Problemas de Selectividad de Matemáticas II
Comunidad de Madrid
(Resueltos)

Isaac Musat Hervás

22 de mayo de 2013

Capítulo 4

Año 2003

4.1. Modelo 2003 - Opción A

Problema 4.1.1 *(2 puntos)* Determinar los valores de las constantes A, B, C y D para los cuales la gráfica de la función real de variable real

$$f(x) = A\sin x + Bx^2 + Cx + D$$

tiene tangente horizontal en el punto $(0,4)$ y además su derivada segunda es $f''(x) = 3\sin x - 10$

Solución:

$$f(0) = 4 \Longrightarrow D = 4$$

$$f'(x) = A\cos x + 2Bx + C \text{ como } f'(0) = 0 \Longrightarrow A + C = 0$$

$$f''(x) = -A\sin x + 2B \Longrightarrow A = -3, \quad B = -5$$

Luego $A = -3$, $B = -5$, $C = 3$ y $D = 4$:

$$f(x) = -3\sin x - 5x^2 + 3x + 4$$

Problema 4.1.2 *(2 puntos)* Calcular la siguiente integral indefinida:

$$\int \frac{x^2+4}{x^2-5x+6}\,dx$$

Solución:

$$\frac{x^2+4}{x^2-5x+6} = 1 + \frac{5x-2}{x^2-5x+6}$$

$$\frac{5x-2}{x^2-5x+6} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{x-2} = \frac{A(x-2)+B(x-3)}{x^2-5x+6}$$

$$5x-2 = A(x-2) + B(x-3)$$

Si $x = 2 \Longrightarrow 8 = -B \Longrightarrow B = -8$

Si $x = 3 \Longrightarrow 13 = A \Longrightarrow B = 13$. Luego:

$$\frac{x^2+4}{x^2-5x+6} = 1 + \frac{13}{x-3} - \frac{8}{x-2}$$

$$\int \frac{x^2+4}{x^2-5x+6}\,dx = \int dx + 13\int \frac{1}{x-3}\,dx - 8\int \frac{1}{x-2}\,dx =$$

$$x + 13\ln|x-3| - 8\ln|x-2| = x + \ln\frac{|x-3|^{13}}{|x-2|^8}$$

Problema 4.1.3 *(3 puntos)* Sea M una matriz cuadrada de orden n que verifica la identidad $M^2 - 2M = 3I$, donde I denota la matriz identidad de orden n. Se pide:

a) (1 punto) Estudiar si existe la matriz inversa de M. En caso afirmativo, expresar M^{-1} en términos de M e I.

b) (1 punto) Expresar M^3 como combinación lineal de M e I.

c) (1 punto) Hallar todas las matrices de la forma $M = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$ que verifican la identidad del enunciado.

Solución:

a)

$$M^2 - 2M = 3I \Longrightarrow (M-2)M = 3I \Longrightarrow \frac{1}{3}(M-2)M = I \Longrightarrow$$

$$M^{-1} = \frac{1}{3}(M-2)$$

b)

$$M^2 = 2M + 3I \Longrightarrow M^3 = (2M+3I)M =$$

$$2M^2 + 3M = 2M^2 + 3M = 2(2M+3I) + 3M = 7M + 6I$$

c)

$$M^2 = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2+b^2 & 2ab \\ 2ab & a^2+b^2 \end{pmatrix}$$

$$3I + 2M = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2a & 2b \\ 2b & 2a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3+2a & 2b \\ 2b & 3+2a \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a^2+b^2 & 2ab \\ 2ab & a^2+b^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3+2a & 2b \\ 2b & 3+2a \end{pmatrix}$$

$$\left\{\begin{array}{c} a^2+b^2 = 3+2a \\ 2ab = 2b \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} a=1, \ \ b=\pm 2 \\ b=0, \ \ a=\pm 1 \\ b=0, \ \ a=3 \end{array}\right.$$

Las matrices serían:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Problema 4.1.4 *(3 puntos)* Se consideran el plano π y la recta r siguientes:

$$\pi : x + y - 2z = 6; \quad r : \frac{x-1}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z+1}{-1}$$

Se pide:

a) (1,5 punto) Hallar el punto simétrico de $M(1,1,1)$ respecto del plano π.

b) (1,5 punto) Hallar el punto simétrico de $M(1,1,1)$ respecto de la recta r.

Solución:

a) Calculamos una recta perpendicular a π que pase por el punto $M(1,1,1)$:

$$\left\{\begin{array}{l} x = 1+\lambda \\ y = 1+\lambda \\ z = 1-2\lambda \end{array}\right.$$

Calculamos el punto de corte de esta recta con el plano π:

$$(1+\lambda+(1+\lambda)-2(1-2\lambda) = 6 \Longrightarrow \lambda = 1$$

$$M'(2,2,-1)$$

Este punto es el punto medio entre M y el simétrico M'':

$$M' = \frac{M''+M}{2} \Longrightarrow M'' = 2M'-M = (4,4,-2)-(1,1,1) = (3,3,-3)$$

b) Calculamos un plano perpendicular a π que contenga al punto M:

$$2x+3y-z+\lambda = 0 \Longrightarrow 2+3-1+\lambda = 0 \Longrightarrow \lambda = -4$$

$$2x+3y-z-4=0$$

Calculamos el punto de corte de este plano y la recta, para ello ponemos la ecuación paramétrica de la recta

$$\left\{\begin{array}{l} x=1+2\lambda \\ y=3\lambda \\ z=-1-\lambda \end{array}\right.$$

$$2(1+2\lambda)+3(3\lambda)-(-1-\lambda)-4=0 \Longrightarrow \lambda=\frac{1}{14}$$

$$M'\left(\frac{8}{7},\frac{3}{14},-\frac{15}{14}\right)$$

Este punto es el punto medio entre M y el simétrico M'':

$$M'=\frac{M''+M}{2} \Longrightarrow M''=2M'-M=2\left(\frac{8}{7},\frac{3}{14},-\frac{15}{14}\right)-(1,1,1)=$$

$$\left(\frac{9}{7},-\frac{4}{7},-\frac{22}{7}\right)$$

4.2. Modelo 2003 - Opción B

Problema 4.2.1 *(3 puntos)* Hallar todas las matrices X tales que $XA=AX$, siendo A la matriz

$$A=\left(\begin{array}{cc} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{array}\right)$$

