Problemas de Selectividad de Matemáticas II
Comunidad de Madrid
(Resueltos)

Isaac Musat Hervás

22 de mayo de 2013

Capítulo 5

Año 2004

5.1. Modelo 2004 - Opción A

Problema 5.1.1 *(2 puntos)*

a) (1 punto) Calcular el límite de la sucesión cuyo término general es $\left(\dfrac{3n-1}{3n}\right)^{2n}$.

b) (1 punto) Sean las funciones $F(x) = \displaystyle\int_1^x \sqrt{5+e^{t^4}}\,dt$, $g(x) = x^2$. Calcular $(F(g(x)))'$.

Solución:

a)

$$\lim_{x\longrightarrow\infty}\left(\frac{3n-1}{3n}\right)^{2n} = [1^\infty] = e^\lambda$$

$$\lambda = \lim_{x\longrightarrow\infty} 2n\left(\frac{3n-1}{3n} - 1\right) = \lim_{x\longrightarrow\infty}\frac{-2n}{3n} = -\frac{2}{3}$$

$$\lim_{x\longrightarrow\infty}\left(\frac{3n-1}{3n}\right)^{2n} = e^{-2/3}$$

b)

$$F'(x) = \sqrt{5+e^{x^4}}, \quad g'(x) = 2x$$

Por la regla de la cadena:

$$(F(g(x)))' = F'(g(x))\cdot g'(x) = 2x\sqrt{5+e^{x^8}}$$

Problema 5.1.2 *(2 puntos)* Dada la función

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^x - 1}{x^2 - x} & \text{si} \quad x \neq 0 \\ \\ a & \text{si} \quad x = 0 \end{cases}$$

a) (1 punto) Determinar su dominio, y calcular los límites laterales cuando $x \longrightarrow 1$.

b) (1 punto) Estudiar su continuidad, y hallar el valor de a para el que f es continua en $x = 0$.

Solución:

a)

$$x^2 - x = 0 \Longrightarrow x = 0, \;\; x = 1 \Longrightarrow \text{Dom}(f) = R - \{1\} \;\; \text{en } x = 0 \;\; f(0) = a$$

Los límites laterales pedidos son:

$$\lim_{x \longrightarrow 1^+} \frac{e^x - 1}{x^2 - x} = +\infty$$

$$\lim_{x \longrightarrow 1^-} \frac{e^x - 1}{x^2 - x} = -\infty$$

b) En $x = 1$ hay una discontinuidad inevitable por el apartado anterior.

En $x = 0$:

$$\lim_{x \longrightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x^2 - x} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x \longrightarrow 0} \frac{e^x}{2x - 1} = -1$$

Para que f sea continua en ese punto $a = -1$.

Problema 5.1.3 *(3 puntos)* Discutir según los valores del parámetro λ, y resolver en los casos que sea posible el sistema:

$$\left\{ \begin{array}{rrrr} 6x+ & 4y+ & 2\lambda z = & 2 \\ \lambda x+ & y- & z = & 2 \\ 5x+ & 3y+ & 3z = & 2\lambda \end{array} \right.$$

Solución:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccr|c} 6 & 4 & 2\lambda & 2 \\ \lambda & 1 & -1 & 2 \\ 5 & 3 & 3 & 2\lambda \end{array} \right), \quad |A| = 2(3\lambda^2 - 11\lambda + 8) = 0 \Longrightarrow \lambda = 1, \;\; \lambda = 8/3$$

Si $\lambda \neq 1$ y $\lambda \neq 3 \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow$ Rango(A) =Rango$(\overline{A}) = 3 =$ nº de incógnitas y el sistema es compatible determinado, es decir, tiene solución única.

Si $\lambda = 1$:
$$\overline{A} = \left(\begin{array}{rrr|r} 6 & 4 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \\ 5 & 3 & 3 & 2 \end{array}\right)$$
$$\begin{vmatrix} 6 & 4 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 2$$
$$\begin{vmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \\ 3 & 3 & 2 \end{vmatrix} = -12 \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(\overline{A}) = 3$$
Luego el sistema es incompatible.

Si $\lambda = 8/3$:
$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 6 & 4 & 16/3 & 2 \\ 8/3 & 1 & -1 & 2 \\ 5 & 3 & 3 & 16/3 \end{array}\right)$$
$$\begin{vmatrix} 6 & 4 \\ 8/3 & 1 \end{vmatrix} = -\frac{14}{3} \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 2$$
$$\begin{vmatrix} 4 & 16/3 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \\ 3 & 3 & 16/3 \end{vmatrix} = -\frac{268}{9} \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(\overline{A}) = 3$$
Luego el sistema es incompatible.

Sólo es compatible en los casos $\lambda \neq 1$ y $\lambda \neq 3$, resolvemos por Cramer:
$$x = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 4 & 2\lambda \\ 2 & 1 & -1 \\ 2\lambda & 3 & 3 \end{vmatrix}}{2(3\lambda^2 - 11\lambda + 8)} = -\frac{2(\lambda^2 - \lambda + 3)}{3\lambda^2 - 11\lambda + 8}$$
$$y = \frac{\begin{vmatrix} 6 & 2 & 2\lambda \\ \lambda & 2 & -1 \\ 5 & 2\lambda & 3 \end{vmatrix}}{2(3\lambda^2 - 11\lambda + 8)} = \frac{2\lambda^3 - 7\lambda + 13}{3\lambda^2 - 11\lambda + 8}$$
$$z = \frac{\begin{vmatrix} 6 & 4 & 2 \\ \lambda & 1 & 2 \\ 5 & 3 & 2\lambda \end{vmatrix}}{2(3\lambda^2 - 11\lambda + 8)} = -\frac{4\lambda^2 - 9\lambda + 3}{3\lambda^2 - 11\lambda + 8}$$

Problema 5.1.4 *(3 puntos)* Dado el plano:

$$\pi : x + y + az + 1 = 0$$

y las rectas

$$r : \left\{ \begin{array}{l} x = 1 \\ y = t \\ z = t \end{array} \right. \qquad r' : \left\{ \begin{array}{l} x = 2 \\ y = 2t \\ z = t \end{array} \right. \qquad r'' : \left\{ \begin{array}{l} x = 3 \\ y = 3t \\ z = t \end{array} \right.$$

Se pide:

a) Calcular el valor de a para que los puntos de corte del plano π con las rectas r, r' y r'' estén alineados (1,5 puntos).

b) Calcula las ecuaciones de la recta que pasa por esos tres puntos (0,75 puntos).

c) Calcula la distancia de dicha recta al origen (0,75 puntos).

