Problemas de Selectividad de Matemáticas II
Comunidad de Madrid
(Resueltos)

Isaac Musat Hervás

22 de mayo de 2013

Capítulo 6

Año 2005

6.1. Modelo 2005 - Opción A

Problema 6.1.1 *(2 puntos)*

a) Justificar razonadamente que la gráfica de la función

$$f(x) = x^{15} + x + 1$$

corta al eje OX al menos una vez en el intervalo $[-1, 1]$.

b) Determinar el número exacto de puntos de corte con el eje OX cuando x recorre toda la recta real.

Solución:

a) La función $f(x) = x^{15} + x + 1$ en los extremos del intervalo $[-1, 1]$ toma los valores $f(-1) = -1$ y $f(1) = 3$, como además la función es continua por el teorema de Bolzano: $\exists c \in [-1, 1]$ tal que $f(c) = 0$.

b) La derivada de la función $f'(x) = 15x^{14} + 1 > 0$ para cualquier valor de x, luego la función es siempre creciente, luego sólo puede cortar una vez al eje OX, y por el apartado anterior este punto de corte tiene que estar en el intervalo $[-1, 1]$.

Problema 6.1.2 *(2 puntos)*

a) (1 punto) Determinar el punto P, contenido en el primer cuadrante, en el que se corta la gráfica de la función $f(x) = \dfrac{x^2}{2}$ y la circunferencia $x^2 + y^2 = 8$.

b) (1 punto) Calcular el área de la región limitada por la recta que une el origen y el punto P hallado en el apartado anterior, y el arco de la curva $y = \dfrac{x^2}{2}$ comprendido entre el origen y el punto P.

Solución:

a)

$$\left\{ \begin{array}{l} x^2 - 2y = 0 \\ x^2 + y^2 = 8 \end{array} \right. \Longrightarrow x \pm 2$$

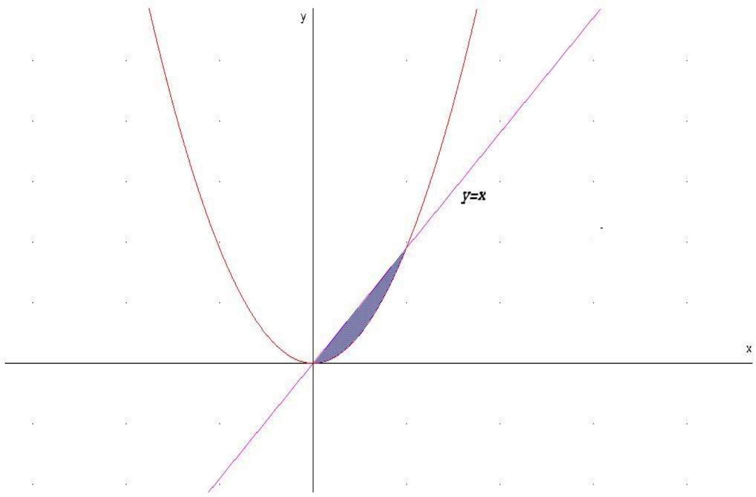
Como piden el punto del primer cuadrante la solución negativa no vale y el punto será $(2, 2)$.

b) La recta que une el origen de coordenadas y el punto $(2, 2)$ es $y = x$. Los puntos de corte son

$$x = \frac{x^2}{2} \Longrightarrow x^2 - 2x = 0 \Longrightarrow x = 0, \quad x = 2$$

$$S = \int_0^2 \left(\frac{x^2}{2} - x \right) dx = \left. \frac{x^3}{6} - \frac{x^2}{2} \right]_0^2 = \frac{4}{3} - 2 = -\frac{2}{3}$$

$$\acute{A}rea = \left| -\frac{2}{3} \right| = \frac{2}{3}\, u^2$$



Problema 6.1.3 *(3 puntos)*

a) (2 punto) Discutir según los valores del parámetro λ el sistema

$$\left\{ \begin{array}{rrrr} 2\lambda x+ & 2y+ & \lambda z = & 1 \\ x+ & \lambda y- & z = & 1 \\ 4x+ & 3y+ & z = & 2\lambda \end{array} \right.$$

b) (1 punto) Resolver el sistema anterior en los casos en que sea compatible.