Solución:

$$\left(\begin{array}{cc} a & b \\ c & d \end{array}\right)\left(\begin{array}{cc} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{array}\right)=\left(\begin{array}{cc} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{array}\right)\left(\begin{array}{cc} a & b \\ c & d \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{cc} a & a+b \\ c & c+d \end{array}\right)=\left(\begin{array}{cc} a+c & b+d \\ c & d \end{array}\right)$$

$$\left\{\begin{array}{l} a=a+c \Longrightarrow c=0 \\ c+d=d \Longrightarrow c=0 \\ a+b=b+d \Longrightarrow a=d \end{array}\right.$$

La matriz buscada es de la forma

$$\left(\begin{array}{cc} a & b \\ 0 & a \end{array}\right)$$

Problema 4.2.2 *(2 puntos)* Para cada valor del parámetro real k, se considera el sistema lineal de ecuaciones:

$$\left\{\begin{array}{rrr} x- & y = & 3 \\ 2x- & 3y = & 2k \\ 3x- & 5y = & k^2 \end{array}\right.$$

Se pide:

a) (1 punto) Discutir el sistema según los valores de k.

b) (1 punto) Resolver el sistema en los casos en que sea compatible.

Solución:

a)

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{rr|r} 1 & -1 & 3 \\ 2 & -3 & 2k \\ 3 & -5 & k^2 \end{array}\right), \quad \left|\begin{array}{rr} 1 & -1 \\ 2 & -3 \end{array}\right| = -1 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 2$$

$$|\overline{A}| = -k^2 + 4k - 3 = 0 \Longrightarrow k = 1, \ \ k = 3$$

Si $k = 1$ o $k = 3 \Longrightarrow |\overline{A}| \neq 0 \Longrightarrow$ Rango(A) =Rango$(\overline{A}) = 2 =$ nº de incógnitas y el sistema es compatible determinado, es decir, tiene solución única.

Si $k \neq 1$ y $k \neq 3 \Longrightarrow$Rango$(A) \neq$Rango$(\overline{A}) \Longrightarrow$ Sistema Incompatible.

b) Si $k = 1$:

$$\left\{\begin{array}{rrr} x- & y = & 3 \\ 2x- & 3y = & 2 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 7 \\ y = 4 \end{array}\right.$$

Si $k = 2$:

$$\left\{\begin{array}{rrr} x- & y = & 3 \\ 2x- & 3y = & 6 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 3 \\ y = 0 \end{array}\right.$$

Problema 4.2.3 *(3 puntos)* Se consideran los puntos:

$$A(1, 1, 1), \ \ B(0, -2, 2) \ \ C(-1, 0, 2) \ \ D(2, -1, -2).$$

Se pide:

a) (1 punto) Calcular el volumen del tetraedro de vértices A, B, C y D.

b) (1 punto) Calcular la distancia del punto D al plano determinado por los puntos A, B y C.

c) (1 punto) Hallar unas ecuaciones cartesianas de la recta que pasa por D y es perpendicular al plano determinado por los puntos A, B y C.

Solución:

$$\overrightarrow{AB} = (-1, -3, 1) \quad \overrightarrow{AC} = (-2, -1, 1) \quad \overrightarrow{AD} = (1, -2, -3)$$

a)

$$V = \frac{1}{6}\begin{vmatrix} -1 & -3 & 1 \\ -2 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & -3 \end{vmatrix} = \frac{5}{2}u^3$$

b)

$$\pi : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{AB} = (-1, -3, 1) \\ \overrightarrow{AC} = (-2, -1, 1) \\ A(1, 1, 1) \end{array} \right. \Longrightarrow \pi : \begin{vmatrix} -1 & -2 & x-1 \\ -3 & -1 & y-1 \\ 1 & 1 & z-1 \end{vmatrix} = 0 \Longrightarrow$$

$$2x + y + 5z - 8 = 0$$

$$d(D, \pi) = \frac{|4 - 1 - 10 - 8|}{\sqrt{4 + 1 + 25}} = \frac{15}{\sqrt{30}} = \frac{\sqrt{30}}{2}\ u$$

c)

$$r = \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_r} = (2, 1, 5) \\ D(2, -1, -2) \end{array} \right. \Longrightarrow r : \left\{ \begin{array}{l} x = 2 + 2\lambda \\ y = -1 + \lambda \\ z = -2 + 5\lambda \end{array} \right.$$

Problema 4.2.4 *(3 puntos)* Se considera la función real de variable real definida por:

$$f(x) = \sqrt[3]{x+1} - \sqrt[3]{x}$$

a) (1 punto) Hallar sus máximos y mínimos relativos y sus asíntotas.

b) (0,5 puntos) Hallar los puntos donde la gráfica de f tiene tangente vertical.

c) (0,5 puntos) Representar gráficamente la función.

d) (1 punto) Calcular el área del recinto plano acotado limitado por la gráfica de la función, el eje OX y las rectas $x = -1$, $x = 1$.

Nota: Para obtener las asíntotas puede ser de utilidad la igualdad:

$$A - B = \frac{A^3 - B^3}{A^2 + AB + B^2}$$

Solución:

a) Monotonía:

$$f'(x) = \frac{1}{3}\left(\frac{\sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{(x+1)^2}}{\sqrt[3]{x^2(x+1)^2}}\right) = 0 \Longrightarrow x = -\frac{1}{2}$$

	$(-\infty, -1/2)$	$(-1/2, \infty)$
$f'(x)$	$+$	$-$
$f(x)$	creciente	decreciente

La función es creciente en $(-\infty, -1/2)$ y decreciente en $(-1/2, \infty)$. Luego en el punto $\left(-\frac{1}{2}, \sqrt[3]{4}\right)$ tenemos un Máximo.