Solución:

a) Sea A el punto de corte de r con π:

$$1 + t + at + 1 = 0 \Longrightarrow t = -\frac{2}{a+1} \Longrightarrow A\left(1, -\frac{2}{a+1}, -\frac{2}{a+1}\right)$$

Sea A' el punto de corte de r' con π:

$$2 + 2t + at + 1 = 0 \Longrightarrow t = -\frac{2}{a+2} \Longrightarrow A'\left(2, -\frac{6}{a+2}, -\frac{3}{a+2}\right)$$

Sea A'' el punto de corte de r'' con π:

$$3 + 3t + at + 1 = 0 \Longrightarrow t = -\frac{4}{a+3} \Longrightarrow A''\left(3, -\frac{12}{a+3}, -\frac{4}{a+3}\right)$$

$$\overrightarrow{AA'} = \left(1, -\frac{4a+2}{(a+1)(a+2)}, -\frac{a-1}{(a+1)(a+2)}\right)$$

$$\overrightarrow{A'A''} = \left(1, -\frac{6a+6}{(a+3)(a+2)}, -\frac{a-1}{(a+3)(a+2)}\right)$$

Para que estén alineados los tres puntos:

$$\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{A'A''} \Longrightarrow \frac{4a+2}{(a+1)(a+2)} = \frac{6a+6}{(a+3)(a+2)} \Longrightarrow a = 0 \quad a = 1$$

Si $a = 0$:

$$\overrightarrow{AA'} = (1, -1, 1/2) \neq \overrightarrow{A'A''} = (1, -1, -1/6)$$

Esta solución no vale.

$a = 1$:

$$\overrightarrow{AA'} = (1, -1, 0) = \overrightarrow{A'A''}$$

Luego cuando $a = 1$ los tres puntos están alineados.

b) La recta h que une estos puntos:

$$h:\begin{cases} \overrightarrow{u_h}=(1,-1,0)\\ A(1,-1,-1)\end{cases} \Longrightarrow h:\begin{cases} x=1+t\\ y=-1-t\\ z=-1\end{cases}$$

c)

$$d(O,h)=\frac{|\overrightarrow{OA}\times\overrightarrow{u_h}|}{|\overrightarrow{u_h}|}=\frac{|(1,-1,-1)\times(1,-1,0)|}{|(1,-1,0)|}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=1\,u^2$$

5.2. Modelo 2004 - Opción B

Problema 5.2.1 *(2 puntos)* seconsideran las rectas

$$r:\begin{cases} x-y=2\\ 2x-z+1=0\end{cases}\quad s:\begin{cases} 2x-z+2=0\\ 2y-mz=6\end{cases}$$

a) Hallar el valor de m para que r y s sean paralelas.

b) Para el valor de m obtenido en el apartado anterior, determinar la ecuación del plano que contiene las rectas r y s.

Solución:

a)

$$r:\begin{cases} x=\lambda\\ y=-2+\lambda\\ z=1+2\lambda\end{cases}\quad s:\begin{cases} x=1+\frac{1}{2}\lambda\\ y=3+\frac{m}{2}\lambda\\ z=\lambda\end{cases}$$

$$r:\begin{cases} \overrightarrow{u_r}=(1,1,2)\\ P_r(0,-2,1)\end{cases}\quad s:\begin{cases} \overrightarrow{u_s}=(1/2,m/2,1)\\ P_s(1,3,0)\end{cases}$$

$$\overrightarrow{P_rP_s}=(1,5,-1)$$

$$\begin{vmatrix} 1/2 & m/2 & 1\\ 1 & 1 & 2\\ 1 & 5 & -1\end{vmatrix}=\frac{3}{2}(m-1)=0\Longrightarrow m=1$$

Cuando $m=1$ los vectores directores de las rectas r y s coinciden, luego para este valor las rectas son paralelas.

b)

$$\pi:\begin{cases} \overrightarrow{u}=(1,1,2)\\ \overrightarrow{v}=(1,5,-1)\\ P(0,-2,1)\end{cases}\Longrightarrow \pi:\begin{vmatrix} 1 & 1 & x\\ 1 & 5 & y+2\\ 2 & -1 & z-1\end{vmatrix}=0\Longrightarrow 11x-3y-4z-2=0$$

Problema 5.2.2 *(2 puntos)* Calcular las ecuaciones parámetricas de la recta que pasa por el punto $P(3, -1, 0)$ y corta perpendicularmente a la recta

$$r : \begin{cases} x = 3 + 2\lambda \\ y = 4 + \lambda \\ z = 5 + 3\lambda \end{cases}$$

Solución:

$$r : \begin{cases} \overrightarrow{u_r} = (2, 1, 3) \\ P_r(3, 4, 5) \end{cases}$$

Un plano perpedicular a esta recta y que contenga al punto P será:

$$\pi : 2x + y + 3z + \lambda = 0 \Longrightarrow 6 - 1 + \lambda = 0 \Longrightarrow \lambda = -5$$

$$\pi : 2x + y + 3z - 5 = 0$$

Este plano corta a la recta r en el punto P':

$$2(3 + 2\lambda) + 4 + \lambda + 3(5 + 3\lambda) - 5 = 0 \Longrightarrow \lambda = -\frac{10}{7}$$

$$P'\left(-\frac{1}{7}, \frac{18}{7}, \frac{5}{7}\right)$$

$$\overrightarrow{P'P} = (3, -1, 0) - \left(-\frac{1}{7}, \frac{18}{7}, \frac{5}{7}\right) = \left(\frac{22}{7}, -\frac{25}{7}, -\frac{5}{7}\right)$$

$$s : \begin{cases} \overrightarrow{P'P} = \left(\frac{22}{7}, -\frac{25}{7}, -\frac{5}{7}\right) \\ P(3, -1, 0) \end{cases} \Longrightarrow s : \begin{cases} x = 3 + \dfrac{22}{7}\lambda \\ y = -1 - \dfrac{25}{7}\lambda \\ z = -\dfrac{5}{7}\lambda \end{cases}$$

Problema 5.2.3 *(3 puntos)* Se considera la función :

$$f(x) = \frac{1}{1 + (\sin x)^2}$$

Se pide:

a) (1 punto) Calcular sus puntos críticos en el intervalo abierto $(-\pi, \pi)$.

b) (1 punto) Calcular los extremos relativos y/o absolutos de la función $f(x)$ en el intervalo cerrado $[-\pi, \pi]$.

c) (1 punto) Hallar la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función $f(x)$ en el punto $(\pi/4, f(\pi/4)$.

