es perpendicular al plano π:

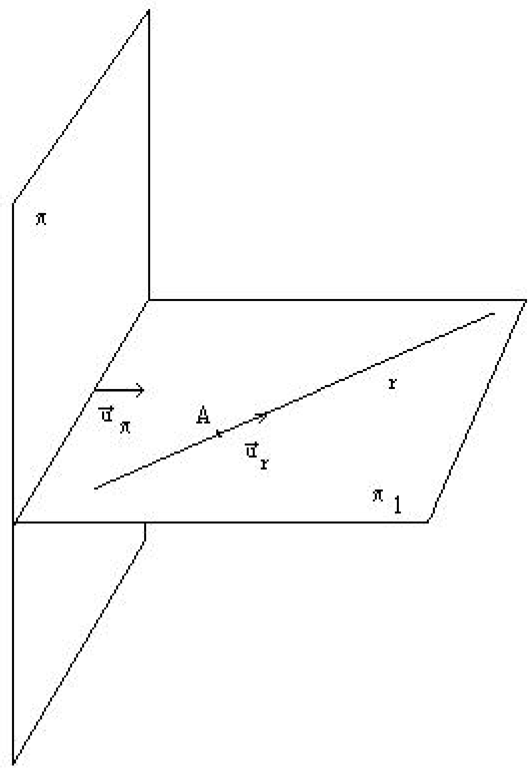
$$2x + y - z = 2.$$

Solución:
Los datos que tenemos son los siguientes:

$$r : \begin{cases} \overrightarrow{u_r} = (1, 2, 1) \\ A(1, -1, 0) \end{cases} \qquad \pi : \overrightarrow{u_\pi} = (2, 1, -1)$$

Es decir, para calcular el plano pedido tendremos los siguientes datos:

$$\pi_1 : \begin{cases} \overrightarrow{u_r} = (1, 2, 1) \\ \overrightarrow{u_\pi} = (2, 1, -1) \\ A(1, -1, 0) \end{cases}$$



La ecuación del plano vendrá dada por:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & x-1 \\ 2 & 1 & y+1 \\ 1 & -1 & z \end{vmatrix} = 0 \Longrightarrow \pi_1 : x - y + z - 2 = 0$$

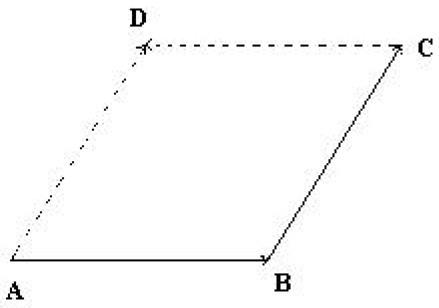
Problema 3.4.2 *(2 puntos)* Los puntos $A(1,1,1)$, $B(2,2,2)$, $C(1,3,3)$ son tres vértices consecutivos de un paralelogramo.
Se pide:

a) (1 punto) Hallar las coordenadas del cuarto vértice D y calcular el área de dicho paralelogramo.

b) (1 punto) Clasificar el paralelogramo por sus lados y por sus ángulos.

Solución:

a) Los vectores que nos proporciona el problema son:$\overrightarrow{AB} = (1,1,1)$ y $\overrightarrow{BC} = (-1,1,1)$.
Las coordenadas del punto que nos piden serán $D(x_0, y_0, z_0)$. Como $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD} \Longrightarrow (-1,1,1) = (x_0 - 1, y_0 - 1, z_0 - 1)$ y por tanto $x_0 =$



0, $y_0 = 2$ $z_0 = 2$, el punto será $D(0,2,2)$. El área del paralelogramo viene dada por $Area = |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{BC}|$

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{BC} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (0,-2,2) \Longrightarrow Area = |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{BC}| =$$

$$= \sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}$$

b) Primero comprobamos la longitud de los lados del paralelogramo, que no sera otra cosa que calcular el módulo de los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{BC}$

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{1+1+1} = \sqrt{3} \quad |\overrightarrow{BC}| = \sqrt{1+1+1} = \sqrt{3}$$

Es decir, los lados del paralelogramo son iguales, y por tanto, sólo puede ser o un cuadrado o un rombo, para diferenciarlo calculamos el ángulo que forman dos de los vectores, y en el caso de que ese ángulo fuese $\frac{\pi}{2}$ sería un cuadrado, mientras que en caso contrario sería un rombo. Cogemos $\overrightarrow{AB} = (1,1,1)$ y $\overrightarrow{AD} = (-1,1,1)$

$$\cos\alpha = \frac{x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}\sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}} = \frac{-1+1+1}{\sqrt{3}\sqrt{3}} = \frac{1}{3} \Longrightarrow \alpha \neq \frac{\pi}{2}$$

Luego se trata de un rombo.

Problema 3.4.3 *(3 puntos)* Se considera el siguiente sistema lineal de ecuaciones, dependiente del parámetro real a:

$$\left\{ \begin{array}{rrrl} x- & y & & = 2 \\ ax+ & y+ & 2z = & 0 \\ x- & y+ & az = & 1 \end{array} \right.$$

Se pide:

a) (1,5 puntos) Discutir el sistema según los diferentes valores del parámetro a.

b) (0,5 punto) Resolver el sistema para $a = -1$.

c) (1 punto) Resolver el sistema para $a = 2$.

Solución:

a) Sean las matrices A y $\overline{A}$ siguientes:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ a & 1 & 2 \\ 1 & -1 & a \end{pmatrix} \quad \overline{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ a & 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & a & 1 \end{pmatrix}$$

Vamos a calcular los valores de a que anulan el determinante de A.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ a & 1 & 2 \\ 1 & -1 & a \end{vmatrix} = a^2 + a = 0 \Longrightarrow a = 0 \quad a = -1$$

Es decir, si $a \neq 0$ y $a \neq -1$ tendríamos que $Rango(A) = Rango(\overline{A}) = 3 = \text{n}^{\text{o}}$ de incognitas; el sistema sería compatible determinado.
Si $a = 0$:

- Tenemos $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ donde podemos encontrar:

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \Longrightarrow Rango(A) = 2$$

- Tenemos $\overline{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ donde podemos encontrar:

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \Longrightarrow Rango(\overline{A}) = 3$$

- En conclusión si $a = 0$ el sistema sería incompatible.

b) Si $a = -1$:

- Tenemos $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ donde podemos encontrar:

$$\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \neq 0 \Longrightarrow Rango(A) = 2$$

- Tenemos $\overline{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ donde podemos comprobar:

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad \begin{vmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

  Es decir, $Rango(\overline{A}) = 2$.

- En conclusión, si $a = -1$: $Rango(A) = Rango(\overline{A}) = 2 <$nº de incógnitas $\Longrightarrow$ El sistema es compatible indeterminado.

c) Si $a = -1$ ya hemos visto en el apartado anterior que el sistema es compatible indeterminado, resolvemos:

$$\left\{\begin{array}{rrrl} x- & y & & = 2 \\ -x+ & y+ & 2z = & 0 \\ x- & y- & z = & 1 \end{array}\right.$$

Si a la primera le restamos la tercera nos queda $z = 1$ y si hacemos $y = \lambda$ tendríamos el resultado:

$$\left\{\begin{array}{ll} x = & 2+\lambda \\ y = & \lambda \\ z = & 1 \end{array}\right.$$

d) Si $a = 2$ ya hemos comprobado que el sistema sería compatible determinado, resolvemos:

$$\left\{\begin{array}{rrrl} x- & y & & = 2 \\ 2x+ & y+ & 2z = & 0 \\ x- & y+ & 2z = & 1 \end{array}\right.$$

Si a la tercera le restamos la primera tenemos: $2z = -1 \Longrightarrow z = -\frac{1}{2} \Longrightarrow \left\{\begin{array}{rrl} x- & y = & 2 \\ 2x+ & y = & 1 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{rr} x = & 1 \\ y = & -1 \end{array}\right.$ Es decir:

$$\left\{\begin{array}{rr} x = & 1 \\ y = & -1 \\ z = & -\frac{1}{2} \end{array}\right.$$

Problema 3.4.4 *(3 puntos)* Se considera la función:

$$f(x) = \left\{\begin{array}{lll} \frac{x^2+3x+1}{x} & si & x \ge -1 \\ & & \\ \frac{2x}{x-1} & si & x < -1 \end{array}\right.$$

a) (0,5 punto) Estudiar el dominio y la continuidad de f.

b) (1,5 puntos) Hallar las asíntotas de la gráfica de f.

c) (1 punto) Calcular el área del recinto plano acotado y limitado por la gráfica de f y las rectas $y = 0$ $x = 1$, $x = 2$.

Solución:

a) Calculamos el dominio:

- Si $x \geq 1$ tenemos que $f(x) = \frac{x^2+3x+1}{x}$ es un cociente de polinomios, y en este caso el dominio será todo el intervalo excepto en los puntos en los que se anula el denominador, es decir, $[-1, 0) \cup (0, +\infty)$.
- Si $x < -1$ tenemos que $f(x) = \frac{2x}{x-1}$, como en el caso anterior tenemos que buscar puntos que anulen el denominador, y resulta que no hay ninguno. El único plosible sería el $x = 1$, pero no pertenece al intervalo de definición, y por tanto el dominio será: $(-\infty, -1)$.
- En conclusión diremos que el dominio es: $R - \{0\}$.

Calculamos la continuidad:
La función $f(x)$ es un cociente de polinomios por ambas ramas, y por tanto continua salvo en los puntos en los que se anula el denominador, es decir, los puntos en los que es posible que no sea continua serían en $x = -1$ donde puede existir un salto y por supueto en $x = 0$, donde como hemos visto anteriormente no pertenece al dominio.

- En $x = -1$:

$$\lim_{x \longrightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \longrightarrow -1^+} \frac{x^2 + 3x + 1}{x} = 1$$

$$\lim_{x \longrightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \longrightarrow -1^-} \frac{2x}{x-1} = 1$$

$$\lim_{x \longrightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \longrightarrow -1^-} f(x) = f(-1) = 1$$

  Luego f es continua en $x = -1$.
- En $x = 0$:

$$\lim_{x \longrightarrow 0} f(x) = \lim_{x \longrightarrow 0} \frac{x^2 + 3x + 1}{x} = \infty$$

  Luego no es continua en $x = 0$.
- En conclusión: La función f es continua en $R - \{0\}$.

b) Asíntotas verticales:

- Cuando $x \geq -1$:

$$\lim_{x \longrightarrow 0} f(x) = \lim_{x \longrightarrow 0} \frac{x^2 + 3x + 1}{x} = \infty$$

  Luego $x = 0$ es una asíntota vertical en este intervalo.

- Cuando $x < -1$:
  No hay ningún valor de x que sea menor de -1 que anule el denominador, y por tanto, no hay asíntotas verticales por esta rama de la función.

Asíntotas horizontales:

- Cuando $x \geq -1$:

$$\lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{x^2 + 3x + 1}{x} = \infty$$

  Luego no hay asíntotas horizontales en este intervalo.

- Cuando $x < -1$:

$$\lim_{x \longrightarrow -\infty} \frac{2x}{x - 1} = 2$$

  Luego $y = 2$ es una asíntota horizontal en este intervalo.

Asíntotas oblicuas:
Recordamos que $y = ax + b$ es una asíntota oblicua si

$$a = \lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{f(x)}{x}$$

$$b = \lim_{x \longrightarrow \infty} (f(x) - ax)$$

- Cuando $x \geq -1$:

$$a = \lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{\frac{x^2+3x+1}{x}}{x} = 1$$

$$b = \lim_{x \longrightarrow \infty} (f(x) - ax) = \lim_{x \longrightarrow \infty} (\frac{x^2 + 3x + 1}{x} - x) =$$

$$\lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{3x + 1}{x} = 3$$

  Luego en este intervalo habrá una asíntota oblicua en la recta $y = x + 3$.

- Cuando $x < -1$:

$$a = \lim_{x\longrightarrow\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\longrightarrow\infty} \frac{\frac{2x}{x-1}}{x} = 0$$

Luego no hay asíntotas oblicuas en este intervalo.

c) El recinto comprendido entre las rectas $x = 1$ y $x = 2$ está en el intervalo $(-1, +\infty)$ donde la función es $f(x) = \frac{x^2+3x+1}{x}$ y como está limitado por la recta horizontal $y = 0$(el eje de abcisas) y la función, podemos concluir con que su área vale:

$$\int_1^2 \frac{x^2+3x+1}{x}dx = \int_1^2 (x+3+\frac{1}{x})dx = \left[\frac{x^2}{2} + 3x + \ln|x|\right]_1^2 =$$

$$= \frac{4}{2} + 6 + \ln 2 - \frac{1}{2} - 3 - \ln 1 = \frac{9}{2} + \ln 2$$

3.5. Septiembre 2002 - Opción A

Problema 3.5.1 *(2 puntos)* Se considera la función real de variable real definida por:

$$f(x) = \frac{x}{x^2+1}$$

a) (1 punto) Determinar sus máximos y mínimos relativos.

b) (1 punto) Calcular el valor de $a > 0$ para el cual se verifica la igualdad

$$\int_0^a f(x)\,dx = 1$$

Solución:

a)

$$f'(x) = \frac{1-x^2}{(x^2+1)^2} = 0 \Longrightarrow x = \pm 1$$

	$(-\infty,-1)$	$(-1,1)$	$(1,\infty)$
$f'(x)$	$-$	$+$	$-$
$f(x)$	decreciente	creciente	decreciente

Luego en el punto $(-1,-1/2)$ tenemos un Mínimo y en el punto $(1, 1/2)$ tenemos un Máximo.

b)

$$\int_0^a \frac{x}{x^2+1}\,dx = \frac{1}{2}\ln(x^2+1)\bigg]_0^a = 1 \Longrightarrow \frac{1}{2}\ln(a^2+1) = 1 \Longrightarrow a = \sqrt{e^2-1}$$

Problema 3.5.2 *(2 puntos)* Se considera la función real de variable real definida por:

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{x-2} & \text{si} \quad x \geq 2 \\ x(x-2) & \text{si} \quad x < 2 \end{cases}$$

a) (1 punto) Estudiar su continuidad y derivabilidad.

b) (1 punto) Hallar la ecuación cartesiana de la recta tangente a la gráfica de f en el punto $(3,1)$.