Asíntotas:

- Verticales: No hay
- Horizontales:

$$\lim_{x\longrightarrow\infty}(\sqrt[3]{x+1} - \sqrt[3]{x}) = [\infty - \infty] = \lim_{x\longrightarrow\infty}\frac{x+1-x}{\sqrt[3]{(x+1)^2} + \sqrt[3]{x^2(x+1)^2} + \sqrt[3]{x^2}} =$$

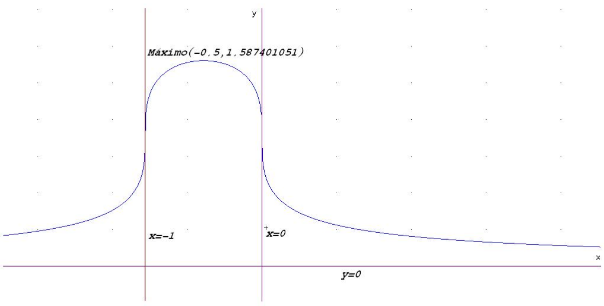
$$\lim_{x\longrightarrow\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{(x+1)^2} + \sqrt[3]{x^2(x+1)^2} + \sqrt[3]{x^2}} = 0$$

  Luego $y = 0$ es una asíntota horizontal.
- Oblicuas: No hay

b)

$$f'(a) = \infty \Longrightarrow \sqrt[3]{a^2(a+1)^2} = 0 \Longrightarrow a = 0, \;\; a = -1$$

c) Representación gráfica



d)

$$\int_{-1}^{1}(\sqrt[3]{x+1} - \sqrt[3]{x})\,dx = \frac{3\sqrt[3]{(x+1)^4}}{4} - \frac{3\sqrt[3]{x^4}}{4}\Bigg]_{-1}^{1} = \frac{3\sqrt[3]{2}}{2}\;u^2$$

4.3. Junio 2003 - Opción A

Problema 4.3.1 *(2 puntos)* Calcular los siguientes límites (donde ”ln”significa logaritmo neperiano).

a) (1 punto) $\lim\limits_{x\longrightarrow 0}\dfrac{\ln(\cos(3x))}{\ln(\cos(2x))}$

b) (1 punto) $\lim\limits_{x\longrightarrow 0}\dfrac{\sqrt{4+x}-\sqrt{4-x}}{4x}$

Solución:

a) (1 punto)

$$\lim_{x\longrightarrow 0}\frac{\ln(\cos(3x))}{\ln(\cos(2x))}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\longrightarrow 0}\frac{\dfrac{-3\sin(3x)}{\cos(3x)}}{\dfrac{-2\sin(2x)}{\cos(2x)}}=\lim_{x\longrightarrow 0}\frac{-3\sin(3x)\cos(2x)}{-2\sin(2x)\cos(3x)}$$

$$=\left[\frac{0}{0}\right]=\frac{3}{2}\lim_{x\longrightarrow 0}\frac{3\cos(3x)\cos(2x)-2\sin(3x)\sin(2x)}{2\cos(2x)\cos(3x)-3\sin(2x)\sin(3x)}=\frac{3}{2}\cdot\frac{3}{2}=\frac{9}{4}$$

b) (1 punto)

$$\lim_{x\longrightarrow 0}\frac{\sqrt{4+x}-\sqrt{4-x}}{4x}=\lim_{x\longrightarrow 0}\frac{(\sqrt{4+x}-\sqrt{4-x})(\sqrt{4+x}+\sqrt{4-x})}{4x(\sqrt{4+x}+\sqrt{4-x})}$$

$$=\lim_{x\longrightarrow 0}\frac{4+x-(4-x)}{4x(\sqrt{4+x}+\sqrt{4-x})}=\lim_{x\longrightarrow 0}\frac{2x}{4x(\sqrt{4+x}+\sqrt{4-x})}=\frac{1}{8}$$

Problema 4.3.2 *(2 puntos)* Dada la función

$$f(x)=\frac{x^5-x^8}{1-x^6}$$

a) (1 punto) Encontrar los puntos de discontinuidad de f. Determinar razonadamente si alguna de las discontinuidades es evitable.

b) (1 punto) Estudiar si f tiene alguna asíntota vertical.

Solución:

a) Los puntos en los que f es discontinua es en aquellos en los que se anula el denominador, es decir, $1 - x^6 = 0 \Longrightarrow x = 1,\ x = -1$. Para ver el tipo de discontinuidad calculamos el límite en estos puntos

$$\lim_{x\longrightarrow 1} f(x) = \lim_{x\longrightarrow 1} \frac{x^5 - x^8}{1 - x^6} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\longrightarrow 1} \frac{5x^4 - 8x^7}{-6x^5} = \lim_{x\longrightarrow 1} \frac{x^4(5 - 8x^3)}{-6x^5} =$$

$$\lim_{x\longrightarrow 1} \frac{5 - 8x^3}{-6x} = \frac{1}{2}$$

Luego la discontinuidad que hay en $x = 1$ es evitable.

$$\lim_{x\longrightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x\longrightarrow -1^+} \frac{x^5 - x^8}{1 - x^6} = \left[\frac{-2}{0^+}\right] = -\infty$$

$$\lim_{x\longrightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x\longrightarrow -1^-} \frac{x^5 - x^8}{1 - x^6} = \left[\frac{-2}{0^-}\right] = +\infty$$

Luego la discontinuidad que hay en $x = -1$ no es evitable.

b) Por lo visto en el apartado anterior $x = -1$ es una asíntota vertical.