Solución:

a) $1 + \sin^2 x \neq 0$ siempre $\Longrightarrow$ no hay puntos críticos.

La función es par.

b)

$$f'(x) = \frac{-2\sin x \cos x}{(1 + (\sin^2 x))^2} = 0 \Longrightarrow -2\sin x \cos x = 0$$

$$-2\sin x \cos x = 0 \Longrightarrow \begin{cases} \sin x = 0 \Longrightarrow x = 0, \ \ x = -\pi, \ \ x = \pi \\ \cos x = 0 \Longrightarrow x = \dfrac{\pi}{2} \quad x = -\dfrac{\pi}{2} \end{cases}$$

	$(-\pi, -\frac{\pi}{2})$	$(-\frac{\pi}{2}, 0)$	$(0, \frac{\pi}{2})$	$(\frac{\pi}{2}, \pi)$
$f'(x)$	$-$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	decreciente	creciente	decreciente	creciente

En los puntos de abcisa $x = 0$, $x = -\pi$ y $x = \pi$ la función presenta un Máximo.

En el puntos de abcisa $x = -\dfrac{\pi}{2}$ y en el punto de abcisa $x = \dfrac{\pi}{2}$ la función presenta un Mínimo.

c)

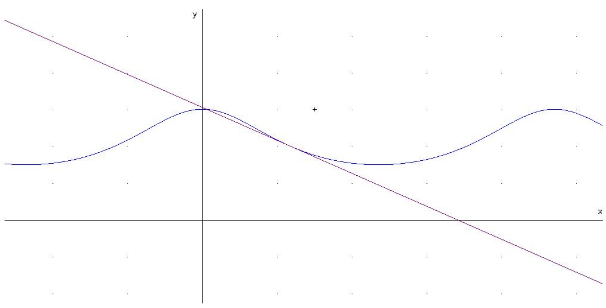
$$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{2}{3}$$

$$m = f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{4}{9}$$

La ecuación de la recta tangente

$$y - \frac{2}{3} = -\frac{4}{9}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$$

d) Representación gráfica



Problema 5.2.4 *(3 puntos)* Se considera el siguiente sistema lineal de ecuaciones, dependiente del parámetro real a:

$$\left\{\begin{array}{rrrl} x+ & 3y- & az = & 4 \\ x+ & ay+ & z = & 2 \\ x+ & 4y- & 5z = & 6 \end{array}\right.$$

Se pide:

a) (2 punto) Discutir el sistema según los diferentes valores del parámetro a.

b) (1 punto) Resolver el sistema en el caso de que tenga infinitas soluciones.

Solución:

a)

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 3 & -a & 4 \\ 1 & a & 1 & 2 \\ 1 & 4 & -5 & 6 \end{array}\right), \quad |A| = a^2 - 9a + 14 = 0 \Longrightarrow a = 2, \;\; a = 7$$

Si $a \neq 1$ o $a \neq 3 \Longrightarrow |\overline{A}| \neq 0 \Longrightarrow$ Rango(A) =Rango$(\overline{A}) = 3 =$ nº de incógnitas y el sistema es compatible determinado, es decir, tiene solución única.

Si $a = 7$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 3 & -7 & 4 \\ 1 & 7 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & -5 & 6 \end{array}\right)$$

$$\left|\begin{array}{cc} 1 & 3 \\ 1 & 7 \end{array}\right| = 4 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 2$$

$$\left|\begin{array}{ccc} 1 & 3 & 4 \\ 1 & 7 & 2 \\ 1 & 4 & 6 \end{array}\right| = 10 \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(\overline{A}) = 2$$

Como Rango$(\overline{A}) \neq$ Rango(A)Rango$(A) \Longrightarrow$ el sistema es incompatible.

Si $a = 2$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 3 & -2 & 4 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & -5 & 6 \end{array}\right)$$

$$\left|\begin{array}{cc} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{array}\right| = -1 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 2$$

$$|A_1| = |A| = 0, \quad |A_2| = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 4 & 6 \end{vmatrix} = 0$$

$$|A_3| = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & -5 & 6 \end{vmatrix} = 0, \quad |A_4| = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 4 \\ 2 & 1 & 2 \\ 4 & -5 & 6 \end{vmatrix} = 0$$

Luego Rango$(\overline{A}) = 2 =$Rango$(A) <$n^o de incógnitas $\Longrightarrow$ El sistema es compatible indeterminado, es decir, admite infinitas soluciones.

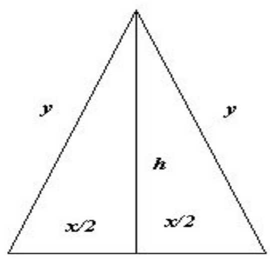
b) Por el menor elegido cuando $a = 2$ para discutir el Rango(A) podemos decidir que la tercera ecuación es combinación lineal de las dos primeras, por tanto, el sistema a resolver es:

$$\left\{ \begin{array}{rrrl} x+ & 3y- & 2z = & 4 \\ x+ & 2y+ & z = & 2 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = -2 - 7\lambda \\ y = 2 + 3\lambda \\ z = \lambda \end{array} \right.$$

5.3. Junio 2004 - Opción A

Problema 5.3.1 *(2 puntos)* Calcular la base y la altura del triángulo isósceles de perímetro 8 y área máxima.