Solución:

a) Estudiamos en el punto $x = 2$:

Continuidad:

$$\lim_{x\longrightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x\longrightarrow 2} \sqrt[3]{x-2} = 0$$

$$\lim_{x\longrightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x\longrightarrow 2} x(x-2) = 0$$

$$f(2) = 0$$

Como

$$\lim_{x\longrightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x\longrightarrow 2} f(x) = f(2) \Longrightarrow f \text{ es continua en } x = 2$$

Derivabilidad:

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{1}{3\sqrt[3]{(x-2)^2}} & \text{si} \quad x \geq 2 \\ 2x-2 & \text{si} \quad x < 2 \end{cases}$$

$$f'(2^-) = 2, \quad f'(2^+) = \infty$$

Como

$$f'(2^-) \neq f'(2^+) \Longrightarrow f \text{ no es derivable en } x = 2$$

b) Es en la rama $x \geq 2$:

$$f(3) = 1$$

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt[3]{(x-2)^2}} \Longrightarrow m = f'(3) = \frac{1}{3}$$

$$y - 1 = \frac{1}{3}(x-3) \Longrightarrow x - 3y = 0$$

Problema 3.5.3 *(3 puntos)* Se considera el siguiente sistema de ecuaciones, dependientes del parámetro real λ:

$$\begin{cases} x+ & y+ & \lambda z = & \lambda^2 \\ & y- & z = & \lambda \\ x+ & \lambda y+ & z = & \lambda \end{cases}$$

a) (1,5 puntos) Discutir el sistema según los diferentes valores del parámetro λ.

b) (1 punto) Resolver el sistema en los caso en que sea posible.

c) (0,5 puntos) En el caso $\lambda = 2$, indicar la posición relativa de los tres planos cuyas ecuaciones forman el sistema.

Solución:

a)

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccr|c} 1 & 1 & \lambda & \lambda^2 \\ 0 & 1 & -1 & \lambda \\ 1 & \lambda & 1 & \lambda \end{array} \right) \Longrightarrow |A| = 0 \text{ siempre}$$

Si elegimos el menor

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 2 \text{ siempre}$$

Si elegimos el menor

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \lambda^2 \\ 0 & 1 & \lambda \\ 1 & \lambda & \lambda \end{vmatrix} = 2\lambda(1-\lambda) = 0 \Longrightarrow \lambda = 0 \; \lambda = 1$$

Si $\lambda = 0$ o $\lambda = 1 \Longrightarrow$ Rango$(\overline{A})$ =Rango$(A) = 2 <$nº de incógnitas y el sistema es compatible indeterminado.

Si $\lambda \neq 0$ y $\lambda \neq 1 \Longrightarrow$ Rango$(\overline{A}) = 3 \neq$Rango$(A) = 2$ y el sistema es incompatible.

b) Si $\lambda = 0$:

$$\left\{ \begin{array}{l} x + y = 0 \\ y - z = 0 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = -t \\ y = t \\ z = t \end{array} \right.$$

Si $\lambda = 1$:

$$\left\{ \begin{array}{c} x + y + z = 1 \\ y - z = 1 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = -2t \\ y = 1 + t \\ z = t \end{array} \right.$$

c) Si $\lambda = 2$ el sistema es incompatible y no tiene solución.

$$\left\{ \begin{array}{rrrr} x+ & y+ & 2z = & 4 \\ & y- & z = & 2 \\ x+ & 2y+ & z = & 2 \end{array} \right.$$

Los tres planos se cortan dos a dos

Problema 3.5.4 *(3 puntos)* Se consideran las rectas

$$r: \frac{x}{1} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z-3}{2} \quad s: \frac{x-2}{3} = \frac{y}{1} = \frac{z+1}{-1}$$

a) (1 punto) Calcular la distancia entre r y s.

b) (1 punto) Hallar las ecuaciones cartesianas de la recta perpendicular común a r y s y que corta a ambas.

c) (1 punto) Hallar unas ecuaciones cartesianas de la recta que corta a r y s y que pasa por el punto $P(1,0,0)$.

Solución:

a)

$$r: \begin{cases} \overrightarrow{u_r} = (1,-2,2) \\ P_r(0,1,3) \end{cases} \quad s: \begin{cases} \overrightarrow{u_s} = (3,1,-1) \\ P_s(2,0,-1) \end{cases} \quad \overrightarrow{P_rP_s} = (2,-1,-4)$$

$$|[\overrightarrow{P_rP_s}, \overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_s}]| = |\begin{vmatrix} 2 & -1 & -4 \\ 1 & -2 & 2 \\ 3 & 1 & -1 \end{vmatrix}| = |-35| = 35$$

$$|\overrightarrow{u_r} \times \overrightarrow{u_s}| = |\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & -2 & 2 \\ 3 & 1 & -1 \end{vmatrix}| = |(0,7,7)| = 7\sqrt{2}$$

$$d(r,s) = \frac{|[\overrightarrow{P_rP_s}, \overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_s}]|}{|\overrightarrow{u_r} \times \overrightarrow{u_s}|} = \frac{35}{7\sqrt{2}} = \frac{5\sqrt{2}}{2}\ u$$

b) La encontramos como intersección de dos planos y para ello nos apoyamos en el vector perpendicular a ambas rectas $\overrightarrow{u_t} = \overrightarrow{u_r} \times \overrightarrow{u_s} = (0,7,7)$:

$$\pi_1: \begin{cases} \overrightarrow{u_t} = (0,7,7) \\ \overrightarrow{u_r} = (1,-2,2) \\ P_r(0,1,3) \end{cases} \quad \pi_2: \begin{cases} \overrightarrow{u_t} = (0,7,7) \\ \overrightarrow{u_s} = (3,1,-1) \\ P_s(2,0,-1) \end{cases} \quad t: \begin{cases} \pi_1 \\ \pi_2 \end{cases}$$

$$\pi_1: \begin{vmatrix} 0 & 1 & x \\ 7 & -2 & y-1 \\ 7 & 2 & z-3 \end{vmatrix} = 0 \Longrightarrow 4x + y - z = -2$$

$$\pi_2: \begin{vmatrix} 0 & 3 & x-2 \\ 7 & 1 & y \\ 7 & -1 & z+1 \end{vmatrix} = 0 \Longrightarrow 2x - 3y + 3z = 1$$

$$t: \begin{cases} 4x + y - z = -2 \\ 2x - 3y + 3z = 1 \end{cases}$$

c) La encontramos como intersección de dos planos:

$$\pi_1 : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{PP_r} = (-1, 1, 3) \\ \overrightarrow{u_r} = (1, -2, 2) \\ P(1, 0, 0) \end{array} \right. \quad \pi_2 : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{PP_s} = (1, 0, -1) \\ \overrightarrow{u_s} = (3, 1, -1) \\ P(1, 0, 0) \end{array} \right. \quad t : \left\{ \begin{array}{l} \pi_1 \\ \pi_2 \end{array} \right.$$

$$\pi_1 : \left| \begin{array}{ccc} -1 & 1 & x-1 \\ 1 & -2 & y \\ 3 & 2 & z \end{array} \right| = 0 \Longrightarrow 8x + 5y + z = 8$$

$$\pi_2 : \left| \begin{array}{ccc} 1 & 3 & x-1 \\ 0 & 1 & y \\ -1 & -1 & z \end{array} \right| = 0 \Longrightarrow x - 2y + z = 1$$

$$t : \left\{ \begin{array}{l} 8x + 5y + z = 8 \\ x - 2y + z = 1 \end{array} \right.$$

3.6. Septiembre 2002 - Opción B

Problema 3.6.1 *(2 puntos)* Hallar una ecuación cartesiana del lugar geométrico de los puntos del plano cuya diferencia de distancias a los puntos $A(0, 3)$ y $B(0, -1)$ es igual a 1. Identificar dicho lugar geométrico.

Solución:

Sea $X(x, y)$ un punto genérico, tendremos:

$$d(A, X) = \sqrt{x^2 + (y-3)^2}, \quad d(B, X) = \sqrt{x^2 + (y+1)^2}$$

$$\sqrt{x^2 + (y-3)^2} - \sqrt{x^2 + (y+1)^2} = 1$$

$$4x^2 - 60y^2 + 120y - 45 = 0$$

Se trata por definición de una hipérbola.

Problema 3.6.2 *(2 puntos)* Para cada valor del parámetro real a, se consideran los tres planos siguientes:

$$\pi_1 : x + y + az = -2; \quad \pi_2 : x + ay + z = -1; \quad \pi_2 : ax + y + z = 3$$

Se pide:

a) (1,5 puntos) Calcular los valores de a para los cuales los tres planos anteriores contienen una recta común.

b) (0,5 puntos) Para los valores de a calculados, hallar unas ecuaciones cartesianas de dicha recta común.

Solución:

a)

$$\left\{\begin{array}{rrrr} x+ & y+ & az= & -2 \\ x+ & ay+ & z= & -1 \\ ax+ & y+ & z= & 3 \end{array}\right. \quad \overline{A}=\left(\begin{array}{ccc|r} 1 & 1 & a & -2 \\ 1 & a & 1 & -1 \\ a & 1 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

$$\Longrightarrow |A| = -a^3 + 3a - 2 = 0 \Longrightarrow \; a = -2, \;\; a = 1$$

Si $a \neq -2$ y $a \neq 1$ el sistema es compatible determninado y los tres planos se cortan en un punto.

Si $a = -2$ el Rango$\overline{A}$ =Rango(A) <n$^{\text{o}}$ de incógnitas con lo que el sistema es compatible indeterminado, los tres planos tienen infinitos puntos comunes. Como además no son planos coincidentes, tienen por tanto, una recta común.

Si $a = 1$ tenemos que Rango$(\overline{A}) = 2 \neq$Rango$(A) = 1$ y el sistema es incompatible.

b) Si $a = -2$

$$\left\{\begin{array}{rrrr} x+ & y- & 2z= & -2 \\ x- & 2y+ & z= & -1 \\ -2x+ & y+ & z= & 3 \end{array}\right. \Longrightarrow r: \left\{\begin{array}{l} x = -5/3 + \lambda \\ y = -1/3 + \lambda \\ z = \lambda \end{array}\right.$$

Problema 3.6.3 *(3 puntos)* Sea A una matriz cuadrada de orden n que verifica la igualdad $A^2 = I$, siendo I la matriz identidad de orden n.