Problema 4.3.3 *(3 puntos)* Se considera el sistema de ecuaciones

$$\left\{\begin{array}{rrr} (m+2)x+ & (m-1)y- & z = 3 \\ mx- & y+ & z = 2 \\ x+ & my- & z = 1 \end{array}\right.$$

a) (1 punto) Resolverlo para $m = 1$.

b) (2 puntos) Discutirlo para los distintos valores de m.

Solución:

a) Para $m = 1$ el sistema queda de la siguiente manera

$$\left\{\begin{array}{rrr} 3x+ & & z = 3 \\ x- & y+ & z = 2 \\ x+ & y- & z = 1 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = \dfrac{3}{2} \\ y = 1 \\ z = \dfrac{3}{2} \end{array}\right.$$

b)

$$\left\{\begin{array}{rrr} (m+2)x+ & (m-1)y- & z=3 \\ mx- & y+ & z=2 \\ x+ & my- & z=1 \end{array}\right.$$

$$A=\left(\begin{array}{ccr} m+2 & m-1 & -1 \\ m & -1 & 1 \\ 1 & m & -1 \end{array}\right) \quad \overline{A}=\left(\begin{array}{ccrr} m+2 & m-1 & -1 & 3 \\ m & -1 & 1 & 2 \\ 1 & m & -1 & 1 \end{array}\right)$$

$$|A|=\left|\begin{array}{ccr} m+2 & m-1 & -1 \\ m & -1 & 1 \\ 1 & m & -1 \end{array}\right|=-m(m+1)$$

$$-m(m+1)=0 \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} m=0 \\ m=-1 \end{array}\right.$$

- Cuando $m \neq 0$ y $m \neq -1 \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow$ Rango(A) =Rango$(\overline{A})$ = 3 =n^{o} de incógnitas, luego en este caso el sistema es compatible determinado.
- Cuando $m=0 \Longrightarrow |A|=0$, y como el menor $\left|\begin{array}{cr} 2 & -1 \\ 0 & -1 \end{array}\right|=-2 \neq 0$ tenemos que Rango$(A)=2$

  $$\overline{A}=\left(\begin{array}{rrrr} 2 & -1 & -1 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

  El menor $\left|\begin{array}{rrr} -1 & -1 & 3 \\ -1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \end{array}\right|=-1 \neq 0 \Longrightarrow$ Rango$(\overline{A})=3$

  En conclusión, cuando $m=0 \Longrightarrow$ Rango$(A)=2 \neq$Rango$(\overline{A})=3$, luego en este caso el sistema es incompatible.
- Cuando $m=-1 \Longrightarrow |A|=0$, y como el menor $\left|\begin{array}{rr} 1 & -2 \\ -1 & -1 \end{array}\right|=-3 \neq 0$ tenemos que Rango$(A)=2$

  $$\overline{A}=\left(\begin{array}{rrrr} 1 & -2 & -1 & 3 \\ -1 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

  El menor $\left|\begin{array}{rrr} -2 & -1 & 3 \\ -1 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \end{array}\right|=1 \neq 0 \Longrightarrow$ Rango$(\overline{A})=3$

  En conclusión, cuando $m=-1 \Longrightarrow$ Rango$(A)=2 \neq$Rango$(\overline{A})=3$, luego en este caso también el sistema es incompatible.

Problema 4.3.4 *(3 puntos)* Dadas las rectas en el espacio:

$$r : \frac{x-2}{3} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z}{1}$$
$$s : \frac{x+1}{2} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z-1}{2}$$

a) (1,5 punto) Hallar la distancia entre las dos rectas.

b) (1,5 puntos) Determinar las ecuaciones de la perpendicular común a r y s.

Solución:

a)

$$r : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_r} = (3, -2, 1) \\ P_r(2, 1, 0) \end{array} \right. \qquad s : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_s} = (2, -1, 2) \\ P_s(-1, -2, 1) \end{array} \right.$$

$$\overrightarrow{u} = \overrightarrow{u_r} \times \overrightarrow{u_s} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 3 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix} = -3i - 4j + k = (-3, -4, 1)$$

$$|\overrightarrow{u}| = \sqrt{9 + 16 + 1} = \sqrt{26}$$

$$\overrightarrow{P_rP_s} = (-1, -2, 1) - (2, 1, 0) = (-3, -3, 1)$$

$$\left[\overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_s}, \overrightarrow{P_rP_s}\right] = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -3 & -3 & 1 \end{vmatrix} = 22$$

Luego la distancia entre las dos rectas será:

$$d(r, s) = \frac{\left|\left[\overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_s}, \overrightarrow{P_rP_s}\right]\right|}{|\overrightarrow{u_r} \times \overrightarrow{u_s}|} = \frac{22}{\sqrt{26}}$$

b)

$$\pi_1 : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_r} = (3, -2, 1) \\ \overrightarrow{u} = (-3, -4, 1) \\ P_r(2, 1, 0) \end{array} \right. \qquad \pi_2 : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_s} = (2, -1, 2) \\ \overrightarrow{u} = (-3, -4, 1) \\ P_s(-1, -2, 1) \end{array} \right.$$

$$\pi_1 : \begin{vmatrix} 3 & -3 & x-2 \\ -2 & -4 & y-1 \\ 1 & 1 & z \end{vmatrix} = 0 \Longrightarrow x - 3y - 9z + 1 = 0$$

$$\pi_2 : \begin{vmatrix} 2 & -3 & x+1 \\ -1 & -4 & y+2 \\ 2 & 1 & z-1 \end{vmatrix} = 0 \Longrightarrow 7x - 8y - 11z + 2 = 0$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x - 3y - 9z + 1 = 0 \\ 7x - 8y - 11z + 2 = 0 \end{array} \right.$$

4.4. Junio 2003 - Opción B

Problema 4.4.1 *(2 puntos)* Comprobar, aplicando las propiedades de los determinantes, la identidad:

$$\begin{vmatrix} a^2 & ab & b^2 \\ 2a & a+b & 2b \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (a-b)^3$$