Solución:



$$S = \frac{x \cdot h}{2}; \quad x + 2y = 8; \quad h = \sqrt{y^2 - \frac{x^2}{4}}$$

$$S(x) = \frac{x\sqrt{y^2 - \frac{x^2}{4}}}{2} = x\sqrt{4 - x}$$

$$S'(x) = \frac{8 - 3x}{2\sqrt{4 - x}} = 0 \Longrightarrow x = \frac{8}{3}$$

$$S''(x) = \frac{-88 + 21x}{16(4 - x)\sqrt{4 - x}}; \quad S''\left(\frac{8}{3}\right) = -\frac{3\sqrt{3}}{4} < 0$$

Luego se trata de un máximo. Si $x = \dfrac{8}{3} \Longrightarrow y = \dfrac{8}{3}$ y, por tanto se trata de un triángulo equilátero. Su altura será: $h = \dfrac{4\sqrt{3}}{3}$.

Problema 5.3.2 *(2 puntos)* Se considera la función

$$f(x) = \frac{(2x - 1)^2}{4x^2 + 1}$$

a) (1 punto) Calcular las asíntotas, el máximo y el mínimo absolutos de la función $f(x)$.

b) (1 punto) Calcular $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx$

Solución:

a) *a*) **Asíntotas:**

- **Verticales:** No hay (el denominador no se anula nunca)
- **Horizontales:**

$$\lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{(2x - 1)^2}{4x^2 + 1} = 1 \Longrightarrow y = 1$$

- **Oblicuas:** No hay al existir horizontales.

b) Extremos:

$$f'(x) = \frac{4(2x - 1)(2x + 1)}{(4x^2 + 1)^2} \Longrightarrow x = \frac{1}{2}, \quad x = -\frac{1}{2}$$

	$(-\infty, -1/2)$	$(-1/2, 1/2)$	$(1/2, +\infty)$
$x + 1/2$	$-$	$+$	$+$
$x - 1/2$	$-$	$-$	$+$
$f'(x)$	$+$	$-$	$+$
	crece	decrece	crece

Luego en el punto $\left(-\dfrac{1}{2}, 2\right)$ la función tiene un máximo y, por el contrario, en el punto $\left(\dfrac{1}{2}, 0\right)$ la función tiene un mínimo.

b)

$$\int \frac{(2x-1)^2}{4x^2+1}\,dx = \int \frac{4x^2-4x+1}{4x^2+1}\,dx =$$

$$= \int \left(1 - \frac{4x}{4x^2+1}\right)\,dx = x - \frac{1}{2}\ln(4x^2+1) + C$$

$$\int_0^1 \frac{(2x-1)^2}{4x^2+1}\,dx = x - \frac{1}{2}\ln(4x^2+1)\Big]_0^1 = 1 - \frac{1}{2}\ln 5$$

Problema 5.3.3 *(3 puntos)* Se considera el sistema de ecuaciones

$$\left\{\begin{array}{rrr} (1-a)x- & 2y+ & 4z=0 \\ x- & (1+a)y+ & z=0 \\ -x+ & ay- & z=0 \end{array}\right.$$

a) (1,5 punto) Estudiar su compatibilidad según los valores del parámetro a.

b) (1,5 puntos) Resolver el sistema anterior cuando sea compatible indeterminado.

Solución:

a) Sea la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1-a & -2 & 4 \\ 1 & -(1+a) & 1 \\ -1 & a & -1 \end{pmatrix} \Longrightarrow |A| = -a-3 = 0 \Longrightarrow a = -3$$

Si $a \neq -3 \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow$Rango$(A) = 3$ y como el sistema es homogeneo resultaría que es compatible determinado. la solución en este caso sería $x = y = z = 0$.

Si $a = -3$ tenemos

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 4 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & -3 & -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 8 + 2 = 10 \neq 0$$

Luego tenemos que Rango$(A) = 2$ y como el sistema es homogeneo podemos concluir, en este caso que, el sistema es compatible indeterminado.

b) Resolvemos este último caso. Por el menor que hemos escogido podemos despreciar la tercera ecuación.

$$\left\{\begin{array}{rrr} 4x- & 2y+ & 4z=0 \\ x+ & 2y+ & z=0 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{rrr} 4x- & 2y= & -4z \\ x+ & 2y= & -z \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=-\lambda \\ y=0 \\ z=\lambda \end{array}\right.$$

Problema 5.3.4 *(3 puntos)* Se consideran la recta y los planos siguientes:

$$r:\left\{\begin{array}{l} x=2-3\lambda \\ y=1+2\lambda \\ z=4-\lambda \end{array}\right. ; \quad \pi_1: 2-3x+2y-z=0; \quad \pi_2: 3+2x+2y-2z=0$$

a) (1 punto) Determinar la posición relativa de la recta con respecto a cada uno de los planos.

b) (1 punto) Determinar la posición relativa de los dos planos.

c) (1 punto) Calcular la distancia de r a π_2.

Solución:

a)

$$r: \frac{x-2}{-3}=\frac{y-1}{2}=\frac{z-4}{-1} \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} 2x-4=-3y+3 \\ -x+2=-3z+12 \end{array}\right. \Longrightarrow$$

$$\left\{\begin{array}{l} 2x+3y-7=0 \\ x-3z+10=0 \end{array}\right.$$

Primero estudiamos la posición de esta recta con respecto a $\pi_1: 3x-2y+z-2=0$, y tenemos:

$$A=\left(\begin{array}{rrr} 2 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & -3 \\ 3 & -2 & 1 \end{array}\right); \quad \overline{A}=\left(\begin{array}{rrr|r} 2 & 3 & 0 & -7 \\ 1 & 0 & -3 & 10 \\ 3 & -2 & 1 & -2 \end{array}\right)$$

Tenemos que $|A|=-4 \Longrightarrow$Rango$(A)=3=$Rango$(\overline{A}) \Longrightarrow$ La recta corta al plano π_1.

Ahora estudiamos la posición de esta recta con respecto a $\pi_2: 2x+2y-2z+3=0$, y tenemos:

$$A=\left(\begin{array}{rrr} 2 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & -3 \\ 2 & 2 & -2 \end{array}\right); \quad \overline{A}=\left(\begin{array}{rrr|r} 2 & 3 & 0 & -7 \\ 1 & 0 & -3 & 10 \\ 2 & 2 & -2 & -2 \end{array}\right)$$

Tenemos que $|A| = 0$ y como $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -3 \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 2$.