Se pide:

a) (1 punto) Expresar A^{-1} en térmninos de A

b) (1 punto) Expresar A^n en términos de A e I, para cualquier número natural n.

c) (1 punto) Calcular a para que $A^2 = I$, siendo A la matriz:

$$A = \left(\begin{array}{cc} 1 & 1 \\ 0 & a \end{array}\right)$$

Solución:

a) $A^2 = A \cdot A = I \Longrightarrow A = A^{-1}$

b) $A^1 = A$, $A^2 = I$, $A^3 = A$, $A^4 = I, \cdots$ luego:

$$A^n = \begin{cases} A & \text{si} \quad n \text{ es impar} \\ I & \text{si} \quad n \text{ es par} \end{cases}$$

c)

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & a+1 \\ 0 & a^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow$$

$$\begin{cases} a+1 = 0 \Longrightarrow a = -1 \\ a^2 = 1 \Longrightarrow a = \pm 1 \end{cases} \Longrightarrow a = -1$$

Problema 3.6.4 *(3 puntos)* Sea $f(x)$ una función real de variable real, derivable y con derivada continua en todos los puntos y tal que:

$$f(0) = 1; \quad f(1) = 2; \quad f'(0) = 3; \quad f'(1) = 4.$$

Se pide:

a) (1 punto) Calcular $g'(0)$, siendo $g(x) = f(x + f(0))$.

b) (2 punto) Calcular $\lim\limits_{x \longrightarrow 0} \dfrac{2(f(x))^2 - f(x+1)}{e^x - 1}$

Solución:

a)

$$g'(x) = f'(x + f(0))(x + f(0))' = f'(x+1)(1 + f'(0)) = f'(x+1)4$$

$$g'(0) = f'(0+1)4 = 4 \cdot 4 = 16$$

b) $\lim\limits_{x \longrightarrow 0} \dfrac{2(f(x))^2 - f(x+1)}{e^x - 1} = \left[\dfrac{0}{0}\right] = \lim\limits_{x \longrightarrow 0} \dfrac{4(f(x))f'(x) - f'(x+1)}{e^x} = 8$

- El punto que buscamos P'' tiene que cumplir:

$$\frac{P+P''}{2} = P' \Longrightarrow P'' = 2P' - P = \left(\frac{4}{3}, -\frac{10}{3}, -\frac{2}{3}\right)$$

b) Calculo un plano $\pi \perp r$, que contenga a P, calculado en el apartado anterior $\pi : 2x + y - z = 0$, y el punto de corte P_1 de este plano con la recta s

$$s : \left\{ \begin{array}{l} x = 0 \\ y = 0 \\ z = \lambda \end{array} \right. \Longrightarrow 2 \cdot 0 + 0 + \lambda = 0 \Longrightarrow \lambda = 0 \Longrightarrow P_1 = O(0,0,0)$$

La recta t que buscamos pasa por los puntos O y P:

$$t : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{OP} = (0,1,1) \\ O(0,0,0) \end{array} \right. \Longrightarrow t : \left\{ \begin{array}{l} x = 0 \\ y = \lambda \\ z = \lambda \end{array} \right.$$

Problema 12.6.2 *(3 puntos).* Dado el sistema de ecuaciones lineales

$$\left\{ \begin{array}{rrrcl} 2x+ & 4y & & = & 4k \\ -k^3x+ & k^2y+ & kz & = & 0 \\ x+ & ky & & = & k^2 \end{array} \right.$$

se pide:

a) (2 puntos). Discutirlo en función del valor del parámetro k.

b) (0'5 puntos). Resolver el sistema para $k = 1$.

c) (0'5 puntos). Resolver el sistema para $k = 2$.

Solución:

a)

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{rrr|r} 2 & 4 & 0 & 4k \\ -k^3 & k^2 & k & 0 \\ 1 & k & 0 & k^2 \end{array} \right); \quad |A| = \left| \begin{array}{rrr} 2 & 4 & 0 \\ -k^3 & k^2 & k \\ 1 & k & 0 \end{array} \right| = 2k(2-k) = 0 \Longrightarrow k = 0, \quad k = 2$$

- Si $k \neq 0$ y $k \neq 2 \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow$ Rango$(A) = 3 =$Rango$(\overline{A}) =$ nº de incógnitas $\Longrightarrow SCD$ Sistema compatible determinado.
- Si $k = 0$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right); \quad \left| \begin{array}{cc} 2 & 4 \\ 1 & 0 \end{array} \right| = -4 \neq 0 \Longrightarrow$$

Rango$(A) = 2 =$Rango$(\overline{A}) <$ nº de ncógnitas $\Longrightarrow SCI$ Sistema compatible indeterminado.

- Si $k = 2$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{rrr|r} 2 & 4 & 0 & 8 \\ -8 & 4 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 4 \end{array}\right); \quad 2F_3 = F_1 \text{ y } \left|\begin{array}{rr} 2 & 4 \\ -8 & 4 \end{array}\right| = 40 \neq 0 \Longrightarrow$$

Rango$(A) = 2 =$Rango$(\overline{A}) <$ nº de ncógnitas $\Longrightarrow$ SCI Sistema compatible indeterminado.

b)

$$\left\{\begin{array}{rrrr} 2x+ & 4y & = & 4 \\ -x+ & y+ & z = & 0 \\ x+ & y & = & 1 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 0 \\ y = 1 \\ z = -1 \end{array}\right.$$

c)

$$\left\{\begin{array}{rrrr} 2x+ & 4y & = & 8 \\ -8x+ & 4y+ & 2z = & 0 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 4/5 + 1/5\lambda \\ y = 8/5 - 1/10\lambda \\ z = \lambda \end{array}\right.$$

Problema 12.6.3 *(2 puntos).* Dada la funcion

$$f(x) = \left\{\begin{array}{ccc} e^{1/x} & \text{si} & x < 0 \\ k & \text{si} & x = 0 \\ \dfrac{\cos x - 1}{\sin x} & \text{si} & x > 0 \end{array}\right.$$

hallar el valor de k para que f sea continua en $x = 0$. Justificar la respuesta.
Solución: f es continua en $x = 0$ si

$$\lim_{x \longrightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \longrightarrow 0^-} f(x) = f(0)$$

$$\lim_{x \longrightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \longrightarrow 0^-} e^{-1/x} = 0$$

$$\lim_{x \longrightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \longrightarrow 0^+} \frac{\cos x - 1}{\sin x} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x \longrightarrow 0^+} \frac{-\sin x}{\cos x} = 0$$

Como $f(0) = k \Longrightarrow k = 0$

Problema 12.6.4 *(2 puntos).*

a) (1 punto). Hallar el área del recinto limitado por la gráfica de $f(x) = -\sin x$ y el eje OX entre las abscisas $x = 0$ y $x = 2\pi$.

b) (1 punto). Hallar el volumen del sólido de revolución que se obtiene al hacer girar la gráfica de $f(x) = -\sin x$ alrededor del eje OX entre las abscisas $x = 0$ y $x = 2\pi$.

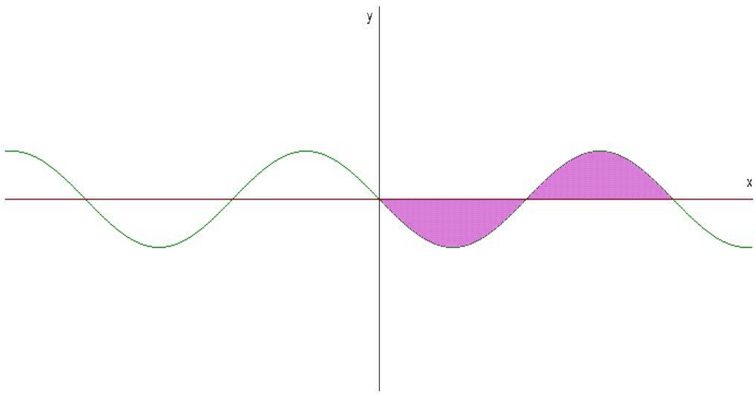
Solución:

a) $f(x) = -\sin x = 0 \Longrightarrow x = 0$ y $x = \pi$. En el intervalo $[0, 2\pi]$ hay dos recitos de integración $S_1 \equiv [0, \pi]$ y $S_2 \equiv [\pi, 2\pi]$

$$S_1 = \int_0^{\pi} (-\sin x)\, dx = \cos x]_0^{\pi} = -2$$

$$S_2 = \int_{\pi}^{2\pi} (-\sin x)\, dx = \cos x]_{\pi}^{2\pi} = 2$$

$$S = |S_1| + |S_2| = 4\ u^2$$



b)

$$V = 2\pi \int_0^{\pi} (-\sin x)^2\, dx = \pi \int_0^{\pi} (1 - \cos 2x)\, dx = \pi \left(x - \frac{1}{2} \sin 2x \right) \Big]_0^{\pi} = \pi^2\ u^3$$

Capítulo 13

Año 2012

13.1. Modelo 2012 - Opción A

Problema 13.1.1 *(3 puntos)* Dados los puntos $A(1,-1,2)$, $B(2,0,-1)$, $C(0,1,3)$, se pide:

a) (2 puntos). Hallar todos los puntos que equidistan de A, B y C. ¿Cuales de ellos pertenecen al plano $\pi: 2x+2y+2z+1=0$?

b) (1 punto). Hallar la ecuacion del plano que pasa por A, B y C.

Solución:

a) El lugar geométrico de los puntos que equidistan de A, B y C será la recta en la que se cortan los planos mediadores definidos entre A y B, entre A y C y entre B y C. Calculando dos de ellos será suficiente.

Plano mediador entre A y B:

$$\sqrt{(x-1)^2+(y+1)^2+(z-2)^2}=\sqrt{(x-2)^2+y^2+(z+1)^2}\Longrightarrow 2x+2y-6z+1=0$$

Plano mediador entre A y C:

$$\sqrt{(x-1)^2+(y+1)^2+(z-2)^2}=\sqrt{x^2+(y-1)^2+(z-3)^2}\Longrightarrow x-2y-z+2=0$$

$$r:\left\{\begin{array}{l} 2x+2y-6z+1=0\\ x-2y-z+2=0\end{array}\right.\Longrightarrow r:\left\{\begin{array}{l}\overrightarrow{u_r}=(7,2,3)\\ P_r\left(-1,\dfrac{1}{2},0\right)\end{array}\right.\Longrightarrow r:\left\{\begin{array}{l} x=-1+7\lambda\\ \\ y=\dfrac{1}{2}+2\lambda\\ \\ z=3\lambda\end{array}\right.$$

Sustituimos en el plano π:

$$2(-1+7\lambda)+2\left(\frac{1}{2}+2\lambda\right)+2(3\lambda)+1=0\Longrightarrow\lambda=0$$

El único punto es el $\left(-1, \frac{1}{2}, 0\right)$.

b) La ecuación del plano que contiene a los puntos A, B y C vendrá determinada por:

$$\pi' : \begin{cases} \overrightarrow{AB} = (1, 1, -3) \\ \overrightarrow{AC} = (-1, 2, 1) \\ A(1, -1, 2) \end{cases} \Longrightarrow \pi' : \begin{vmatrix} 1 & -1 & x-1 \\ 1 & 2 & y+1 \\ -3 & 1 & z-2 \end{vmatrix} = 0 \Longrightarrow 7x+2y+3z-11 = 0$$

Problema 13.1.2 *(3 puntos)* Dado el sistema lineal de ecuaciones:

$$\begin{cases} x+ & y+ & 2z = & 2 \\ -3x+ & 2y+ & 3z = & -2 \\ 2x+ & my- & 5z = & -4 \end{cases}$$

se pide:

a) (2 puntos). Discutir el sistema según los valores de m.

b) (1 punto) Resolverlo para $m = 1$.

Solución:

a)

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 2 & 2 \\ -3 & 2 & 3 & -2 \\ 2 & m & -5 & -4 \end{array} \right) \Longrightarrow |A| = -9m - 27 = 0 \Longrightarrow m = -3$$

Si $m \neq 3 \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow$ Rango$(A) = 3 =$Rango$(\overline{A})$ = nº de incógnitas $\Longrightarrow$ Sistema compatible determinado.

Si $m = 3$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 2 & 2 \\ -3 & 2 & 3 & -2 \\ 2 & 3 & -5 & -4 \end{array} \right) \Longrightarrow |A| = 0, \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} = 5 \neq 0 \Longrightarrow$$

Rango$(A) = 2$.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -3 & 2 & -2 \\ 2 & 3 & -4 \end{vmatrix} = -44 \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(\overline{A}) = 3$$

Como Rango$(A) \neq$ Rango$(\overline{A}) \Longrightarrow$ el sistema es incompatible.

b) Para $m = 1$:

$$\left\{\begin{array}{rrrr} x+ & y+ & 2z = & 2 \\ -3x+ & 2y+ & 3z = & -2 \\ 2x+ & y- & 5z = & -4 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 1 \\ y = -1 \\ z = 1 \end{array}\right.$$

Problema 13.1.3 *(2 puntos)* Halla el valor de λ para que la función

$$f(x) = \left\{\begin{array}{lcl} \dfrac{e^{\lambda x^2} - 1}{3x^2} & \text{si} & x > 0 \\ & & \\ \dfrac{\sin 2x}{x} & \text{si} & x \le 0 \end{array}\right.$$

sea continua. Razonar la respuesta.

Solución:

$$\lim_{x\longrightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x\longrightarrow 0^+} \frac{e^{\lambda x^2} - 1}{3x^2} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\longrightarrow 0^+} \frac{2\lambda x e^{\lambda x^2}}{6x} = \left[\frac{0}{0}\right] =$$

$$\lim_{x\longrightarrow 0^+} \frac{2\lambda(e^{\lambda x^2} + 2\lambda x^2 e^{\lambda x^2})}{6} = \frac{\lambda}{3}$$

$$\lim_{x\longrightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x\longrightarrow 0^-} \frac{\sin 2x}{x} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\longrightarrow 0^-} \frac{2\cos 2x}{1} = 2$$

Para que f sea continua en $x =$ se tiene que cumplir:

$$\lim_{x\longrightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x\longrightarrow 0^-} f(x) = f(0)$$

Luego

$$\frac{\lambda}{3} = 2 \Longrightarrow \lambda = 6$$

Problema 13.1.4 *(2 puntos)* Dado el polinomio $P(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$, obtener los valores de a, b y c de modo que se verifiquen las condiciones siguientes:

- El polinomio $P(x)$ tenga extremos relativos en los puntos de abscisas $x = -1/3$, $x = -1$.
- La recta tangente a la gráfica de $P(x)$ en el punto $(0, P(0))$ sea $y = x + 3$.