Solución:

$$\begin{vmatrix} a^2 & ab & b^2 \\ 2a & a+b & 2b \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a^2 & ab-a^2 & b^2-a^2 \\ 2a & a+b-2a & 2b-2a \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ab-a^2 & b^2-a^2 \\ -a+b & 2b-2a \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} a(b-a) & (b-a)(b+a) \\ b-a & 2(b-a) \end{vmatrix} = (b-a)^2 \begin{vmatrix} a & b+a \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = (a-b)^2(a-b) = (a-b)^3$$

Problema 4.4.2 *(2 puntos)* Encontrar un número real $\lambda \neq 0$, y todas las matrices B de dimensión 2×2 (distintas de la matriz nula), tales que

$$B \cdot \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = B \cdot \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 9 & 3 \end{pmatrix}$$

Solución:

$$\begin{pmatrix} x & y \\ z & h \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y \\ z & h \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 9 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\left\{ \begin{array}{rl} \lambda x + 3y = & 3x + 9y \\ y = & 3y \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{r} (\lambda - 3)x = 0 \\ y = 0 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{rl} \lambda z + 3h = & 3z + 9h \\ h = & 3h \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{r} (\lambda - 3)z = 0 \\ h = 0 \end{array} \right.$$

En conclusión, $\lambda = 3$ y x y z pueden ser cualquier valor que no cumpla $x = z = 0$.

$$B = \begin{pmatrix} x & 0 \\ z & 0 \end{pmatrix}$$

Problema 4.4.3 *(3 puntos)*

a) (1 punto) Dibujar la gráfica de la función $g(x) = e^x - x$

b) (1 punto) Calcular el dominio de definición de $f(x) = \dfrac{1}{e^x - x}$ y su comportamiento para $x \longrightarrow \infty$ y $x \longrightarrow -\infty$.

c) (1 punto) Determinar (si existen) los máximos y mínimos absolutos de $f(x)$ en su dominio de definición.

Solución:

a) El dominio de $g(x) = e^x - x$ es todo R, calculamos los máximos y mínimos de esta función

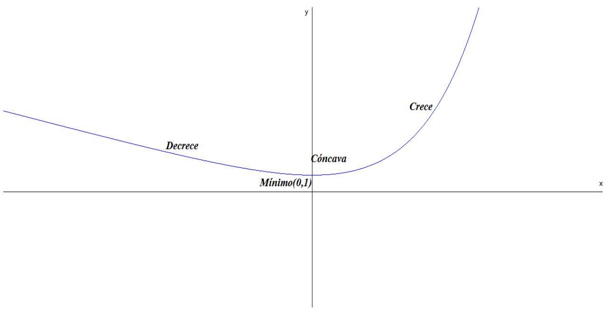
$$g'(x) = e^x - 1 = 0 \Longrightarrow e^x = 1 \Longrightarrow x = 0$$

$$g''(x) = e^x \Longrightarrow g''(0) = 1 > 0$$

Por el criterio de la segunda derivada tenemos que el punto $(0, 1)$ es un mínimo.

Observando la segunda derivada, nos damos cuenta que $g''(x) = e^x > 0, \ \forall x \in R \Longrightarrow$ la función es siempre cóncava hacia arriba $\bigcup$.

Su gráfica sería:



b)

$$f(x) = \frac{1}{e^x - x}$$

Como el denominador de esta función no se anula nunca tenemos que el dominio de $f(x)$ es todo R.

Por otra parte, si calculamos los límites

$$\lim_{x \longrightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{1}{e^{-x} + x} = 0$$

$$\lim_{x \longrightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{1}{e^x - x} = 0$$

Se pueden valorar estos límites dándonos cuenta de que se puede despreciar e^x frente x cuando $x \longrightarrow -\infty$. Y por el contrario, se puede despreciar x frente a e^x cuando $x \longrightarrow \infty$.

En conclusión, la recta $y = 0$ (el eje de abcisas) es una asíntota horizontal.

c)

$$f'(x) = \frac{1 - e^x}{(e^x - x)^3} = 0 \Longrightarrow 1 - e^x = 0 \Longrightarrow x = 0$$

$$f''(x) = \frac{e^{2x} + e^x(x-4) + 2}{(e^x - x)^3} \Longrightarrow f''(0) = -1 < 0$$

Por el criterio de la segunda derivada tenemos que el punto $(0, 1)$ es un máximo.

Problema 4.4.4 *(3 puntos)* Dados el plano

$$\pi : x + 3y - z = 1$$

y la recta

$$s : \frac{x+2}{6} = \frac{y-1}{2} = \frac{z}{1}$$

a) (1,5 punto) Hallar la ecuación general del plano π' que contiene a r y es perpendicular a π.

b) (1,5 puntos) Escribir las ecuaciones paramétricas de la recta intersección de los planos π, π'.

Solución:

a) Datos:

$$\pi : \overrightarrow{u_\pi} = (1, 3, -1) \quad r : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_r} = (6, 2, 1) \\ P_r(-2, 1, 0) \end{array} \right.$$

$$\pi' : \left| \begin{array}{rrc} 1 & 6 & x+2 \\ 3 & 2 & y-1 \\ -1 & 1 & z \end{array} \right| = 0 \Longrightarrow \pi' : 5x - 7y - 16z + 17 = 0$$

b)

$$s : \left\{ \begin{array}{l} x + 3y - z - 1 = 0 \\ 5x - 7y - 16z + 17 = 0 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x + 3y = 1 + z \\ 5x - 7y = -17 + 16z \end{array} \right. \Longrightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x = -2 + \dfrac{5}{2} \cdot \lambda \\ \\ y = 1 - \dfrac{1}{2} \cdot \lambda \\ \\ z = \lambda \end{array} \right.$$

4.5. Septiembre 2003 - Opción A

Problema 4.5.1 *(2 puntos)* Dados los puntos $A(1,0,1)$ y $B(0,2,0)$, y el plano $\pi \equiv x - 2y - z - 7 = 0$, determinar el plano que es perpendicular al plano π y pasa por los puntos A y B.