Por otra parte tenemos que

$$\begin{vmatrix} 3 & 0 & -7 \\ 0 & -3 & 10 \\ 2 & -2 & -2 \end{vmatrix} = 36 \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(\overline{A}) = 3.$$

Luego la recta es paralela al plano.

b) $-\dfrac{3}{2} \neq \dfrac{2}{2} \Longrightarrow \pi_1$ y π_2 se cortan.

c) Un punto de r es $P_r(2, 1, 4)$ y tendremos:

$$d(P_r, \pi_2) = \frac{|2 \cdot 2 + 1 \cdot 2 - 2 \cdot 4 + 3|}{\sqrt{4+4+4}} = \frac{\sqrt{3}}{6}$$

5.4. Junio 2004 - Opción B

Problema 5.4.1 *(2 puntos)* Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & -1 \\ 5 & -1 & 2 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Se pide:

a) (1 punto) Hallar A^{-1}.

b) (1 punto) Hallar la matriz X, tal que:

$$A \cdot X \cdot A^T = B$$

(donde A^T significa la matriz traspuesta de A).

Solución:

a)

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}; \quad A^T = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 5 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}; \quad (A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$$

b)

$$AXA^T = B \Longrightarrow A^{-1}AXA^T(A^T)^{-1} = A^{-1}B(A^T)^{-1} \Longrightarrow X = A^{-1}B(A^T)^{-1}$$

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & -3 & -4 \\ -2 & -4 & 3 \end{pmatrix}$$

Problema 5.4.2 *(2 puntos)*

a) (1 punto) Dado el sistema $\left\{\begin{array}{rr} x+ & 2y=1 \\ 3x- & y=2 \end{array}\right.$, escribir una tercera ecuación de la forma $ax+by=c$ (distinta de las anteriores) de manera que el sistema de tres ecuaciones y dos incógnitas resultante siga siendo compatible.

b) (1 punto) Dado el sistema $\left\{\begin{array}{rrr} 2x+ & 2y- & z=1 \\ x+ & y+ & 2z=1 \end{array}\right.$, escribir una tercera ecuación de la forma $\alpha x+\beta y+\gamma z=1$ (distinta de las anteriores) de manera que el sistema de tres ecuaciones y tres incógnitas resultante siga siendo compatible indeterminado.

Solución:

a) La tercera ecuación debe de ser una combinación lineal de las anteriores, ya que en caso contrario el sistema resultaría incompatible. La suma de las dos puede ser una solución:

$$4x+y=3$$

b) La tercera ecuación tiene que ser una combinación lineal de las dos anteriores, pues en caso contrario, el sistema resultaría compatible determinado o incompatible. Como el término independiente tiene que ser 1, podemos multiplicar la primera por 2 y le restamos la segunda:

$$3x+3y-4z=1$$

Problema 5.4.3 *(3 puntos)*

a) (2 puntos) Determinar la posición relativa de los siguientes planos, para los distintos valores del parámetro k:

$$\begin{array}{lrrrr} \pi_1: & 2x+ & 3y+ & kz= & 3 \\ \pi_2: & x+ & ky- & z= & -1 \\ \pi_3: & 3x+ & y- & 3z= & -k \end{array}$$

b) (1 punto) En los casos en que los tres planos anteriores se corten a lo largo de una recta común, hallar un vector director de dicha recta.

Solución:

a) Sea la matriz

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & k & 3 \\ 1 & k & -1 & -1 \\ 3 & 1 & -3 & -k \end{array}\right) \Longrightarrow |A| = -3k^2-5k+2 = 0 \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} k = \dfrac{1}{3} \\ \\ k = -2 \end{array}\right.$$

Si $k \neq \dfrac{1}{3}$ y $k \neq -2 \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow$Rango$(A) = 3 =$Rango$(\overline{A}) \Longrightarrow$ Sistema Compatible Determinado$\Longrightarrow$ Los tres planos se cortan en un punto.

Si $k = \dfrac{1}{3}$ tenemos

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 1/3 & 3 \\ 1 & 1/3 & -1 & -1 \\ 3 & 1 & -3 & -1/3 \end{array}\right), \quad \left|\begin{array}{cc} 2 & 3 \\ 1 & 1/3 \end{array}\right| = -\frac{7}{3} \neq 0$$

Luego tenemos que Rango$(A) = 2$. Por otra parte tenemos

$$\left|\begin{array}{ccc} 3 & 1/3 & 3 \\ 1/3 & -1 & -1 \\ 1 & -3 & -1/3 \end{array}\right| = -\frac{224}{27} \neq 0$$

Luego Rango$(\overline{A}) = 3 \neq$Rango$(A) = 2 \Longrightarrow$ Sistema Incompatible. En este caso tenemos que comparar los planos dos a dos:

$$\left.\left\{\begin{array}{l} \pi_1 \text{ con } \pi_2 : \dfrac{2}{1} \neq \dfrac{3}{1/3} \Longrightarrow \text{se cortan} \\ \pi_1 \text{ con } \pi_3 : \dfrac{2}{1} \neq \dfrac{3}{1} \Longrightarrow \text{se cortan} \\ \pi_2 \text{ con } \pi_3 : \dfrac{1}{3} = \dfrac{1/3}{1} = \dfrac{-1}{-3} \neq \dfrac{-1}{-1/3} \Longrightarrow \text{son paralelos} \end{array}\right.\right\} \Longrightarrow$$

Dos planos son paralelos (π_2 y π_3) y otro plano corta a los dos (π_1).

Si $k = -2$ tenemos

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -2 & 3 \\ 1 & -2 & -1 & -1 \\ 3 & 1 & -3 & 2 \end{array}\right), \quad \left|\begin{array}{cc} 2 & 3 \\ 1 & -2 \end{array}\right| = -7 \neq 0$$

Tenemos que Rango$(A) = 2$, y si observamos la matriz $\overline{A}$ la tercera fila es la suma de las anteriores y, por tanto, Rango$(\overline{A}) = 2$. Concluimos con que el sistema es Compatible Indeterminado; comparando los planos se compruebo que no hay coincidentes y concluyo con que se cortan los tres en una recta.

b) Puedo definir esta recta como intersección de dos de estos planos r : $\left\{\begin{array}{rrrr} 2x+ & 3y- & 2z= & 3 \\ x- & 2y- & z= & -1 \end{array}\right.$ y su vector director será:

$$\overrightarrow{u_r} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 3 & -2 \\ 1 & -2 & -1 \end{vmatrix} = (-7, 0, -7)$$

Problema 5.4.4 *(3 puntos)* Dada la función $f(x) = 1 - x^2$, se pide:

a) (1 punto) Halla la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto $P(a, f(a))$, donde $0 < a < 1$.

b) (1 punto) Hallar los puntos A y B en los que la recta hallada en el apartado anterior corta a los ejes vertical y horizontal respectivamente.

c) (1 punto) Determinar el valor de $a \in (0, 1)$ para el cual la distancia entre el punto A y el punto $P(a, f(a))$ es el doble de la distancia entre el punto B y el punto $P(a, f(a))$.