Solución:

$$P(x) = x^3 + ax^2 + bx + c \Longrightarrow P'(x) = 3x^2 + 2ax + b$$

$$\left\{\begin{array}{l} P'\left(-\dfrac{1}{3}\right) = 0 \Longrightarrow \dfrac{1}{3} - \dfrac{2a}{3} + b = 0 \\ \\ P'(-1) = 0 \Longrightarrow 3 - 2a + b = 0 \\ \\ P'(0) = 1 \text{ pendiente de } y = x + 3 \Longrightarrow b = 1 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} a = 2 \\ b = 1 \end{array}\right.$$

El punto $(0, P(0))$ también pertenece a la recta $y = x + 3$ luego para $x = 0 \Longrightarrow y = 3 \Longrightarrow P(0) = 3 \Longrightarrow c = 3$ El polinomio buscado es

$$P(x) = x^3 + 2x^2 + x + 3$$

.

13.2. Modelo 2012 - Opción B

Problema 13.2.1 *(3 puntos)* Sabiendo que la funcion $F(x)$ tiene derivada $f(x)$ continua en el intervalo cerrado $[2, 5]$, y, ademas, que:

$$F(2) = 1, \quad F(3) = 2, \quad F(4) = 6, \quad F(5) = 3, \quad f(3) = 3 \text{ y } f(4) = -1;$$

Hallar:

a) (0,5 puntos). $\displaystyle\int_2^5 f(x)\,dx$

b) (1 punto). $\displaystyle\int_2^3 (5f(x) - 7)\,dx$

c) (1,5 puntos). $\displaystyle\int_2^4 F(x)f(x)\,dx$.

Solución:

a) $\displaystyle\int_2^5 f(x)\,dx = F(5) - F(2) = 3 - 1 = 2$

b) $\displaystyle\int_2^3 (5f(x) - 7)\,dx = 5\int_2^3 f(x)\,dx - 7\int_2^3 dx =$

$= 5(F(3) - F(2)) - 7(3 - 2) = 5(2 - 1) - 7 = -2$

c) $\displaystyle\int_2^4 F(x)f(x)\,dx = \left.\frac{(F(x))^2}{2}\right]_2^4 = \frac{F(4)^2}{2} - \frac{F(2)^2}{2} = \frac{36}{2} - \frac{1}{2} = \frac{35}{2}$.

Problema 13.2.2 *(3 puntos)* Dado el sistema:

$$\left\{\begin{array}{rrr} x+ & 2y = & 1 \\ 3x+ & y = & -a \\ -3x+ & 2ay = & 7 \end{array}\right.$$

se pide:

a) (1,5 puntos). Discutir el sistema segun los valores del parámetro a.

b) (1,5 puntos). Resolver el sistema cuando sea compatible..

Solución:

a)

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{rr|r} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & -a \\ -3 & 2a & 7 \end{array} \right) \Longrightarrow |\overline{A}| = 2a^2 + 12a - 32 = 0 \Longrightarrow a = 2, \ \ a = -8$$

$$\left| \begin{array}{cc} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{array} \right| = -5 \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 2$$

Si $a \neq 2$ y $a \neq -8 \Longrightarrow |\overline{A}| \neq 0 \Longrightarrow$Rango$(\overline{A}) = 3 \neq$Rango$(A) \Longrightarrow$ el sistema es incompatible.

Si $a = 2 \Longrightarrow$ Rango$(A) = 2 =$Rango$(\overline{A}) =$ n$^{\text{o}}$ de incógnitas y el sistema es compatible determinado.

Si $a = -8 \Longrightarrow$ Rango$(A) = 2 =$Rango$(\overline{A}) =$ n$^{\text{o}}$ de incógnitas y el sistema es compatible determinado.

b) Si $a = 2$:

$$\left\{ \begin{array}{rrr} x+ & 2y = & 1 \\ 3x+ & y = & -2 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = -1 \\ y = 1 \end{array} \right.$$

Si $a = -8$:

$$\left\{ \begin{array}{rrr} x+ & 2y = & 1 \\ 3x+ & y = & 8 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 3 \\ y = -1 \end{array} \right.$$

Problema 13.2.3 *(3 puntos)* Dados los planos de ecuaciones:

$$\pi : x - 2y + 2z + 4 = 0, \quad \pi' = 2x + 2y - z - 2 = 0$$

se pide:

a) (1 punto). Obtener la ecuación en forma continua de la recta que determinan.

b) (1 punto). Hallar todos los puntos que equidistan de π y π'.

Solución:

a)

$$r:\left\{\begin{array}{l} x-2y+2z+4=0\\ 2x+2y-z-2=0 \end{array}\right. \Longrightarrow r:\left\{\begin{array}{l} x=-2\lambda\\ y=5\lambda\\ z=-2+6\lambda \end{array}\right.$$

En su forma continua:

$$r:\frac{x}{-2}=\frac{y}{5}=\frac{z+2}{6}$$

$$u_r=u_\pi\times u_{\pi'}=\left|\begin{array}{rrr} i & j & k\\ 1 & -2 & 2\\ 2 & 2 & -1 \end{array}\right|=(-2,5,6);\quad P_r(0,0,-2)$$

b) Sea $P(x,y,z)$ un punto tal que $d(P,\pi)=d(P,\pi')$:

$$\frac{|x-2y+2z+4|}{\sqrt{9}}=\frac{|2x+2y-z-2|}{\sqrt{9}}\Longrightarrow |x-2y+2z+4|=|2x+2y-z-2|$$

Luego tenemos las soluciones siguientes:

$$\left\{\begin{array}{l} x-2y+2z+4=2x+2y-z-2\Longrightarrow x+4y-3z-6=0\\ x-2y+2z+4=-(2x+2y-z-2)\Longrightarrow 3x+z+2=0 \end{array}\right.$$

Problema 13.2.4 *(2 puntos)* Dadas las rectas

$$r:\frac{x+3}{-6}=\frac{y-9}{4}=\frac{z-8}{4},\quad s:\frac{x-3}{3}=\frac{y-9}{-2}=\frac{x-8}{-2}$$

se pide:

a) (1 punto). Hallar la posicion relativa de las rectas r y s.

b) (1 punto). Hallar la distancia mínima entre r y s.

Solución:

a)

$$r:\left\{\begin{array}{l} \overrightarrow{u_r}=(-6,4,4)\\ P_r(-3,9,8) \end{array}\right.;\quad s:\left\{\begin{array}{l} \overrightarrow{u_s}=(3,-2,-2)\\ P_s(3,9,8) \end{array}\right.;\quad \overrightarrow{P_rP_s}=(6,0,0)$$

$$\left|\begin{array}{rrr} 6 & 0 & 0\\ -6 & 4 & 4\\ 3 & -2 & -2 \end{array}\right|=0;\quad \overrightarrow{u_r}=-2\overrightarrow{u_s}\ \text{y}\ \left|\begin{array}{rr} 6 & 0\\ -6 & 4 \end{array}\right|=24\neq 0$$

Las dos rectas son paralelas.

b) Como las dos rectas son paralelas se coge un punto al azar de una de las rectas y se calcula la distancia desde este punto a la otra recta:

$$d(r,s) = d(P_s, r) = \frac{|\overrightarrow{P_rP_s} \times \overrightarrow{u_r}|}{|\overrightarrow{u_r}|} = 12\sqrt{\frac{2}{17}}\ u$$

$$|\overrightarrow{P_rP_s} \times \overrightarrow{u_r}| = |\begin{vmatrix} i & j & k \\ 6 & 0 & 0 \\ -6 & 4 & 4 \end{vmatrix}| = |24(0,-1,1)| = 24\sqrt{2}; \quad |\overrightarrow{u_r}| = 2\sqrt{17}$$

13.3. Junio 2012 - Opción A

Problema 13.3.1 *(3 puntos)* Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} k & k & k^2 \\ 1 & -1 & k \\ 2k & -2 & 2 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} 12 \\ 6 \\ 8 \end{pmatrix}, \ C = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}, \ X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

se pide:

a) (1,5 puntos) Hallar el rango de A en función de los valores de k.

b) (0,75 puntos) Para $k = 2$, hallar, si existe, la solución del sistema $AX = B$.

c) (0,75 puntos) Para $k = 1$, hallar, si existe, la solución del sistema $AX = C$.

Solución:

a)
$$|A| = 4k(k^2 - 1) = 0 \Longrightarrow k = 0, \ \ k = \pm 1$$

- Si $k \neq 0$ o $k \neq \pm 1 \Longrightarrow$ Rango$(A) = 3$
- Si $k = 0$:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix} \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 2$$

- Si $k = 1$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix} \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 2$$

- Si $k=-1$:

$$A=\left(\begin{array}{rrr} -1 & -1 & 1\\ 1 & -1 & -1\\ -2 & -2 & 2 \end{array}\right)\Longrightarrow \text{Rango}(A)=2$$

b) Si $k=2$:

$$AX=B\Longrightarrow X=A^{-1}B=\left(\begin{array}{rrr} 1/12 & -1/2 & 1/3\\ 1/4 & -1/2 & 0\\ 1/12 & 1/2 & -1/6 \end{array}\right)\left(\begin{array}{r} 12\\ 6\\ 8 \end{array}\right)=\left(\begin{array}{r} 2/3\\ 0\\ 8/3 \end{array}\right)$$

$$A=\left(\begin{array}{rrr} 2 & 2 & 4\\ 1 & -1 & 2\\ 4 & -2 & 2 \end{array}\right)\Longrightarrow A^{-1}=\left(\begin{array}{rrr} 1/12 & -1/2 & 1/3\\ 1/4 & -1/2 & 0\\ 1/12 & 1/2 & -1/6 \end{array}\right)$$

c) Si $k=1$ el sistema $AX=C$ tiene como matriz asociada:

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 4\\ 1 & -1 & 1 & 3\\ 2 & -2 & 2 & 3 \end{array}\right),\ \text{Rango}(A)=2$$

$$\left|\begin{array}{rrr} 1 & 1 & 4\\ 1 & -1 & 3\\ 2 & -2 & 3 \end{array}\right|=20\neq 0\Longrightarrow \text{Rango}(\overline{A})=3$$

Como Rango$(A)\neq$Rango$(\overline{A})\Longrightarrow$ el sistema es incompatible y no tiene solución.

Problema 13.3.2 *(3 puntos)* Dados los puntos $P_1(1,3,-1)$, $P_2(a,2,0)$, $P_3(1,5,4)$ y $P_4(2,0,2)$, se pide:

a) (1 punto). Hallar el valor de a para que los cuatro puntos estén en el mismo plano.

b) (1 punto). Hallar los valores de a para que el tetraedro con vértices en P_1, P_2, P_3, P_4 tenga volumen igual a 7.

c) (1 punto). Hallar la ecuación del plano cuyos puntos equidistan de P_1 y de P_3.

Solución:

a) Tenemos $\overrightarrow{P_1P_2}=(a-1,-1,1)$, $\overrightarrow{P_1P_3}=(0,2,5)$, $\overrightarrow{P_1P_4}=(3,-3,3)$:

$$\left|\begin{array}{rrr} a-1 & -1 & 1\\ 0 & 2 & 5\\ 1 & -3 & 3 \end{array}\right|=7(3a-4)=0\Longrightarrow a=\frac{4}{3}$$

b)

$$7=\frac{1}{6}|\begin{vmatrix} a-1 & -1 & 1\\ 0 & 2 & 5\\ 1 & -3 & 3\end{vmatrix}| \Longrightarrow |3a-4|=6 \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} a=10/3\\ a=-2/3\end{array}\right.$$

c)

$$\sqrt{(x-1)^2+(y-3)^2+(z+1)^2}=\sqrt{(x-1)^2+(y-5)^2+(z-4)^2} \Longrightarrow$$
$$4y+10z-31=0$$

Problema 13.3.3 *(2 puntos)* Hallar a, b, c de modo que la función $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ alcance en $x=1$ un máximo relativo de valor 2, y tenga en $x=3$ un punto de inflexión.