Solución:

$\overrightarrow{u_\pi} = (1,-2,-1)$

$\overrightarrow{AB} = (-1,2,-1)$

$$\pi' \equiv \begin{vmatrix} 1 & -1 & x \\ -2 & 2 & y-2 \\ -1 & -1 & z \end{vmatrix} = 0 \Longrightarrow 2x + y - 2 = 0$$

Problema 4.5.2 *(2 puntos)* Dadas las rectas:

$$r : \frac{x-1}{-1} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-k}{1}$$

$$s : \left\{ \begin{array}{rrr} x- & y+ & z = 3 \\ 3x+ & & z = 1 \end{array} \right.$$

a) (1 punto) Hallar el valor de k para que las dos rectas estén contenidas en el mismo plano.

b) (1 puntos) Para el valor de k obtenido en el apartado anterior, determinar la ecuación general del plano que las contiene.

Solución:

a)

$$\overrightarrow{u_s} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -i + 2j + 3k = (-1,2,3)$$

Si en la recta s hacemos $x = 0$ obtenemos un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas con el resultado de $y = -2$ y $z = 1$, luego un punto de la recta sería $P_s(0,-2,1)$.

$$r : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_r} = (-1,1,1) \\ P_r(1,-1,k) \end{array} \right. \qquad s : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_s} = (-1,2,3) \\ P_s(0,-2,1) \end{array} \right.$$

El plano π que buscamos contiene a las dos rectas:

$$\pi : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_r} = (-1,1,1) \\ \overrightarrow{u_s} = (-1,2,3) \\ P_r(1,-1,k) \end{array} \right. \Longrightarrow \pi \equiv \begin{vmatrix} -1 & -1 & x-1 \\ 1 & 2 & y+1 \\ 1 & 3 & z-k \end{vmatrix} = 0$$

$$-x-2y+z-1-k=0 \Longrightarrow x+2y-z+1+k=0$$

Como este plano contiene al punto $P_s(0,-2,1)$ sustituimos en el plano

$$0-4-1+1+k=0 \Longrightarrow k=4$$

b) El plano buscado es:
$$x+2y-z+5=0$$

Problema 4.5.3 *(3 puntos)* Se considera el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} 3x+ & 4y+ & 3z=9 \\ mx+ & 2y+ & z=5 \\ x+ & y+ & z=2 \end{cases}$$

a) (1,5 puntos) Determinar los valores de m para que el sistema dado tenga solución única.

b) (1,5 puntos) Resolverlo para $m=1$.

Solución:

a)

$$\begin{cases} 3x+ & 4y+ & 3z=9 \\ mx+ & 2y+ & z=5 \\ x+ & y+ & z=2 \end{cases}$$

$$A=\begin{pmatrix} 3 & 4 & 3 \\ m & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \overline{A}=\begin{pmatrix} 3 & 4 & 3 & 9 \\ m & 2 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$|A|=\begin{vmatrix} 3 & 4 & 3 \\ m & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}=-m+1=0 \Longrightarrow m=1$$

Si $m\neq 1 \Longrightarrow |A|\neq 0 \Longrightarrow$ Rango$A$ =Rango$\overline{A}=3=$n$^{\text{o}}$ de incógnitas, luego en este caso el sistema es compatible determinado.

b) Para $m=1$ el sistema queda de la siguiente manera

$$\begin{cases} 3x+ & 4y+ & 3z=9 \\ x+ & 2y+ & z=5 \\ x+ & y+ & z=2 \end{cases}$$

Tenemos
$$A=\begin{pmatrix} 3 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \overline{A}=\begin{pmatrix} 3 & 4 & 3 & 9 \\ 1 & 2 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Rango$(A) = 2$ ya que $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$.

Calculando todos los determinantes posibles que se pueden hacer de orden 3 en la matriz $\overline{A}$, comprobamos que se anulan todos ellos, y por tanto, Rango$\overline{A} = 2$.

En conclusión, si $m = 1$ Rango(A) =Rango$\overline{A} = 2 <$nº de incógnitas, luego es este caso el sistema es compatible indeterminado.

Por el menor escogido anteriormente, podemos eliminar la primera ecuación y nos queda el siguiente sistema:

$$\left\{\begin{array}{rrr} x+ & 2y+ & z = 5 \\ x+ & y+ & z = 2 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{rc} x = & -1 - t \\ y = & 3 \\ z = & t \end{array}\right.$$

Problema 4.5.4 *(3 puntos)* Sea la función

$$f(x) = \frac{\sin x}{2 - \cos x}$$

definida en el intervalo cerrado y acotado $[-2\pi, 2\pi]$. Se pide:

a) (1 punto) Calcular los puntos del intervalo dado donde f alcanza sus valores máximo y mínimo absolutos.

b) (1 punto) Dibujar la gráfica de la función f en el intervalo dado.

c) (1 punto) Calcular

$$\int_0^{\pi/3} f(x)\, dx$$

Solución:

a)

$$f'(x) = \frac{2\cos x - 1}{(2 - \cos x)^2} = 0 \Longrightarrow 2\cos x - 1 = 0 \Longrightarrow \cos x = \frac{1}{2} \Longrightarrow$$

Luego $x = \frac{\pi}{3}$, $x = \frac{5\pi}{3}$, $x = -\frac{\pi}{3}$ y $x = -\frac{5\pi}{3}$ son los únicos posibles extremos en el intervalo de definición.
Vamos a recurrir a la segunda derivada.

$$f''(x) = \frac{-2\sin x(1 + \cos x)}{(2 - \cos x)^3}$$

$$f''\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{4\sqrt{3}}{9} < 0$$

$$f''\left(-\frac{5\pi}{3}\right)=\frac{4\sqrt{3}}{9}<0$$

$$f\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$f\left(-\frac{5\pi}{3}\right)=\frac{\sqrt{3}}{3}$$