Solución:

a)

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{rrr|r} 2\lambda & 2 & \lambda & 1 \\ 1 & \lambda & -1 & 1 \\ 4 & 3 & 1 & 2\lambda \end{array} \right), \quad |A| = -2\lambda^2+9\lambda-10 = 0 \Longrightarrow \lambda = 2, \quad \lambda = \frac{5}{2}$$

Si $\lambda \neq 2$ y $\lambda \neq \frac{5}{2} \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow$ Rango(A) =Rango$(\overline{A}) = 3 =$ nº de incógnitas y el sistema es compatible determinado, es decir, tiene solución única.

Si $\lambda = 2$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{rrr|r} 4 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \\ 4 & 3 & 1 & 4 \end{array} \right)$$

Como el menor $\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 6 \neq 0 \Longrightarrow$ Rango$(A) = 2$. Por otro lado

$$\begin{vmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 15 \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(\overline{A}) = 3$$

Luego en este caso Rango$(\overline{A}) \neq$Rango$(A) \Longrightarrow$ sistema incompatible.

Si $\lambda = \dfrac{5}{2}$

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{rrr|r} 5 & 2 & 5/2 & 1 \\ 1 & 5/2 & -1 & 1 \\ 4 & 3 & 1 & 5 \end{array} \right)$$

Como el menor $\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 23 \neq 0 \Longrightarrow$ Rango$(A) = 2$. Por otro lado

$$\begin{vmatrix} 5 & 5/2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 4 & 1 & 5 \end{vmatrix} = -\frac{55}{2} \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(\overline{A}) = 3$$

Luego en este caso Rango$(\overline{A}) \neq$Rango$(A) \Longrightarrow$ sistema incompatible.

b) El sistema sólo es compatible cuando $\lambda \neq 2$ y $\lambda \neq \frac{5}{2}$ y $|A| = -2\lambda^2 + 9\lambda - 10$. Aplicando la regla de Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & \lambda \\ 1 & \lambda & -1 \\ 2\lambda & 3 & 1 \end{vmatrix}}{-2\lambda^2 + 9\lambda - 10} = \frac{2a^3 - 1}{2a^2 - 9a + 10}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 2\lambda & 1 & \lambda \\ 1 & 1 & -1 \\ 4 & 2\lambda & 1 \end{vmatrix}}{-2\lambda^2 + 9\lambda - 10} = -\frac{6a^2 - 2a - 5}{2a^2 - 9a + 10}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 2\lambda & 2 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 \\ 4 & 3 & 2\lambda \end{vmatrix}}{-2\lambda^2 + 9\lambda - 10} = -\frac{4a^3 - 14a + 11}{2a^2 - 9a + 10}$$

Problema 6.1.4 *(3 puntos)* Dados los puntos $A(-1, 1, 1)$, $B(1, -3, -1)$ y $C(1, 0, 3)$, hallar las coordenadas de un punto D perteneciente a la recta:

$$r : x - 1 = \frac{y - 1}{-1} = z - 1$$

de manera que el tetraedro $ABCD$ tenga un volumen igual a 2.

Solución:

La ecuación paramétrica de la recta es

$$\begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 1 - \lambda \\ z = 1 + \lambda \end{cases}$$

$$D(1 + \lambda, 1 - \lambda, 1 + \lambda)$$

$$\overrightarrow{AB} = (2, -4, -2), \quad \overrightarrow{AC} = (2, -1, 2), \quad \overrightarrow{AD} = (2 + \lambda, -\lambda, \lambda)$$

$$V = \frac{1}{6}|[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AB}]| = \frac{1}{6}|\begin{vmatrix} 2 + \lambda & -\lambda & \lambda \\ 2 & -4 & -2 \\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix}| = 4|\lambda - 5| = 2$$

$$|\lambda - 5| = \frac{1}{2}$$

$$\lambda - 5 = \frac{1}{2} \Longrightarrow \lambda = \frac{11}{2} \Longrightarrow D\left(\frac{13}{2}, -\frac{9}{2}, \frac{13}{2}\right)$$

$$\lambda - 5 = \frac{9}{2} \Longrightarrow \lambda = \frac{9}{2} \Longrightarrow D\left(\frac{11}{2}, -\frac{7}{2}, \frac{11}{2}\right)$$