Solución:

$$f'(x)=3x^2+2ax+b,\ \ f''(x)=6x+2a$$
$$\left\{\begin{array}{l} f(1)=0\Longrightarrow a+b+c=1\\ f'(1)=0\Longrightarrow 2a+b=-3\\ f''(3)=0\Longrightarrow a=-9\end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} a=-9\\ b=15\\ c=-5\end{array}\right.$$
$$f(x)=x^3-9x^2+15x-5$$

Problema 13.3.4 *(2 puntos)* Calcular razonadamente las siguientes integrales definidas:

- (1 punto). $\displaystyle\int_0^{\pi} e^{2x}\cos x\, dx$
- (1 punto). $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\sin 2x}{1+\cos^2 2x}\, dx$

Solución:

- (1 punto). $\displaystyle\int_0^{\pi} e^{2x}\cos x\, dx=-\frac{2}{5}(e^{2\pi}+1)$

$$I=\int e^{2x}\cos x\,dx=\left[\begin{array}{c} u=\cos x\Longrightarrow du=-\sin x\\ dv=e^{2x}\,dx\Longrightarrow v=\frac{1}{2}e^{2x}\end{array}\right]=\frac{\cos x e^{2x}}{2}+\frac{1}{2}\int e^{2x}\sin x\,dx=$$
$$\left[\begin{array}{c} u=\sin x\Longrightarrow du=\cos x\\ dv=e^{2x}\,dx\Longrightarrow v=\frac{1}{2}e^{2x}\end{array}\right]=\frac{\cos x e^{2x}}{2}+\frac{1}{2}\left(\frac{\sin x e^{2x}}{2}-\frac{1}{2}\int e^{2x}\cos x\,dx\right)$$
$$I=\frac{\cos x e^{2x}}{2}+\frac{1}{2}\frac{\sin x e^{2x}}{2}-\frac{1}{4}I\Longrightarrow I+\frac{1}{4}I=\frac{(2\cos x+\sin x)e^{2x}}{4}\Longrightarrow$$
$$\int e^{2x}\cos x\,dx=\frac{(2\cos x+\sin x)e^{2x}}{5}$$

- $\displaystyle\int_0^{\pi/2}\frac{\sin 2x}{1+\cos^2 2x}\,dx=-\frac{1}{2}\arctan(\cos 2x)\Big]_0^{\pi/2}=\frac{\pi}{4}$

13.4. Junio 2012 - Opción B

Problema 13.4.1 *(3 puntos)* Dadas las funciones

$$f(x) = \frac{3x + \ln(x+1)}{\sqrt{x^2-3}}, \quad g(x) = (lnx)^x, \quad h(x) = sen(\pi - x)$$

se pide:

a) (1 punto). Hallar el dominio de $f(x)$ y el $\lim\limits_{x\longrightarrow+\infty} f(x)$.

b) (1 punto). Calcular $g'(e)$.

c) (1 punto). Calcular, en el intervalo $(0, 2\pi)$, las coordenadas de los puntos de corte con el eje de abscisas y las coordenadas de los extremos relativos de $h(x)$.

Solución:

a) $Dom(f) = (\sqrt{3}, \infty)$

$$\lim_{x\longrightarrow+\infty} \frac{3x + \ln(x+1)}{\sqrt{x^2-3}} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x\longrightarrow+\infty} \frac{3 + \frac{1}{x+1}}{\frac{2x}{2\sqrt{x^2-3}}} = 3$$

b)

$$g'(x) = (\ln x)^x \left(\ln(\ln(x) + \frac{1}{\ln x}\right) \Longrightarrow g'(e) = 1$$

c) $h(x)sen(\pi - x) = 0 \Longrightarrow \pi - x = k\pi \Longrightarrow x = (1-k)\pi$,, el único punto de corte en este intervalo es en $x = \pi$.

$$h'(x) = -\cos(\pi - x) = 0 \Longrightarrow \pi - x = \frac{\pi}{2} + k\pi \Longrightarrow x = \pi\left(\frac{1}{2} - k\right)$$

Luego $x = \frac{\pi}{2}$, $x = \frac{3\pi}{2}$.

Problema 13.4.2 *(3 puntos)* Dadas las rectas

$$r_1 \equiv \frac{x-2}{3} = \frac{y-1}{-5} = \frac{z}{2}, \quad r_1 \equiv \left\{\begin{array}{c} x = -1 - \lambda \\ y = 3 + \lambda \\ z = 5 \end{array}\right.$$

se pide:

a) (1 punto). Estudiar su posición relativa.

b) (2 puntos). Hallar la mínima distancia de r_1 a r_2.

Solución:

$$r_1:\left\{\begin{array}{l}\overrightarrow{u_{r_1}}=(3,-5,2)\\ P_{r_1}(2,1,0)\end{array}\right. \quad r_2:\left\{\begin{array}{l}\overrightarrow{u_{r_2}}=(-1,1,0)\\ P_{r_2}(-1,3,5)\end{array}\right. \quad \overrightarrow{P_{r_1}P_{r_2}}=(-3,2,5)$$

a)

$$\left|\begin{array}{rrr}-3 & 2 & 5\\ 3 & -5 & 2\\ -1 & 1 & 0\end{array}\right|=-8\neq 0\Longrightarrow r_1 \text{ y } r_2 \text{ se cruzan}$$

b)

$$d(r_1,r_2)=\frac{|[\overrightarrow{P_{r_1}P_{r_2}},\overrightarrow{u_{r_1}},\overrightarrow{u_{r_2}}]|}{|\overrightarrow{u_{r_1}}\times\overrightarrow{u_{r_2}}|}=\frac{|-8|}{2\sqrt{3}}=\frac{4\sqrt{3}}{3}\ u$$

$$|\overrightarrow{u_{r_1}}\times\overrightarrow{u_{r_2}}|=|\left|\begin{array}{rrr}i & j & k\\ 3 & -5 & 2\\ -1 & 1 & 0\end{array}\right||=|(-2,-2,-2)|=2\sqrt{3}$$

Problema 13.4.3 *(3 puntos)* Dadas las matrices

$$A=\left(\begin{array}{rrr}0 & 1 & 2\\ -2 & -1 & 0\\ 1 & a & 1\end{array}\right),\quad B=\left(\begin{array}{rrrr}4 & -1 & 1 & -2\\ -2 & -3 & -7 & -8\\ 3 & 2-a & 3+a & 3\end{array}\right)$$

se pide:

a) (1 punto). Estudiar el rango de la matriz B en función de a.

b) (1 punto). Para $a=0$, calcular la matriz X que verifica $AX=B$.

Solución:

a)

$$|B_1|=\left|\begin{array}{rrr}4 & -1 & 1\\ -2 & -3 & -7\\ 3 & 2-a & 3+a\end{array}\right|=40(1-a)=0\Longrightarrow a=1$$

Luego si $a\neq 1\Longrightarrow$ Rango$(B)=3$. Si $a=1$:

$$B=\left(\begin{array}{rrrr}4 & -1 & 1 & -2\\ -2 & -3 & -7 & -8\\ 3 & 1 & 4 & 3\end{array}\right)$$

$$|B_1|=|B_2|=|B_3|=|B_4|=0\Longrightarrow \text{Rango}(B)=2$$

b) Si $a = 0$:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 1 & -2 \\ -2 & -3 & -7 & -8 \\ 3 & 2 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

$$AX = B \Longrightarrow X = A^{-1}B:$$

$$X = \begin{pmatrix} -1/4 & -1/4 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 & -1 \\ 1/4 & 1/4 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & -1 & 1 & -2 \\ -2 & -3 & -7 & -8 \\ 3 & 2 & 3 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Problema 13.4.4 *(2 puntos)* Calcular el valor del determinante

$$\begin{vmatrix} x & 1 & 1 & 1 \\ 1 & y & 1 & 1 \\ 1 & 1 & z & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

Solución:

$$\begin{vmatrix} x & 1 & 1 & 1 \\ 1 & y & 1 & 1 \\ 1 & 1 & z & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} F_1 - F_4 \\ F_2 - F_4 \\ F_3 - F_4 \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} x-1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & y-1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & z-1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (x-1)(y-1)(z-1)$$

13.5. Junio 2012 (coincidente)- Opción A

Problema 13.5.1 *(3 puntos)* Dada la función $f(x) = \cos^2 x$, se pide:

a) (1 punto). Calcular los extremos relativos de f en el intervalo $(-\pi, \pi)$

b) (1 punto). Calcular los puntos de inflexion de f en el intervalo $(-\pi, \pi)$

c) (1 punto). Hallar la primitiva $g(x)$ de $f(x)$ tal que $g(\pi/4) = 0$.

Solución:

$$f'(x) = -2\sin x \cos x = -\sin 2x = 0 \Longrightarrow x = \frac{k\pi}{2}, \ k \in Z$$

a) En el intervalo $(-\pi, \pi)$ sólo hay tres soluciones: $x = \pm\pi/2$ y $x = 0$. Analizamos estos extremos por el criterio de la segunda derivada. $f''(x) = -2\cos 2x$:

$$f''(0) = -2 < 0 \Longrightarrow \text{en } x = 0 \text{ hay un Máximo}$$

$$f''\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2 > 0 \Longrightarrow \text{en } x = 0 \text{ hay un Mínimo}$$

$$f''\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 2 > 0 \Longrightarrow \text{en } x = 0 \text{ hay un Mínimo}$$

b)

$$f''(x) = -2\cos 2x = 0 \Longrightarrow x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}, \ \ k \in Z$$

En el intervalo $(-\pi, \pi)$ las soluciones serán: $x = \pm\pi/4$ y $x = \pm 3\pi/4$. Analizamos estos puntos por el criterio de la tercera derivada. $f'''(x) = 4\sin 2x$:

$$f'''(\pm\pi/4) = \pm 4 \neq 0 \Longrightarrow \text{ en } x = \pm\pi/4 \text{ hay un punto de Inflexión}$$

$$f'''(\pm 3\pi/4) = \pm 4 \neq 0 \Longrightarrow \text{ en } x = \pm 3\pi/4 \text{ hay un punto de Inflexión}$$

c)

$$g(x) = \int \cos^2 x\, dx = \int \frac{1+\cos 2x}{2}\, dx = \frac{2x + \sin 2x}{4} + C$$

$$g(\pi/4) = \frac{\pi/2 + \sin \pi/2}{4} + C = \frac{\pi+2}{8} + C = 0 \Longrightarrow C = -\frac{\pi+2}{8}$$

$$g(x) = \frac{2x + \sin 2x}{4} - \frac{\pi+2}{8}$$

Problema 13.5.2 *(3 puntos)* Dado el sistema de ecuaciones lineales

$$\left\{\begin{array}{rrrr} 3x+ & 2y+ & (a-1)z = & 1 \\ -x+ & ay+ & z = & 0 \\ 2x+ & y- & 2z = & 3 \end{array}\right.$$

se pide:

a) (2 puntos). Discutir sus soluciones según los valores de a.

b) (1 punto). Hallar la solución del sistema para $a = 1$.

Solución:

a)

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & (a-1) & 1 \\ -1 & a & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -2 & 3 \end{array}\right); \ \ |A| = -2\left(a + \frac{1}{2}\right)(a+2) = 0 \Longrightarrow$$

$$a = -\frac{1}{2}, \ \ a = -2$$

- Si $a = -\dfrac{1}{2}$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & -1/2 & 1 \\ -1 & 1/2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -2 & 3 \end{array}\right) \Longrightarrow |A| = 0 \text{ y } \left|\begin{array}{cc} 3 & 2 \\ -1 & 1/2 \end{array}\right| \neq 0 \Longrightarrow$$

$$\text{Rango}(A) = 2$$

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -1 & 1/2 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(\overline{A}) = 3$$

Luego en este caso el sistema es Incompatible.

- Si $a = - - 2$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{rrr|r} 3 & 2 & -3 & 1 \\ -1 & -2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -2 & 3 \end{array} \right) \Longrightarrow |A| = 0 \text{ y } \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} \neq 0 \Longrightarrow$$

$$\text{Rango}(A) = 2$$

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(\overline{A}) = 3$$

Luego en este caso el sistema es Incompatible.

b)

$$\left\{ \begin{array}{rrrl} 3x+ & 2y & = & 1 \\ -x+ & y+ & z = & 0 \\ 2x+ & y- & 2z = & 3 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = -1/3 \\ y = 1 \\ z = -4/3 \end{array} \right.$$

Problema 13.5.3 *(2 puntos)*

a) (1 punto). Dados los puntos $P(2, 1, -1)$, $Q(1, 0, 2)$ y la recta

$$r \equiv \left\{ \begin{array}{l} x = 2 + 2\lambda \\ y = 1 - \lambda \\ z = 3 \end{array} \right.$$

determinar los puntos de r que equidistan de P y Q.

b) (1 punto). Determinar la ecuación del plano π que pasa por el punto Q y es perpendicular a r.

Solución:

a)

$$(2+2\lambda-2)^2+(1-\lambda-1)^2+(3-(-1))^2 = (2+2\lambda-1)^2+(1-\lambda)^2+(3-2)^2 \Longrightarrow$$

$$\lambda = \frac{13}{2} \Longrightarrow \left(15, -\frac{11}{2}, 3\right)$$

b)

$$2x-y+\lambda=0,\ \ 2\cdot 1-1\cdot 0+\lambda=0\Longrightarrow \lambda=-2$$

$$\pi: 2x-y-2=0$$

Problema 13.5.4 *(2 puntos)* Una de las caras del paralelepípedo H tiene vertices en los puntos $A(4,2,8)$, $B(6,4,12)$, $C(6,0,10)$ y $D(8,2,14)$.

a) (1 punto). Si el punto $E(6,8,28)$ es otro de los vertices, hallar el volumen de H.

b) (1 punto). Hallar el punto E' simétrico de E respecto del plano que contiene a la cara $ABCD$.