Luego la función presenta dos máximo en los puntos $\left(\frac{\pi}{3},\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$ y $\left(-\frac{5\pi}{3},\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$

$$f''\left(-\frac{\pi}{3}\right)=\frac{4\sqrt{3}}{9}>0$$

$$f''\left(\frac{5\pi}{3}\right)=\frac{4\sqrt{3}}{9}>0$$

$$f\left(-\frac{\pi}{3}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$f\left(\frac{5\pi}{3}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{3}$$

Luego la función presenta dos mínimos en los puntos $\left(-\frac{\pi}{3},-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$ y $\left(\frac{5\pi}{3},-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$

b) Para dibujar la gráfica voy a calcular los puntos de corte:

Si $x=0$ tenemos que $f(0)=0\Longrightarrow(0,0)$

Si $f(x)=0$ tenemos que

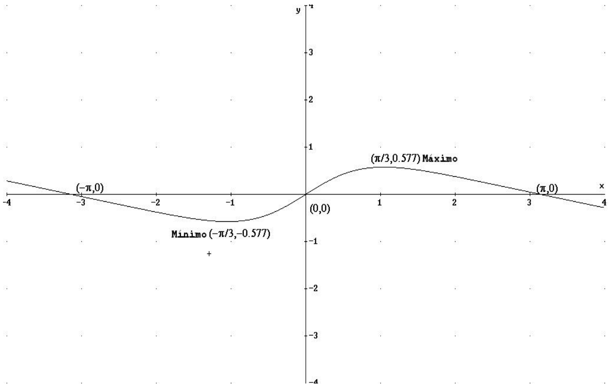
$$\frac{\sin x}{2-\cos x}=0\Longrightarrow\sin x=0\Longrightarrow x=\pi,\ \ x=-\pi$$

Luego tenemos los puntos $(\pi,0)$ y $(-\pi,0)$.

Si tenemos en cuenta que la función es impar:

c) Para resolver la integral hacemos un cambio de variable

$$t=2-\cos x\Longrightarrow\sin x\,dx=dt$$



$$\int f(x)dx = \int \frac{\sin x}{2-\cos x}\,dx = \int \frac{1}{t}\,dt = \ln|t| + C = \ln|2-\cos x| + C$$

Luego la integral pedida valdrá:

$$\int_0^{\pi/3} f(x)\,dx = \int_0^{\pi/3} \frac{\sin x}{2-\cos x}\,dx = \ln|2-\cos x|\Big]_0^{\pi/3} = \ln\frac{3}{2}$$

Problema 4.5.5 *(3 puntos)* Dado el plano

$$\pi : x + y + z = 0$$

y la recta

$$r : \frac{x-1}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z+1}{2}$$

se pide:

a) (1 punto) Calcular el punto Q en el que se cortan el plano π y la recta r.

b) (2 puntos) Encontrar un plano π', paralelo a π, tal que el punto Q' en el que se cortan el plano π' y la recta r esté a distancia 2 del punto Q hallado en el apartado anterior.

Solución:

a)

$$r : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_r} = (1,2,2) \\ P_r(1,0,-1) \end{array} \right. \Longrightarrow r : \left\{ \begin{array}{rr} x = & 1+t \\ y = & 2t \\ z = & -1+2t \end{array} \right.$$

$$1 + t + 2t - 1 + 2t = 0 \Longrightarrow t = 0 \Longrightarrow Q(1,0,-1)$$

b) Calculamos una esfera de centro Q y radio 2: $(x-1)^2+y^2+(z+1)^2 = 4$; esta esfera corta a la recta r en dos puntos Q' y Q'':

$$t^2 + 4t^2 + 4t^2 = 4 \Longrightarrow t = \pm\frac{2}{3}$$

Si $t = \frac{2}{3} \Longrightarrow Q'\left(\frac{5}{3}, \frac{4}{3}, -\frac{1}{3}\right)$, y un plano que sea paralelo a π y contenga a este punto será π':

$$\frac{5}{3} + \frac{4}{3} - \frac{1}{3} + \lambda = 0 \Longrightarrow \lambda = -\frac{8}{3}$$

$$\pi' : x + y + z - \frac{8}{3} = 0$$

Si $t = -\frac{2}{3} \Longrightarrow Q''\left(\frac{1}{3}, -\frac{4}{3}, -\frac{7}{3}\right)$, y un plano que sea paralelo a π y contenga a este punto será π'':

$$\frac{1}{3} - \frac{4}{3} - \frac{7}{3} + \lambda = 0 \Longrightarrow \lambda = -\frac{10}{3}$$

$$\pi' : x + y + z - \frac{10}{3} = 0$$

4.6. Septiembre 2003 - Opción B

Problema 4.6.1 *(2 puntos)* Un mayorista del sector turístico vende a la agencia de viajes A, 10 billetes a destinos nacionales, 10 billetes a destinos extranjeros europeos comunitarios, y 10 billetes a destinos internacionales no comunitarios, cobrando por todo ello 12.000 euros. A una segunda agencia B le vende 10 billetes a destinos nacionales y 20 a destinos internacionales no comunitarios, y cobra 13.000 euros. A una tercera agencia C le vende 10 billetes a destinos nacionales y 10 a destinos extranjeros europeos comunitarios, cobrando 7.000 euros. Se pide:

a) (1,5 puntos) Hallar el precio de cada billete.

b) (0,5 puntos) Por razones de mercado, el mayorista se ve obligado a bajar un 20 por ciento el precio de todos los billetes nacionales. Hallar en qué porcentaje debe incrementar el precio de todos los billetes extranjeros europeos comunitarios (suponiendo que mantiene constante el precio de todos los billetes internacionales no comunitarios) para mantener constantes sus ingresos totales por las ventas a las tres agencias.

Solución:

a) $x =$ precio de un billete con destino nacional.

$y =$ precio de un billete con europeo comunitario.