Solución:

a) Tenemos que calcular la recta tangente a la gráfica de f en el punto $(a, f(a)) = (a, 1 - a^2)$. Calculamos la pendiente de esta recta

$$f'(x) = -2x \Longrightarrow m = f'(a) = -2a$$

La ecuación de la recta buscada será

$$y - (1 - a^2) = -2a(x - a) \Longrightarrow 2ax + y - (1 + a^2) = 0$$

b) **Corte con el eje OY:** Hacemos $x = 0 \Longrightarrow y = 1+a^2 \Longrightarrow A(0, 1+a^2)$

Corte con el eje OX: Hacemos $y = 0 \Longrightarrow x = a + \dfrac{1-a^2}{2a} = \dfrac{a^2+1}{2a}$. Luego el punto buscado es $B\left(\dfrac{a^2+1}{2a}, 0\right)$.

c)

$$d(A, P) = \sqrt{(a-0)^2 + (1 - a^2 - (1 + a^2))^2} = a\sqrt{1 + 4a^2}$$

$$d(B, P) = \sqrt{\left(a - \left(a + \frac{1-a^2}{2a}\right)\right)^2 + (1 - a^2 - 0)^2} =$$

$$\sqrt{\frac{(1-a^2)^2}{4a^2} + (1-a^2)^2} = (1-a^2)\sqrt{\frac{1+4a^2}{4a^2}} = \frac{1-a^2}{2a}\sqrt{1+4a^2}$$

$$d(A,P)=2d(B,P)\Longrightarrow a\sqrt{1+4a^2}=2\frac{1-a^2}{2a}\sqrt{1+4a^2}\Longrightarrow$$

$$a=\frac{1-a^2}{a}\Longrightarrow a^2=1-a^2\Longrightarrow 2a^2=1\Longrightarrow a=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Como $a\in(0,1)$ la solución pedida es la positiva $a=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

5.5. Septiembre 2004 - Opción A

Problema 5.5.1 *(2 puntos)* Dadas las matrices

$$A=\begin{pmatrix}1&2&0\\0&1&2\\0&2&3\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}1&1&2\\1&1&-1\\0&1&3\end{pmatrix}$$

a) (1 punto) Determinar la matriz inversa de B.

b) (1 punto) Determinar una matriz X tal que $A=B\cdot X$.

Solución:

a)

$$B^{-1}=\begin{pmatrix}4/3&-1/3&-1\\-1&1&1\\1/3&-1/3&0\end{pmatrix}$$

b) $A=BX\Longrightarrow B^{-1}A=B^1BX\Longrightarrow B^{-1}A=X$

$$X=\begin{pmatrix}4/3&-1/3&-1\\-1&1&1\\1/3&-1/3&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&2&0\\0&1&2\\0&2&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4/3&1/3&-11/3\\-1&1&5\\1/3&1/3&-2/3\end{pmatrix}$$

Problema 5.5.2 *(2 puntos)*

a) (1 punto) Si A es una matriz tal que $A^2=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$, ¿cuál es el valor del determinante de A?

b) (1 punto) Calcular un número k tal que:

$$\left[\begin{pmatrix}3&-4\\1&-1\end{pmatrix}-k\cdot\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\right]^2=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$$

Solución:

a) $|A^2| = |A \cdot A| = |A| \cdot |A| = 0 \Longrightarrow |A| = 0$

b)

$$\left[\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} - k \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right]^2 = \begin{pmatrix} 3-k & -4 \\ 1 & -1-k \end{pmatrix}^2 =$$

$$= \begin{pmatrix} k^2-6k+5 & 8(k-1) \\ 2-2k & k^2+2k-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Tenemos que:

$$\left.\begin{array}{l} k^2-6k+5=0 \\ 8(k-1)=0 \\ 2-2k=0 \\ k^2+2k-3=0 \end{array}\right\} \Longrightarrow k=1$$

Problema 5.5.3 *(3 puntos)* Sea el plano $\pi : x + 2y + 3z = 6$.

a) (1 punto) Hallar el punto simétrico del $(0,0,0)$ respecto de π.

b) (1 punto) Hallar el plano perpendicular a π que contiene a OZ.

c) (1 punto) Hallar el volumen del tetraedro cuyos vértices son el origen y los puntos de intersección de π con los ejes de coordenados.

Solución:

a) Calculo r, recta perpendicular a π que pasa por $P(0,0,0)$:

$$\left\{\begin{array}{l} \overrightarrow{u_r} = \overrightarrow{u_\pi} = (1,2,3) \\ P(0,0,0) \end{array}\right. \Longrightarrow r : \left\{\begin{array}{l} x = t \\ y = 2t \\ z = 3t \end{array}\right.$$

Esta recta cortará con el plano π en el punto P'':

$$t + 2(2t) + 3(3t) = 6 \Longrightarrow t = \frac{3}{7} \Longrightarrow P''\left(\frac{3}{7}, \frac{6}{7}, \frac{9}{7}\right)$$

El punto simétrico P' de P tendrá por punto medio a P'', es decir:

$$P'' = \frac{P+P'}{2} \Longrightarrow P' = 2P'' - P = \left(\frac{6}{7}, \frac{12}{7}, \frac{18}{7}\right)$$

El punto simétrico de $P(0,0,0)$ respecto al plano π es $P'\left(\frac{6}{7}, \frac{12}{7}, \frac{18}{7}\right)$.

b)

$$\pi' : \begin{cases} \overrightarrow{u_\pi} = (1,2,3) \\ \overrightarrow{u} = (0,0,1) \\ O(0,0,0) \end{cases} \Longrightarrow \begin{vmatrix} 1 & 0 & x \\ 2 & 0 & y \\ 3 & 1 & z \end{vmatrix} = 0 \Longrightarrow 2x - y = 0$$

c) Los puntos de corte de π con los ejes será:

Corte con el eje OX: $y = 0$, $z = 0 \Longrightarrow x = 6 \Longrightarrow A(6,0,0)$
Corte con el eje OY: $x = 0$, $z = 0 \Longrightarrow y = 3 \Longrightarrow B(0,3,0)$
Corte con el eje OZ: $x = 0$, $y = 0 \Longrightarrow z = 2 \Longrightarrow C(0,0,2)$

Tendremos: $\overrightarrow{OA} = (6,0,0)$, $\overrightarrow{OB} = (0,3,0)$, $\overrightarrow{OC} = (0,0,2)$:

$$V = \frac{1}{6}\begin{vmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 6\,u^3$$

Problema 5.5.4 *(3 puntos)* Sabiendo que una función $f(x)$ tiene como derivada

$$f'(x) = (x-4)^2(x^2 - 8x + 7)$$

a) (1 punto) Hallar los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de f.

b) (1 punto) Hallar los máximos y mínimos relativos de f.

c) (1 punto) ¿Es el punto $x = 4$ un punto de inflexión de f?. Justificar razonadamente la respuesta.

Solución:

a)

$$f'(x) = (x-4)^2(x^2 - 8x + 7) = 0 \Longrightarrow x = 4, \;\; x = 1, \;\; x = 7$$

Como $(x-4)^2 > 0$ solo tendremos que estudiar el signo de $x^2 - 8x + 7 = (x-1)(x-7)$

	$(-\infty, 1)$	$(1,7)$	$(7,\infty)$
$x-1$	$-$	$+$	$+$
$x-7$	$-$	$-$	$+$
$f'(x)$	$+$	$-$	$+$

Luego f crece en los intervalos $(-\infty,1)\cup(7,\infty)$, mientras que decrece en el intervalo $(1,7)$.

b) Por el apartado anterior observamos que en $x = 1$ la función pasa de crecer a decrecer, por lo que podemos asegurar que estamos ante un Máximo en $\left(1, \dfrac{162}{5}\right)$; en el punto $x = 7$, por el contrario, la función pasa de decrecer a crecer, por lo que estamos ante un Mínimo en $\left(7, -\dfrac{162}{5}\right)$. En $x = 4$ la función pasa de decrecer a decrecer y, por tanto, en el punto $(4, 0)$ no hay ni Máximo ni Mínimo.

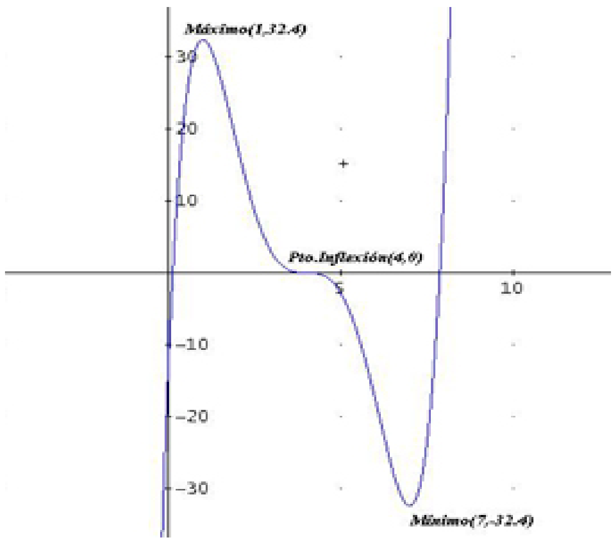
c) Para que en $x = 4$ exista un punto de inflexión la función debe de cambiar de cóncava a convexa o viceversa. Para comprobarlo calculamos la segunda derivada

$$f''(x) = 2(x-4)(2x^2-16x+23) = 0 \Longrightarrow x = 4, \quad x = 1,8787, \quad x = 6,1213$$

Serían los posibles puntos de inflexión. En el intervalo $(1,8787; 4)$ $f''(x) > 0 \Longrightarrow f$ es convexa, mientras que en el intervalo $(4; 6,1213)$ $f''(x) < 0 \Longrightarrow f$ es cóncava. Por tanto, podemos asegurar que la función f tiene un punto de inflexión en $(4, 0)$. Otra manera de comprobarlo es através de la tercera derivada:

$$f'''(x) = 6(2x^2 - 16x + 29) \Longrightarrow f'''(4) = -18 \neq 0$$

Luego se trata de un punto de inflexión.



5.6. Septiembre 2004 - Opción B

Problema 5.6.1 *(2 puntos)*

a) (1,5 puntos) Hallar el conjunto formado por los puntos del plano $z = 0$ que distan 3 unidades del plano de ecuación $2x - y + 2z = 4$.

b) (0,5 puntos) Describir dicho conjunto.

Solución:

a) Un punto del plano $z = 0$ será $P(x, y, 0)$

$$d(P, \pi) = \frac{|2x - y - 4|}{\sqrt{4 + 1 + 4}} = 3 \Longrightarrow |2x-y-4| = 9 \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{ll} 2x - y- & 13 = 0 \\ 2x - y+ & 5 = 0 \end{array} \right.$$

Los puntos que cumplen esta condición serán las rectas:

$$r : \left\{ \begin{array}{l} 2x - y - 13 = 0 \\ z = 0 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = -\frac{13}{2} + \frac{1}{2}\lambda \\ y = \lambda \\ z = 0 \end{array} \right.$$

$$s : \left\{ \begin{array}{l} 2x - y + 5 = 0 \\ z = 0 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = -\frac{5}{2} + \frac{1}{2}\lambda \\ y = \lambda \\ z = 0 \end{array} \right.$$

b) El conjunto será:

$$\left\{ (x, y, z) \in R^3 : (x, y, z) \in r o (x, y, z) \in s \right\}$$

Problema 5.6.2 *(2 puntos)* El plano $\pi : 2x - 2y + z = -2$ determina un tetraedro con los tres planos coordenados. Se pide:

a) (0,5 puntos) Calcular la longitud de la altura del tetraedro que parte del origen.

b) (0,5 puntos) Determinar las ecuaciones paramétricas de la recta que contiene a dicha altura.

c) (1 punto) Calcular el área de la cara del tetraedro que está contenida en el plano π.