Solución:

$$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}=(2,2,4);\quad \overrightarrow{AC}=\overrightarrow{BD}=(2,-2,2)$$

a)

$$\overrightarrow{AE}=(2,6,20)\Longrightarrow V=\left|\begin{array}{rrr} 2 & 2 & 4\\ 2 & -2 & 2\\ 2 & 6 & 20 \end{array}\right|=112\ u^3$$

b) Seguimos los siguientes pasos:

- Cálculo del plano que contiene la cara $ABCD$:

$$\pi\equiv\left|\begin{array}{rrc} 2 & 2 & x-4\\ -2 & 2 & y-2\\ 2 & 4 & z-8 \end{array}\right|=0\Longrightarrow \pi\equiv 3x+y-2z+2=0$$

- Calculamos las ecuación de la recta $r\perp\pi$ que pasa por E:

$$r\equiv\left\{\begin{array}{l} x=6+3\lambda\\ y=8+\lambda\\ z=28-2\lambda \end{array}\right.$$

- Calculamos el punto de corte E'' de r con π:

$$3(6+3\lambda)+(8+\lambda)-2(28-2\lambda)+2=0\Longrightarrow \lambda=2\Longrightarrow E''(12,10,24)$$

- $$\frac{E+E'}{2}=E''\Longrightarrow E'=2E''-E=(24,20,48)-(6,8,28)=(18,12,20)$$

13.6. Junio 2012 (coincidente)- Opción B

Problema 13.6.1 *(3 puntos)* Dadas la recta r y la familia de rectas s, mediante

$$r \equiv \left\{ \begin{array}{c} x+2y=-3 \\ z=1 \end{array} \right. \qquad s \equiv \left\{ \begin{array}{c} 2x+2y+z=a \\ x+z=0 \end{array} \right. ,$$

se pide:

a) (1,5 puntos). Hallar el valor de a para que ambas rectas se corten. Calcular el punto de corte.

b) (1,5 puntos). Hallar la ecuación del plano determinado por ambas rectas cuando estas se cortan.

Solución:

a)

$$r \equiv \left\{ \begin{array}{l} x=-3-2\lambda \\ y=\lambda \\ z=1 \end{array} \right. \qquad s \equiv \left\{ \begin{array}{l} x=\mu \\ y=\dfrac{a-\mu}{2} \\ z=-\mu \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} -3-2\lambda=\mu \\ \lambda=\dfrac{a-\mu}{2} \\ 1=-\mu \end{array} \right. \Longrightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \lambda=-1 \\ \mu=-1 \\ a=-3 \end{array} \right. \Longrightarrow a=-3, \text{ y el punto de corte es } P(-1,-1,1)$$

b)

$$r \equiv \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_r}=(-2,1,0) \\ P_r(-3,0,1) \end{array} \right. \qquad s \equiv \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_s}=(1,-1/2,-1)=1/2(2,-1,-2) \\ P_s(0,-3/2,-1) \end{array} \right. \Longrightarrow$$

$$\pi \equiv \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_r}=(-2,1,0) \\ \overrightarrow{u_s}=(2,-1,-2) \\ P_r(-3,0,1) \end{array} \right. \Longrightarrow \pi \equiv \left| \begin{array}{ccc} -2 & 2 & x+3 \\ 1 & -1 & y \\ 0 & -2 & z-1 \end{array} \right| = 0 \Longrightarrow$$

$$\pi \equiv x+2y+3=0$$

Problema 13.6.2 *(3 puntos)* . Sabiendo que $\left| \begin{array}{ccc} x & y & z \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 5 \end{array} \right| = 1$, calcular los siguientes determinantes:

$$a) \ (1,5 \text{ puntos}) \left| \begin{array}{ccc} 3 & 1 & 0 \\ 3x & y & 2z \\ 6 & 3 & 10 \end{array} \right|, \quad b) \ (1,5 \text{ puntos}) \left| \begin{array}{ccc} x+1 & y+1 & z \\ 2-x & 2-y & -z \\ 3 & 4 & 5 \end{array} \right|$$

Solución:

$$a)\quad \begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 3x & y & 2z \\ 6 & 3 & 10 \end{vmatrix} = -6\begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 5 \end{vmatrix} = -6$$

$$b)\quad \begin{vmatrix} x+1 & y+1 & z \\ 2-x & 2-y & -z \\ 3 & 4 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x+1 & y+1 & z \\ 2 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 5 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} x+1 & y+1 & z \\ x & y & z \\ 3 & 4 & 5 \end{vmatrix} =$$

$$2\begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 5 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 5 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} x & y & z \\ x & y & z \\ 3 & 4 & 5 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 5 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 5 \end{vmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 - F_2 \end{bmatrix} = 3\begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 5 \end{vmatrix} = 3$$

Problema 13.6.3 *(2 puntos)* Dada la función

$$f(x) = \frac{x-3}{\sqrt{x^2-9}}$$

se pide:

a) (1 punto) Hallar $\lim_{x\longrightarrow 3^+} f(x)$, $\lim_{x\longrightarrow -3^-} f(x)$

b) (1 punto) Hallar $\lim_{x\longrightarrow +\infty} f(x)$, $\lim_{x\longrightarrow -\infty} f(x)$

Solución:

a)

$$\lim_{x\longrightarrow 3^+} \frac{x-3}{\sqrt{x^2-9}} = \lim_{x\longrightarrow 3^+} \frac{x-3}{\sqrt{x+3}\sqrt{x-3}} = \lim_{x\longrightarrow 3^+} \frac{\sqrt{x-3}}{\sqrt{x+3}} = 0$$

$$\lim_{x\longrightarrow -3^-} \frac{x-3}{\sqrt{x^2-9}} = -\infty$$

b)

$$\lim_{x\longrightarrow +\infty} \frac{x-3}{\sqrt{x^2-9}} = 1$$

$$\lim_{x\longrightarrow -\infty} \frac{x-3}{\sqrt{x^2-9}} = -1$$

Problema 13.6.4 *(2 puntos)*

a) (1 punto) Sea $f(x)$ una función continua tal que $\int_1^8 f(u)\,du = 3$. Hallar

$$\int_1^2 f(x^3)x^2\,dx$$

b) (1 punto) Hallar el dominio de definición y las abscisas de los puntos donde la función

$$F(x) = \sqrt{(x-3)(9-x)^2}$$

alcanza sus máximos y mínimos relativos.

Solución:

a)

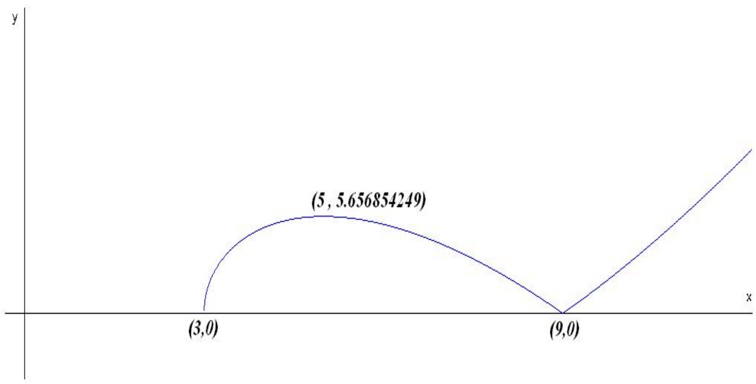
$$\int_1^2 f(x^3)x^2\,dx = [u = x^3] = \frac{1}{3}\int_1^8 f(u)\,du = 1$$

b) $\text{Dom}(F(x)) = [3, +\infty)$

$$F'(x) = \frac{3(x-5)(x-9)}{2\sqrt{(x-3)(9-x)^2}} = 0 \Longrightarrow x = 5,\ x = 9$$

	$(3,5)$	$(5,9)$	$(9,\infty)$
$F'(x)$	$+$	$-$	$+$
$F(x)$	creciente	decreciente	creciente

En el punto $(5, 4\sqrt{2})$ hay un máximo relativo y en el punto $(9,0)$ hay un mínimo relativo. En el punto $(3,0)$ hay un mínimo global.



13.7. Septiembre 2012 - Opción A

Problema 13.7.1 *(3 puntos)* Dada la función

$$f(x) = \begin{cases} 3x + A & \text{si} \quad x \leq 3 \\ -4 + 10x - x^2 & \text{si} \quad x > 3 \end{cases}$$

se pide:

a) (1 punto). Hallar el valor de A para que $f(x)$ sea continua. ¿Es derivable para ese valor de A?

b) (1 punto). Hallar los puntos en los que $f'(x) = 0$.

c) (1 punto). Hallar el máximo absoluto y el mínimo absoluto de $f(x)$ en el intervalo $[4, 8]$.

Solución:

a)

$$\lim_{x \longrightarrow 3^-} f(x) = 6 + A; \quad \lim_{x \longrightarrow 3^+} f(x) = 17$$

$$9 + A = 17 \Longrightarrow A = 8$$

$$f(x) = \begin{cases} 3x + 8 & \text{si} \quad x \leq 3 \\ -4 + 10x - x^2 & \text{si} \quad x > 3 \end{cases} \Longrightarrow f'(x) = \begin{cases} 3 & \text{si} \quad x \leq 3 \\ 10 - 2x & \text{si} \quad x > 3 \end{cases}$$

$$f'(3^-) = 3 \neq f'(3^+) = 4 \Longrightarrow \text{no es derivable en } x = 3$$

b) $f'(x) = 0$ sólo en el intervalo $(3, \infty)$ y será: $10 - 2x = 0 \Longrightarrow x = 5$

c) $f(4) = 20$, $f(8) = 12$, $f(5) = 21$, luego tendríamos un máximo absoluto en el punto $(5, 21)$ y un mínimo absoluto en el punto $(8, 12)$.

Problema 13.7.2 *(3 puntos)* Dado el sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} 3x + & ay + & 4z = & 6 \\ x + & (a+1)y + & z = & 3 \\ (a-1)x - & ay - & 3z = & -3 \end{cases}$$

se pide:

a) (2 punto). Discutir el sistema según los valores de a.

b) (1 punto). Resolverlo para $a = -1$.

Solución:

a)

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & a & 4 & 6\\ 1 & (a+1) & 1 & 3\\ (a-1) & -a & -3 & -3 \end{array}\right) \quad |A|=-3a^2-8a-5=0 \Longrightarrow a=-1,\ \ a=-5/3$$

- Si $k\neq -1$ o $k\neq -5/3 \Longrightarrow$ Rango$(A)=3$ =Rango$(\overline{A})$ = nº de incógnitas, y el sistema es compatible determinado (solución única).
- Si $k=-5/3$:

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -5/3 & 4 & 6\\ 1 & -2/3 & 1 & 3\\ -8/3 & 5/3 & -3 & -3 \end{array}\right) \Longrightarrow \left|\begin{array}{cc} 4 & 6\\ 1 & 3 \end{array}\right| = 6\neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A)=2$$

$$\left|\begin{array}{ccc} 3 & 4 & 6\\ 1 & 1 & 3\\ -8/3 & -3 & -3 \end{array}\right| = -4\neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(\overline{A})=3$$

Luego Rango(A) $\neq$Rango$(\overline{A})$ y el sistema es incompatible (no tiene solución).

- Si $a=-1$:

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -1 & 4 & 6\\ 1 & 0 & 1 & 3\\ -2 & 1 & -3 & -3 \end{array}\right);\ \ F_3=F_2-F_1$$

Luego en este caso el sistema es compatible indeterminado (infinitas soluciones).

b) Si $a=-1$:

$$\left\{\begin{array}{rrrr} 3x- & y+ & 4z= & 6\\ x+ & & z= & 3 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=3-\lambda\\ y=3+\lambda\\ z=\lambda \end{array}\right.$$

Problema 13.7.3 *(2 puntos)* Se dan la recta r y el plano π, mediante

$$r\equiv\frac{x-4}{2}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z-2}{3},\quad \pi\equiv 2x+y-2z-7=0$$

Obtener los puntos de la recta cuya distancia al plano es igual a uno.

Solución:

$$r\equiv\left\{\begin{array}{l} x=4+2\lambda\\ y=1-\lambda\\ z=2+3\lambda \end{array}\right. \Longrightarrow r\equiv\left\{\begin{array}{l} \overrightarrow{u_r}=(2,-1,3)\\ P_r(4,1,2) \end{array}\right.$$

$$1 = d(P,\pi) = \frac{|2(4+2\lambda)+(1-\lambda)-2(2+3\lambda)-7|}{\sqrt{4+1+4}}$$

$$|3\lambda+2| = 3 \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 3\lambda+2=3 \Longrightarrow \lambda=1/3 \Longrightarrow P_1(14/3,2/3,3) \\ -3\lambda-2=3 \Longrightarrow \lambda=-5/3 \Longrightarrow P_1(2/3,8/3,-3) \end{array} \right.$$

Problema 13.7.4 *(2 puntos)* Dadas las rectas

$$r \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{2} = \frac{z}{-2}, \quad s \equiv \left\{ \begin{array}{l} x+y=4 \\ 2x+z=4 \end{array} \right.$$

se pide:

a) (1,5 puntos). Hallar la ecuación del plano que pasa por $A(2,3,4)$ y es paralelo a las rectas r y s.

b) (0,5 puntos). Determinar la ecuación de la recta que pasa por $B(4,-1,2)$ y es perpendicular al plano hallado anteriormente.