$z =$ precio de un billete con internacional no comunitario.

$$\left\{\begin{array}{rrrrr} 10x+ & 10y & +10z = & 12000 \\ 10x+ & & 20z = & 13000 \\ 10x+ & 10y & = & 7000 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{rrrrr} x+ & y+ & z = & 1200 \\ x+ & & 2z = & 1300 \\ x+ & y & = & 700 \end{array}\right. \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 300 \\ y = 400 \\ z = 500 \end{array}\right.$$

b) Si el precio de los billetes nacionales bajan un 20 por ciento costarían $0,8 \cdot x = 240$ euros, por lo que hay que subir el precio de los billetes europeos comunitarios en $300 - 240 = 60$ euros, lo que significa que el nuevo precio sería de $400 + 60 = 460$ euros, lo que supone una subida de estos billetes del 15 por ciento. $(400(1 + t) = 460 \Longrightarrow t = 0,15)$

Problema 4.6.2 *(2 puntos)*

a) Sean A y B dos matrices invertibles que verifican la identidad $A+B = AB$. Comprobar que entonces se tiene la fórmula:

$$(I - B)^{-1} = -B^{-1}A$$

(Donde I denota la matriz identidad).

b) Dada la matriz

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix},$$

hallar la matriz B para la cual se verifica $A + B = AB$.

Solución:

a) $A + B = AB \Longrightarrow A + B - AB = 0 \Longrightarrow A - AB = -B \Longrightarrow$

$A(I - B) = -B \Longrightarrow -A(I - B)(I - B)^{-1} = B(I - B)^{-1} \Longrightarrow$

$B(I - B)^{-1} = -A \Longrightarrow B^{-1}B(I - B)^{-1} = -B^{-1}A \Longrightarrow$

$(I - B)^{-1} = -B^{-1}A$

b) LLamamos $B = \begin{pmatrix} x & y \\ z & h \end{pmatrix}$, y tendremos:

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x & y \\ z & h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x + z & -y + h \\ 2x - z & 2y - h \end{pmatrix}$$

Tenemos:
$$\left\{\begin{array}{l} x-1=-x+z\\ 2+z=2x-z \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=0\\ z=-1 \end{array}\right.$$
$$\left\{\begin{array}{l} y+1=-y+h\\ -1+h=2y-h \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} h=0\\ y=-1/2 \end{array}\right.$$
Luego
$$B=\left(\begin{array}{rr} 0 & -1/2\\ -1 & 0 \end{array}\right)$$

Problema 4.6.3 *(3 puntos)*Sea la función $f(x)=2x|4-x|$.

a) Estudiar su continuidad y su derivabilidad.

b) Dibujar su gráfica.

c) Calcular el área del recinto acotado por la gráfica $y=f(x)$, las rectas $x=0$, $x=5$, y el eje OX.

Solución:

a)
$$f(x)=\left\{\begin{array}{rll} 2x(4-x) & \text{si} & 4-x\geq 0\\ -2x(4-x) & \text{si} & 4-x<0 \end{array}\right. \Longrightarrow$$
$$f(x)=\left\{\begin{array}{rll} 2x(4-x) & \text{si} & x\leq 4\\ -2x(4-x) & \text{si} & x>4 \end{array}\right.$$
$$\left\{\begin{array}{l} \lim\limits_{x\longrightarrow 4^+} f(x)=\lim\limits_{x\longrightarrow 4}(-2x(4-x))=0\\ \lim\limits_{x\longrightarrow 4^-} f(x)=\lim\limits_{x\longrightarrow 4}(2x(4-x))=0\\ f(4)=0 \end{array}\right. \Longrightarrow$$
$$\lim_{x\longrightarrow 4^+} f(x)=\lim_{x\longrightarrow 4^-} f(x)=f(4)$$
Luego la función es continua en $x=4$, y por tanto, en todo R.
$$f'(x)=\left\{\begin{array}{rll} 8-4x & \text{si} & x\leq 4\\ -8+4x & \text{si} & x>4 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} f'(4^-)=-8\\ f'(4^+)=8 \end{array}\right. \Longrightarrow$$
$$f'(4^-)\neq f'(4^+)$$
Luego la función no es derivable en $x=4$, pero si es derivable en $R-\{4\}$.

b) Para dibujar el recinto estudiamos la gráfica de cada rama por separado:

$f(x) = 8x - 2x^2$ si $x \in (-\infty, 4]$

$f'(x) = 8 - 4x = 0 \Longrightarrow x = 2$

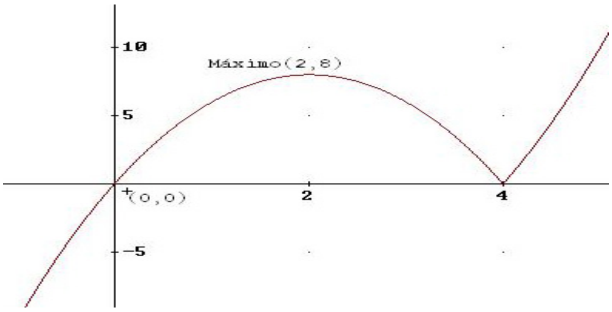
$f''(2) = -4 \Longrightarrow (2, 8)$ es un máximo.

Si hacemos $f(x) = 0 \Longrightarrow (0, 0)$ y $(4, 0)$, como puntos de corte.

$f(x) = -8x + 2x^2$ si $x \in (4, +\infty)$

$f'(x) = -8 + 4x = 0 \Longrightarrow x = 2$, que no está en el intervalo $(4, +\infty)$.

En este intevalo la función es siempre creciente, es decir, $f'(x) > 0$ cuando $x \in (4, +\infty)$.
Con estos datos estamos en condiciones de dibujar la gráfica:



c) A la vista de la gráfica podemos entender fácilmente de que recinto se trata.

$$\text{Área} = \int_0^4 2x(4-x)dx + \int_4^5 (-2x(4-x))dx =$$

$$= \int_0^4 (8x - 2x^2)dx + \int_4^5 (-8x + 2x^2)dx = 26\, u^2$$