Solución:

a)

$$d(O, \pi) = \frac{|0 + 0 + 0 - 2|}{\sqrt{4 + 4 + 1}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

b)

$$r : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_r} = (2, -2, 1) \\ O(0, 0, 0) \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 2\lambda \\ y = -2\lambda \\ z = \lambda \end{array} \right.$$

c) Corte con el eje OX: $y = 0,\ z = 0 \Longrightarrow x = -1 \Longrightarrow A(-1, 0, 0)$
Corte con el eje OY: $x = 0,\ z = 0 \Longrightarrow y = 1 \Longrightarrow B(0, 1, 0)$
Corte con el eje OZ: $x = 0,\ y = 0 \Longrightarrow z = -2 \Longrightarrow C(0, 0, -2)$

$\overrightarrow{AC} = (0, 0, -2) - (-1, 0, 0) = (1, 0, -2)$
$\overrightarrow{AB} = (0, 1, 0) - (-1, 0, 0) = (1, 1, 0)$

$$\overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{AB} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (2, -2, 1)$$

$$S = \frac{1}{2}|\overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{AB}| = \frac{\sqrt{4+4+1}}{2} = \frac{3}{2}\ u^2$$

Problema 5.6.3 *(3 puntos)* Sea la función $f(x) = \dfrac{2x+1}{(x^2+x+1)^2}$

a) (1 punto) Hallar sus máximos y mínimos relativos y sus asíntotas.

b) (1 punto) Dibujar la gráfica de la función, utilizando la información obtenida en el apartado anterior, teniendo en cuenta, además, que f tiene exactamente tres puntos de inflexión cuyas abcisas son $x_1 = \dfrac{-1-\sqrt{3}}{2}$, $x_2 = -\dfrac{1}{2}$, $x_3 = \dfrac{-1+\sqrt{3}}{2}$, respectivamente.

c) (1 punto) Calcular el área del recinto limitado por la gráfica de la función f, el eje OX, la recta $x = 0$, y la recta $x = 2$.

Solución:

a) **Máximos y Mínimos relativos:** $f'(x) = -\dfrac{6x(x+1)}{(x^2+x+1)^3} = 0 \Longrightarrow x = -1,\ x = 0$. El denominador no se anula nunca, y es siempre positivo.

	$(-\infty, -1)$	$(-1, 0)$	$(0, \infty)$
$x+1$	$-$	$+$	$+$
$-x$	$+$	$+$	$-$
$f'(x)$	$-$	$+$	$-$

En $x = -1$ la gráfica de la función pasa de decrecer a crecer, luego estamos ante un Mínimo en el punto $\left(-1, \dfrac{1}{3}\right)$. En $x = 0$ la gráfica de la función pasa de crecer a decrecer, luego estamos ante un Máximo en el punto $(0, 1)$.

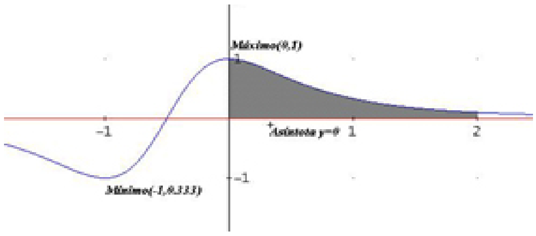
Asíntotas:

- **Verticales:** No hay, ya que el denominador no se anula nunca.

- **Horizontales:**
$$\lim_{x\longrightarrow +\infty}\frac{2x+1}{(x^2+x+1)^2}=\lim_{x\longrightarrow -\infty}\frac{2x+1}{(x^2+x+1)^2}=0\Longrightarrow y=0$$

- **Oblicuas:** No hay al existir horizontales.

b) Representación Gráfica:



c)
$$\int_0^2\frac{2x+1}{(x^2+x+1)^2}\,dx=-\frac{1}{x^2+x+1}\Big]_0^2=\frac{6}{7}$$

Problema 5.6.4 *(3 puntos)*

a) (2 puntos) Discutir según los valores del parámetro real λ el sistema
$$\left\{\begin{array}{rrrr}\lambda x+ & 3y+ & z= & \lambda\\ x+ & \lambda y+ & \lambda z= & 1\\ x+ & y- & z= & 1\end{array}\right.$$

b) (1 punto) Resolver el sistema anterior en el caso $\lambda=2$

Solución:

a)
$$\overline{A}=\left(\begin{array}{rrr|r}\lambda & 3 & 1 & \lambda\\ 1 & \lambda & \lambda & 1\\ 1 & 1 & -1 & 1\end{array}\right)$$
$$|A|=-2\lambda^2+2\lambda+4=0\Longrightarrow \lambda=2,\ \ \lambda=-1$$
Si $\lambda\neq 2$ y $\lambda\neq -1\Longrightarrow |A|\neq 0\Longrightarrow$ Rango(A) =Rango$(\overline{A})=3=$nº de incógnitas $\Longrightarrow$ Sistema Compatible Determinado.

Si $\lambda=2$:
$$\overline{A}=\left(\begin{array}{rrr|r}2 & 3 & 1 & 2\\ 1 & 2 & 2 & 1\\ 1 & 1 & -1 & 1\end{array}\right)$$

Observamos que la tercera fila es la resta de la primera menos la segunda, y teniendo en cuenta que $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$, podemos concluir en este caso:
Rango($\overline{A}$) =Rango(A) $= 2 <$nº de incógnitas $\Longrightarrow$ Sistema Compatible Indeterminado

Si $\lambda = -1$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{rrr|r} -1 & 3 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{array} \right)$$

Basta observar las columnas de la matriz para darnos cuenta que la primera y la cuarta son iguales y la tercera está multiplicada por -1. Si tenemos en cuenta que $\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -4 \neq 0$, podemos concluir en este caso:
Rango($\overline{A}$) =Rango(A) $= 2 <$nº de incógnitas $\Longrightarrow$ Sistema Compatible Indeterminado.

b)

$$\left\{ \begin{array}{rrrl} 2x+ & 3y+ & z = & 2 \\ x+ & 2y+ & 2z = & 1 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{rrrr} 2x+ & 3y = & 2- & z \\ x+ & 2y = & 1- & 2z \end{array} \right. \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \left\{ \begin{array}{rr} x = & 1+4t \\ y = & -3t \\ z = & t \end{array} \right.$$