6.2. Modelo 2005 - Opción B

Problema 6.2.1 *(2 puntos)* Considerar el siguiente sistema de ecuaciones, en el que a es un parámetro real:

$$\left\{\begin{array}{rrrr} -ax+ & 4y+ & az = & -a \\ 4x+ & ay- & az = & a \\ -x- & y+ & z = & 1 \end{array}\right.$$

Se pide:

a) (1 punto) Discutir el sistema

b) (1 punto) Resolver el sistema para $a = 1$.

Solución:
a)

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{rrr|r} -a & 4 & a & -a \\ 4 & a & -a & a \\ -1 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right), \quad |A| = a^2 - 16 = 0 \Longrightarrow a = \pm 4$$

Si $a \neq \pm 4 \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow$ Rango(A) =Rango$(\overline{A}) = 3 =$ nº de incógnitas y el sistema es compatible determinado, es decir, tiene solución única.

Si $a = 4$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{rrr|r} -4 & 4 & 4 & -4 \\ 4 & 4 & -4 & 4 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Como el menor $\left|\begin{array}{rr} -4 & 4 \\ 4 & 4 \end{array}\right| = -32 \neq 0 \Longrightarrow$ Rango$(A) = 2$. Como el menor

$$\left|\begin{array}{rrr} -4 & 4 & -4 \\ 4 & -4 & 4 \\ -1 & 1 & 1 \end{array}\right| = -64 \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(\overrightarrow{A}) = 3$$

Como Rango$(A) \neq$Rango$(\overline{A}) \Longrightarrow$ sistema incompatible.

Si $a = -4$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{rrr|r} 4 & 4 & -4 & 4 \\ 4 & -4 & 4 & -4 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Como el menor $\left|\begin{array}{rr} 4 & 4 \\ 4 & -4 \end{array}\right| = -32 \neq 0 \Longrightarrow$ Rango$(A) = 2$. Como el menor

$$\left|\begin{array}{rrr} 4 & -4 & 4 \\ -4 & 4 & -4 \\ -1 & 1 & 1 \end{array}\right| = 64 \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(\overrightarrow{A}) = 3$$

Como Rango(A) $\neq$Rango$(\overline{A})$ $\Longrightarrow$ sistema incompatible.

b) Cuando $a = 1$:

$$\left\{\begin{array}{rrrr} -x+ & 4y+ & z = & -1 \\ 4x+ & y- & z = & 1 \\ -x- & y+ & z = & 1 \end{array}\right. \quad \overline{A} = \left(\begin{array}{rrr|r} -1 & 4 & 1 & -1 \\ 4 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right), \quad |A| = -15$$

Aplicando la regla de Cramer:

$$x = \frac{\left|\begin{array}{rrr} -1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{array}\right|}{-15} = \frac{2}{3}$$

$$y = \frac{\left|\begin{array}{rrr} -1 & -1 & 1 \\ 4 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{array}\right|}{-15} = -\frac{2}{5}$$

$$z = \frac{\left|\begin{array}{rrr} -1 & 4 & -1 \\ 4 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{array}\right|}{-15} = \frac{19}{5}$$

Problema 6.2.2 *(2 puntos)* Sea la matriz:

$$A = \left(\begin{array}{rrr} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & -2 \end{array}\right)$$

a) (1 punto) Comprobar que

$$A^3 - 2A^2 = 0$$

b) (1 punto) Hallar A^n.