Solución:

a)

$$\overrightarrow{u_s} = \left| \begin{array}{ccc} i & j & k \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{array} \right| = (1,-1,-2)$$

$$\pi : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_r} = (2,2,-2) \\ \overrightarrow{u_s} = (1,-1,-2) \\ A(2,3,4) \end{array} \right. \Longrightarrow \pi : \left| \begin{array}{ccc} 2 & 1 & x-2 \\ 2 & -1 & y-3 \\ -2 & -2 & z-4 \end{array} \right| = 0 \Longrightarrow 3x-y+2z-11=0$$

b)

$$t \equiv \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_t} = (3,-1,2) \\ P_t(4,-1,2) \end{array} \right. \Longrightarrow \frac{x-4}{3} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z-2}{2}$$

13.8. Septiembre 2012 - Opción B

Problema 13.8.1 *(3 puntos)* Dado el punto $P(2,1,-1)$, se pide:

a) (0,5 puntos). Hallar el punto P' simétrico de P respecto del punto $Q(3,0,2)$.

b) (1,25 puntos). Hallar el punto P'' simétrico de P respecto de la recta $r \equiv x-1 = y-1 = z$.

c) (1,25 puntos). Hallar el punto P''' simétrico de P respecto del plano $\pi \equiv x+y+z=3$.

Solución:

a)
$$\frac{P'+P}{2} = Q \Longrightarrow P' = 2Q - P = (4, -1, 5)$$

b) Calculamos un plano $\pi \perp r$ que contenga a P

$$x+y+z+\lambda = 0 \Longrightarrow 2+1-1+\lambda = 0 \Longrightarrow \lambda = -2 \Longrightarrow x+y+z-2 = 0$$

Calculamos el punto de corte P_1 de π con r:

$$r : \left\{ \begin{array}{l} x = 1 + \lambda \\ y = 1 + \lambda \\ z = \lambda \end{array} \right.$$

$$(1+\lambda) + (1+\lambda) + \lambda - 2 = 0 \Longrightarrow \lambda = 0 \Longrightarrow P_1(1, 1, 0)$$

Por último:

$$\frac{P''+P}{2} = P_1 \Longrightarrow P'' = 2P_1 - P = (0, 1, 1)$$

c) Calculamos una recta $r \perp \pi$ que contenga a P:

$$r : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_r} = (1, 1, 1) \\ P(2, 1, -1) \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 2 + \lambda \\ y = 1 + \lambda \\ z = -1 + \lambda \end{array} \right.$$

Calculamos el punto de corte P_2 de π con r:

$$(2+\lambda) + (1+\lambda) + (-1+\lambda) - 3 = 0 \Longrightarrow \lambda = \frac{1}{3} \Longrightarrow P_2\left(\frac{7}{3}, \frac{4}{3}, -\frac{2}{3}\right)$$

Por último:

$$\frac{P'''+P}{2} = P_2 \Longrightarrow P''' = 2P_2 - P = \left(\frac{8}{3}, \frac{5}{3}, -\frac{1}{3}\right)$$

Problema 13.8.2 *(3 puntos)* Dada la función $f(x) = x^2 \sin x$, se pide:

a) (1 punto). Determinar, justicando la respuesta, si la ecuación $f(x) = 0$ tiene alguna solución en el intervalo abierto $(\pi/2, \pi)$.

b) (1 punto). Calcular la integral de f en el intervalo $[0, \pi]$.

c) (1 punto). Obtener la ecuación de la recta normal a la gráfica de $y = f(x)$ en el punto $(\pi, f(\pi))$. Recúerdese que la recta normal es la recta perpendicular a la recta tangente en dicho punto.

Solución:

a) $x^2 \neq 0$ en $(\pi/2, \pi)$ y $\sin x \neq 0$ en $(\pi/2, \pi)$, luego podemos concluir que $f(x) = x^2 \sin x \neq 0$ en $(\pi/2, \pi)$.

b) La integral se calcula por partes:

$$\int x^2 \sin x\, dx = \left[\begin{array}{c} u = x^2 \Longrightarrow du = 2xdx \\ dv = \sin x\, dx \Longrightarrow v = -\cos x \end{array} \right] = -x^2 \cos x + 2 \int x \cos x\, dx =$$

$$= \left[\begin{array}{c} u = x \Longrightarrow du = dx \\ dv = \cos x\, dx \Longrightarrow v = \sin x \end{array} \right] = -x^2 \cos x + 2 \left[x \sin x - \int \sin x\, dx \right] =$$

$$= -x^2 \cos x + 2x \sin x + 2 \cos x = (2 - x^2) \cos x + 2x \sin x$$

$$\int_0^\pi x^2 \sin x\, dx = \left. (2 - x^2) \cos x + 2x \sin x \right]_0^\pi = \pi^2 - 4$$

c) $f'(x) = 2x \sin x + x^2 \cos x$, $f'(\pi) = -\pi^2 \Longrightarrow m = 1/\pi^2$, $f(\pi) = 0$:

$$y = \frac{1}{\pi^2}(x - \pi) \text{ recta normal}$$

$$y = -\pi^2(x - \pi) \text{ recta tangente}$$

Problema 13.8.3 *(3 puntos)* Sean $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{c}$ y $\overrightarrow{d} \in R^3$, vectores columna. Si

$$det(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{d}) = -1, \quad det(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{c}, \overrightarrow{d}) = 3, \quad det(\overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}, \overrightarrow{d}) = -2$$

calcular razonadamente el determinante de las siguientes matrices:

a) (0,5 puntos). $det(\overrightarrow{a}, 3\overrightarrow{d}, \overrightarrow{b})$.

b) (0,75 puntos). $det(\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}, -\overrightarrow{d})$.

c) (0,75 puntos). $det(\overrightarrow{d} + 3\overrightarrow{b}, 2\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b} - 3\overrightarrow{a} + \overrightarrow{d})$

Solución:

a) $det(\overrightarrow{a}, 3\overrightarrow{d}, \overrightarrow{b}) = 3det(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{d}, \overrightarrow{b}) = -3det(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{d}) = 3$

b) $det(\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}, -\overrightarrow{d}) = det(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{c}, -\overrightarrow{d}) + det(-\overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}, -\overrightarrow{d}) = -3 - 2 = -5$

c) $det(\overrightarrow{d} + 3\overrightarrow{b}, 2\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b} - 3\overrightarrow{a} + \overrightarrow{d}) = det(\overrightarrow{d}, 2\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}) + det(\overrightarrow{d}, 2\overrightarrow{a}, -3\overrightarrow{a}) + det(\overrightarrow{d}, 2\overrightarrow{a}, \overrightarrow{d}) + det(3\overrightarrow{b}, 2\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}) + det(3\overrightarrow{b}, 2\overrightarrow{a}, -3\overrightarrow{a}) + det(3\overrightarrow{b}, 2\overrightarrow{a}, \overrightarrow{d}) = -2 + 0 + 0 + 0 + 0 + 6 = 4$

Problema 13.8.4 *(2 puntos)* Dado el sistema de ecuaciones lineales:

$$\left\{\begin{array}{rrrr} x- & & 2z = & 2 \\ ax- & y+ & z = & -8 \\ 2x+ & & az = & 4 \end{array}\right.$$

se pide:

a) (2 punto). Discutir el sistema según los valores de a.

b) (1 punto). Resolverlo para $a = -5$.

Solución:

a)

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & -2 & 2 \\ a & -1 & 1 & -8 \\ 2 & 0 & a & 4 \end{array}\right); \ |A| = -a - 4 = 0 \Longrightarrow a = -4$$

- Si $a \neq -4 \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow$Rango$(A) = 3 =$Rango$(\overline{A})$ =nº de incógnitas y el sistema es compatible determinado.
- Si $a = -4$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & -2 & 2 \\ -4 & -1 & 1 & -8 \\ 2 & 0 & -4 & 4 \end{array}\right); |A| = 0, \ \left|\begin{array}{rr} 1 & 0 \\ -4 & -1 \end{array}\right| = -1 \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 2$$

$$|A_1| = |A| = 0; |A_2| = \left|\begin{array}{rrr} 1 & 0 & 2 \\ -4 & -1 & -8 \\ 2 & 0 & 4 \end{array}\right| = 0$$

$$|A_3| = \left|\begin{array}{rrr} 1 & -2 & 2 \\ -4 & 1 & -8 \\ 2 & -4 & 4 \end{array}\right| = 0; \ \ |A_4| = \left|\begin{array}{rrr} 0 & -2 & 2 \\ -1 & 1 & -8 \\ 0 & -4 & 4 \end{array}\right| = 0$$

Como

$$\left|\begin{array}{rr} 1 & 0 \\ -4 & -1 \end{array}\right| = -1 \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(\overline{A}) = 2$$

Luego cuando $a = -4$ tenemos que Rango$(A) = 2 =$Rango$(\overline{A}) <$ nº de incógnitas y el sistema es compatible indeterminado.

b)

$$\left\{\begin{array}{rrrr} x- & & 2z = & 2 \\ -5x- & y+ & z = & -8 \\ 2x- & & 5z = & 4 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{r} x = 2 \\ y = -2 \\ z = 0 \end{array}\right.$$

Capítulo 14

Año 2013

14.1. Modelo 2013 - Opción A

Problema 14.1.1 *(3 puntos)* Dada la función

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{2x^2+3x}{x-1} & \text{si} \quad x < 0 \\ \\ a & \text{si} \quad x = 0 \\ \\ e^{-1/x} & \text{si} \quad x > 0 \end{cases}$$

se pide:

a) (1 punto). Determinar el valor de a para que f sea continua en $x = 0$.

b) (1 punto). Para ese valor de a, estudiar la derivabilidad de f en $x = 0$.

c) (1 punto). Hallar, si las tiene, las asíntotas de la gráfica $y = f(x)$.

Solución:

a)

$$\lim_{x\longrightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x\longrightarrow 0^-} \frac{2x^2+3x}{x-1} = 0; \quad \lim_{x\longrightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x\longrightarrow 0^+} e^{-1/x} = 0; \quad f(0) = a$$

Luego $a = 0$.

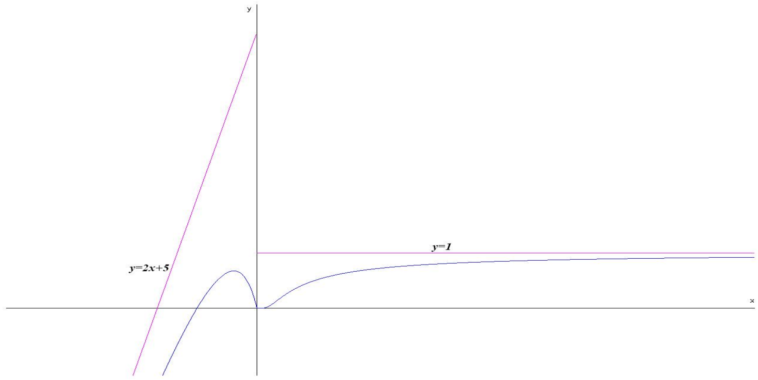
b)

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{2x^2-4x-3}{(x-1)^2} & \text{si} \quad x < 0 \\ \\ 0 & \text{si} \quad x = 0 \\ \\ \dfrac{1}{x^2}e^{-1/x} & \text{si} \quad x > 0 \end{cases}$$

$$f'(0^-) = 3;\;\; f'(0^+) = \lim_{h\longrightarrow 0^+} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim_{h\longrightarrow 0^+} \frac{e^{-1/h}}{h} =$$

$$\lim_{h\longrightarrow 0^+} \frac{1/h}{e^{1/h}} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{h\longrightarrow 0^+} \frac{-1/h^2}{-1/h^2 e^{1/h}} = \lim_{h\longrightarrow 0^+} \frac{1}{e^{1/h}} = 0$$

Como $f'(0^-) \neq f'(0^+) \Longrightarrow f$ no es derivable en $x = 0$.



c) Si $x < 0$:

- Verticales: La única posible sería en $x = 1$, pero no está en la rama y, por tanto no es válida.
- Horizontales: No tiene

$$\lim_{x\longrightarrow -\infty} \frac{2x^2+3x}{x-1} = -\infty$$

- Oblicuas: $y = mx + n$:

$$m = \lim_{x\longrightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\longrightarrow -\infty} \frac{2x^2+3x}{x^2-x} = 2$$

$$n = \lim_{x\longrightarrow -\infty} (f(x) - mx) = \lim_{x\longrightarrow -\infty} \left(\frac{2x^2+3x}{x-1} - 2x\right) =$$

$$\lim_{x\longrightarrow -\infty} \left(\frac{5x}{x-1}\right) = 5 \Longrightarrow y = 2x+5$$

Si $x > 0$:

- Verticales: No puede haberlas.
- Horizontales: $y = 1$

$$\lim_{x\longrightarrow +\infty} e^{-1/x} = e^0 = 1$$

- Oblicuas: No hay por haber horizontales.