Solución:

a)

$$A^1 = \left(\begin{array}{rrr} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & -2 \end{array}\right)$$

$$A^2 = \left(\begin{array}{rrr} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & -2 \end{array}\right)\left(\begin{array}{rrr} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & -2 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{rrr} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & -2 \end{array}\right) =$$

$$2^2\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1\\ 1 & 1 & -1\\ 1 & 1 & -1\end{pmatrix} = 2A$$

$$A^3 = 2^3\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1\\ 1 & 1 & -1\\ 1 & 1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1\\ 1 & 1 & -1\\ 1 & 1 & -1\end{pmatrix} =$$

$$2^3\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1\\ 1 & 1 & -1\\ 1 & 1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1\\ 1 & 1 & -1\\ 1 & 1 & -1\end{pmatrix} = 4A$$

$$A^3 - 2A^2 = 4A - 4A = 0$$

b) $A^n = 2^{n-1}A$

Problema 6.2.3 *(3 puntos)* Sea la función $f(x) = \ln(1 + x^2)$, donde ln significa *Logaritmo Neperiano.*

a) (1 punto) Determinar los intervalos de crecimiento y decrecimiento y los intervalos de concavidad y convexidad.

b) (1 punto) Dibujar la gráfica de f.

c) (1 punto). Calcular las ecuaciones de las rectas tangentes a la gráfica de f en sus puntos de inflexión.

Solución:

a)

$$f'(x) = \frac{2x}{1+x^2} = 0 \Longrightarrow x = 0$$

	$(-\infty, 0)$	$(0, \infty)$
$f'(x)$	$-$	$+$
$f(x)$	decreciente	creciente

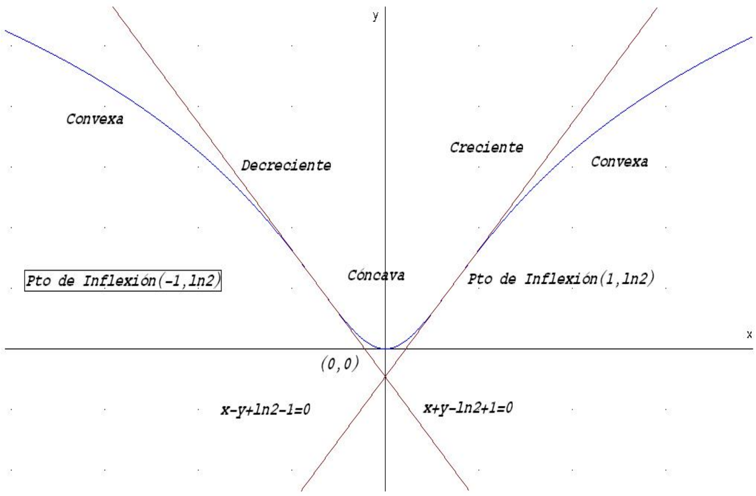
Luego en el punto $(0, 0)$ tenemos un Mínimo.

$$f''(x) = \frac{2(1-x^2)}{(1+x^2)} = 0 \Longrightarrow x = -1, \quad x = 1$$

	$(-\infty, -1)$	$(-1, 1)$	$(1, \infty)$
$f''(x)$	$-$	$+$	$-$
$f(x)$	convexa	cóncava	convexa

Luego en los puntos $(-1, \ln 2)$ y $(1, \ln 2)$ hay dos puntos de Inflexión.

b) Representación gráfica



c) La tangente en el punto $(-1, \ln 2)$ es:

$$m = f'(-1) = -1 \Longrightarrow y - \ln 2 = -x + 1 \Longrightarrow x + y - \ln 2 + 1 = 0$$

La tangente en el punto $(1, \ln 2)$ es:

$$m = f'(1) = 1 \Longrightarrow y - \ln 2 = x - 1 \Longrightarrow x - y + \ln 2 - 1 = 0$$

Problema 6.2.4 *(3 puntos)* Se considera la recta: $r : \dfrac{x}{2} = \dfrac{y-4}{3} = \dfrac{z-5}{2}$ y la familia de rectas dependientes del parámetro m:

$$s : \begin{cases} 3x - y = 8 - 12m \\ y - 3z = 7 - 3m \end{cases}$$

a) (2 puntos) Determinar el valor de m para el que las dos rectas r y s se cortan.

b) (1 punto) Para el caso de $m = 0$, hallar la distancia entre las dos rectas.