Problema 14.1.2 *(3 puntos)* Dado el sistema

$$\left\{\begin{array}{rrrr} x+ & 2y+ & (m+3)z = & 3 \\ x+ & y+ & (4+m-m^2)z = & 3 \\ 2x+ & 4y+ & 3(m+2)z = & 8 \end{array}\right.$$

se pide:

a) (2 puntos). Discutir el sistema según los valores de m.

b) (1 punto). Resolverlo para $m = 2$.

Solución:

a)

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & m+3 & 3 \\ 1 & 1 & 4+m-m^2 & 3 \\ 2 & 4 & 3(m+2) & 8 \end{array}\right) \Longrightarrow |A| = -m = 0 \Longrightarrow m = 0$$

Si $m \neq 0 \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow$Rango$(A) = 3 =$Rango$(\overline{A}) =$ nº de incógnitas $\Longrightarrow$ Sistema compatible determinado.

Si $m = 0$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 4 & 3 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \end{array}\right) \Longrightarrow |A| = 0, \left|\begin{array}{cc} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{array}\right| = -1 \neq 0 \Longrightarrow$$

Rango$(A) = 2$.

$$\left|\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & 8 \end{array}\right| = -2 \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(\overline{A}) = 3$$

Como Rango$(A) \neq$ Rango$(\overline{A}) \Longrightarrow$ el sistema es incompatible.

b) Para $m = -2$:

$$\left\{\begin{array}{rrrr} x+ & 2y+ & z = & 3 \\ x+ & y- & 2z = & 3 \\ 2x+ & 4y+ & = & 8 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = -2 \\ y = 3 \\ z = -1 \end{array}\right.$$

Problema 14.1.3 *(2 puntos)*

a) (1 punto). Hallar el punto de corte entre el plano $\pi_1 \equiv 6x-y+3z = -2$ y la recta r que pasa por el punto $P(1; 2; 0)$ y es perpendicular al plano $\pi_2 \equiv 2x + 3y - z = 8$.

b) (1 punto). Hallar el punto común a los tres planos π_3; π_4; π_5 siguientes:

$$\pi_3 \equiv 5x + 2y + 7z = 4; \quad \pi_4 \equiv x + 2y - 3z = 10$$

y π_5 el plano definido por las rectas

$$r_1 \equiv \frac{x+3}{2} = \frac{y+3}{3} = z+3; \quad r_2 \equiv x+2 = y = \frac{z+7}{2}$$

Solución:

a)

$$r : \begin{cases} \overrightarrow{u_r} = \overrightarrow{u_\pi} = (2, 3, -1) \\ P_r(1, 2, 0) \end{cases} \Longrightarrow r : \begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = 2 + 3\lambda \\ z = -\lambda \end{cases}$$

$$6x - y + 3z = -2 \Longrightarrow 6(1 + 2\lambda) - (2 + 3\lambda) + 3(-\lambda) = -2 \Longrightarrow$$

$$\lambda = -1 \Longrightarrow P'(-1, -1, 1)$$

b)

$$\pi_5 : \begin{vmatrix} 2 & 1 & x+2 \\ 3 & 1 & y \\ 1 & 2 & z+7 \end{vmatrix} = 0 \Longrightarrow \pi_5 : 5x - 3y - z = -3$$

$$P : \begin{cases} 5x + 2y + 7z = 4 \\ x + 2y - 3z = 10 \\ 5x - 3y - z = -3 \end{cases} \Longrightarrow P(1, 3, -1)$$

Problema 14.1.4 *(2 puntos)* Dados el plano $\pi \equiv x - y + 2z = 1$ y la recta

$$r \equiv \frac{x}{-6} = \frac{y+1}{1} = \frac{z}{2}$$

se pide:

a) (1 punto). Determinar la posición relativa entre el plano π y la recta r.

b) (1 punto). Determinar el plano que contenga a r y pase por $P(1; 1; 1)$.

Solución:

a)

$$r : \begin{cases} \overrightarrow{u_r} = (-6, 1, 2) \\ P_r(0, -1, 0) \end{cases} \Longrightarrow r : \begin{cases} x = -6\lambda \\ y = -1 + \lambda \\ z = 2\lambda \end{cases}$$

$$x - y + 2z = 1 \Longrightarrow (-6\lambda) - (-1 + \lambda) + 2(2\lambda) = 1 \Longrightarrow$$

$$\lambda = 0 \Longrightarrow \text{se cortan } P'(0, -1, 0)$$

b)

$$\pi_1 : \begin{cases} \overrightarrow{u_r} = (-6,1,2) \\ \overrightarrow{P_rP} = (1,2,1) \\ P(111) \end{cases} \Longrightarrow \pi : \begin{vmatrix} -6 & 1 & x \\ 1 & 2 & y+1 \\ 2 & 1 & z \end{vmatrix} = 0 \Longrightarrow \pi_1 : 3x{-}8y{+}13z = 8$$

14.2. Modelo 2013 - Opción B

Problema 14.2.1 *(3 puntos)*

a) (1 punto). Hallar, si existe, el punto de corte de las rectas

$$r_1 : \begin{cases} x - y = 2 \\ x + y + z = 3 \end{cases} ; \quad r_2 : \begin{cases} x = -1 + 2\lambda \\ y = 2 + \lambda \\ z = -\lambda \end{cases}$$

b) (1 punto). Determinar el valor de a para que los planos

$$\begin{array}{cc} \pi_1 : x + 2y + z = 3 & \pi_2 : 2x + 3y - z = 5 \\ \pi_3 : 2x + 2y + 4z = 3 & \pi_4 : x + 3y = a \end{array}$$

tengan un único punto en común.

c) (1 punto). Hallar la recta paralela a los planos

$$\pi_5 : 2x + 5y - z = 2; \quad \pi_6 : 6x - y + z = 8$$

que pasa por el punto $P(1;5;-3)$.

Solución:

a)

$$r_1 : \begin{cases} x - y = 2 \\ x + y + z = 3 \end{cases} \Longrightarrow r : \begin{cases} x = 2 + \mu \\ y = \mu \\ z = 1 - 2\mu \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2 + \mu = -1 + 2\lambda \\ \mu = 2 + \lambda \\ 1 - 2\mu = -\lambda \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \lambda = 5 \\ \mu = 7 \\ 1 - 2\mu = -\lambda \end{cases} \Longrightarrow 1{-}2(7) \neq -5 \Longrightarrow \text{se cruzan}$$

Otra forma:

$$r_1 : \begin{cases} \overrightarrow{u_{r_1}} = (1,1,-2) \\ P_{r_1}(2,0,1) \end{cases} , \quad r_2 : \begin{cases} \overrightarrow{u_{r_2}} = (2,1,-1) \\ P_{r_2}(-1,2,0) \end{cases} ; \quad \overrightarrow{P_{r_1}P_{r_2}} = (-3,2,-1)$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & -1 \\ -3 & 2 & -1 \end{vmatrix} = -8 \neq 0 \Longrightarrow r_1 \text{ y } r_2 \text{ se cruzan}$$

b)

$$\left\{\begin{array}{rrrl} x+ & 2y+ & z= & 3\\ 2x+ & 3y- & z= & 5\\ 2x+ & 2y+ & 4z= & 3\\ x+ & 3y & = & a \end{array}\right. \Longrightarrow \overline{A}=\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 1 & 3\\ 2 & 3 & -1 & 5\\ 2 & 2 & 4 & 3\\ 1 & 3 & 0 & a \end{array}\right)$$

$$\left|\begin{array}{rrr} 1 & 2 & 1\\ 2 & 3 & -1\\ 2 & 2 & 4 \end{array}\right| = -8\neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A)=3$$

$$\left|\begin{array}{rrrr} 1 & 2 & 1 & 3\\ 2 & 3 & -1 & 5\\ 2 & 2 & 4 & 3\\ 1 & 3 & 0 & a \end{array}\right| = 36-8a=0 \Longrightarrow a=\frac{9}{2}$$

Si $a = 9/2 \Longrightarrow$Rango$(A) = 3$ =Rango$(\overline{A})$ =nº de incógnitas y el sistema tiene solución única. Se trata de un sistema compatible determinado. Por tanto, en $a = 9/2$ los cuatro planos se cortan en un punto.

c)

$$\overrightarrow{u_t}=\left|\begin{array}{rrr} i & j & k\\ 2 & 5 & -1\\ 6 & -1 & 1 \end{array}\right| = 4(1,-2,-8) \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=1+\lambda\\ y=5-\lambda\\ z=-3-8\lambda \end{array}\right.$$

Problema 14.2.2 *(3 puntos)*

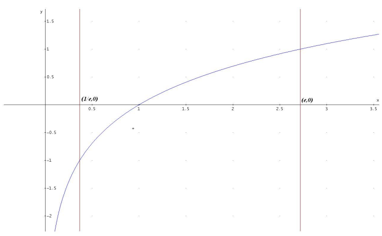
a) (0,5 puntos). Representar gráficamente el recinto limitado por la gráfica de la función $f(x) = \ln x$ y el eje OX entre las abscisas $x = 1/e$, $x = e$.

b) (1,25 puntos). Calcular el área de dicho recinto.

c) (1,25 puntos). Calcular el volumen del sólido de revolución obtenido al girar dicho recinto alrededor del eje OX.

Solución:

a) $f(1/e) = -1$, $f(e) = 1$ y $f(1) = 0$:

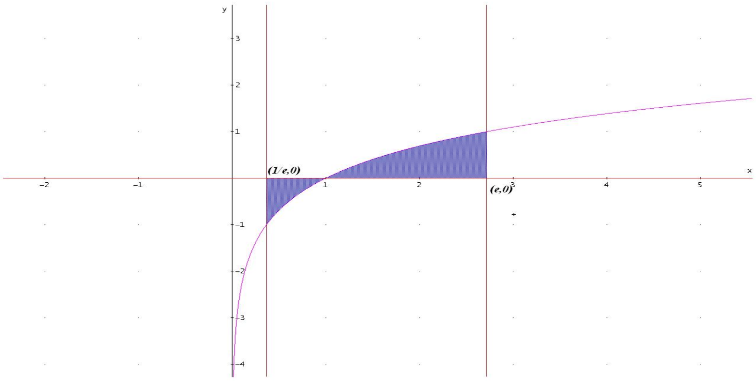


b)

$$F(x)=\int \ln x\,dx=\left[\begin{array}{c} u=\ln x \Longrightarrow du=\frac{1}{x}dx\\ dv=dx\Longrightarrow v=x\end{array}\right]=x\ln x-\int dx=x(\ln x-1)$$

$$S_1=F(1)-F(1/e)=\frac{2-e}{e};\quad S_2=F(e)-F(1)=1$$

$$\acute{A}rea=|S_1|+|S_2|=\left|\frac{2-e}{e}\right|+1=\frac{e-2}{e}+1=\frac{2(e-1)}{e}\,u^2$$



c)

$$F(x)=\int (\ln x)^2\,dx=\left[\begin{array}{c} u=(\ln x)^2 \Longrightarrow du=\frac{2\ln x}{x}dx\\ dv=dx\Longrightarrow v=x\end{array}\right]=$$

$$x(\ln x)^2-2\int \ln x\,dx=x(\ln x)^2-2x(\ln x-1)$$

$$V=\pi\int_{1/e}^{e}(\ln x)^2\,dx=\pi(F(e)-F(1/e))=\frac{\pi(e^2-5)}{e}\,u^3$$

Problema 14.2.3 *(2 puntos)*

a) (1 punto). Dada la matriz $A=\begin{pmatrix}1&2\\2&1\end{pmatrix}$ y la matriz $X=\begin{pmatrix}x&y\\z&t\end{pmatrix}$ obtener las relaciones que deben cumplir x, y, z, t para que la matriz X verifique $AX=XA$.

b) (0,5 puntos). Dar un ejemplo de matriz X distinta de la matriz nula y de la matriz identidad que cumpla la igualdad anterior.

c) (0,5 puntos). Calcular la inversa de la matriz A.

Solución:

a)

$$AX = XA \Longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} x+2z & y+2t \\ 2x+z & 2y+t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+2y & 2x+y \\ z+2t & 2z+t \end{pmatrix} \Longrightarrow$$

$$\begin{cases} x+2z = x+2y \Longrightarrow z = y \\ y+2t = 2x+y \Longrightarrow t = x \\ 2x+z = z+2t \Longrightarrow t = x \\ 2y+t = 2z+t \Longrightarrow z = y \end{cases} \Longrightarrow X = \begin{pmatrix} x & y \\ y & x \end{pmatrix}.$$

b) $X = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

c) $A^{-1} = \begin{pmatrix} -1/3 & 2/3 \\ 2/3 & -1/3 \end{pmatrix}$.

Problema 14.2.4 *(2 puntos)* De las matrices cuadradas A y B se sabe que:

$$A+B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad A^2 - AB + BA - B^2 = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

a) (1 punto). Calcular la matriz $A - B$.

b) (1 punto). Calcular las matrices A y B.

Solución:

a)

$$(A+B)(A-B) = A^2 - AB + BA - B^2 = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow$$

$$A - B = (A+B)^{-1} \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow$$

$$A - B = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1/4 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -2 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

b)

$$\left\{\begin{array}{l} A+B=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \\ \\ A-B=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -2 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \\ B=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}\right.$$