Solución:

a)

$$r : \begin{cases} \overrightarrow{u_r} = (2,3,2) \\ P_r(0,4,5) \end{cases} \quad s : \begin{cases} \overrightarrow{u_s} = (1,3,1) \\ P_s(5-5m, 7-3m, 0) \end{cases} \quad \overrightarrow{P_rP_s} = (5-5m, 3-3m, -5)$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 5-5m & 3-3m & -5 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 15(m-2) = 0 \Longrightarrow m = 2$$

Cuando $m = 2$ el Rango$(A) = 2$, y además el Rango$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} = 2 \Longrightarrow$ las dos rectas se cortan.

b) Si $m = 0$ las dos rectas se cortan, ya que $|A| \neq 0$ y tenemos que

$$s : \begin{cases} \overrightarrow{u_s} = (1, 3, 1) \\ P_s(5, 7, 0) \end{cases}$$

$$d(r, s) = \frac{|\overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_s}, \overrightarrow{P_rP_s}|}{|\overrightarrow{u_r} \times \overrightarrow{u_s}|} = \frac{|-30|}{\sqrt{18}} = 5\sqrt{2}$$

6.3. Junio 2005 - Opción A

Problema 6.3.1 *(2 puntos)* Sea $f(x)$ una función derivable en $(0, 1)$ y continua en $[0, 1]$, tal que $f(1) = 0$ y $\displaystyle\int_0^1 2xf'(x)dx = 1$. Utilizar la fórmula de integración por partes para hallar $\displaystyle\int_0^1 f(x)dx$.

Solución:

Hacemos $u = 2x$ y $dv = f'(x)dx \Longrightarrow du = 2dx$ y $v = f(x)$. Aplicando la fórmula de integración por partes

$$\int udv = uv - \int vdu$$

$$\int_0^1 xf'(x)dx = 2xf(x)]_0^1 - 2\int_0^1 f(x)dx = 1 \Longrightarrow$$

$$\int_0^1 f(x)dx = -\left.\frac{1 - 2xf(x)}{2}\right]_0^1 = -\frac{1 - 2f(1)}{2} = -\frac{1}{2}$$

Problema 6.3.2 *(2 puntos)* Calcular un polinomio de tercer grado $p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ sabiendo que verifica:

- tiene un máximo relativo en $x = 1$
- tiene un punto de inflexión en el punto de coordenadas $(0, 1)$.
- se verifica que
$$\int_0^1 p(x)dx = \frac{5}{4}$$

Solución:

- $$p'(x) = 3ax^2 + 2bx + c \Longrightarrow p'(1) = 3a + 2b + c = 0$$
- $$p''(x) = 6ax + 2b \Longrightarrow p''(0) = 2b = 0 \Longrightarrow b = 0$$
$$p(0) = d = 1$$

- $$\int_0^1 p(x)dx = \int_0^1 (ax^3+bx^2+cx+d)dx = \left.\frac{ax^4}{4}+\frac{bx^3}{3}+\frac{cx^2}{2}+dx\right]_0^1 = \frac{5}{4}$$

$$\Longrightarrow \frac{a}{4}+\frac{b}{3}+\frac{c}{2}+d=\frac{5}{4}$$

En conclusión, tenemos

$$\frac{a}{4}+\frac{c}{2}+1=\frac{5}{4} \Longrightarrow a+2c=1, \quad \text{y} \quad 3a+c=0 \Longrightarrow$$

$$a=-\frac{1}{5},\ \ c=\frac{3}{5} \Longrightarrow p(x)=-\frac{1}{5}x^3+\frac{3}{5}x+1$$

Problema 6.3.3 *(3 puntos)* Dado el sistema de ecuaciones

$$\left\{\begin{array}{rrrr} (m-1)x+ & y+ & z= & 3\\ mx+ & (m-1)y+ & 3z= & 2m-1\\ x+ & 2y+ & (m-2)z= & 4 \end{array}\right.$$

a) (1,5 punto) Discutirlo según los distintos valores de m.

b) (1,5 puntos) Resolverlo cuando sea compatible indeterminado.

Solución:

a) Sea la matriz

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{ccc|c} m-1 & 1 & 1 & 3\\ m & m-1 & 3 & 2m-1\\ 1 & 2 & m-2 & 4 \end{array}\right)\Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow |A|=(m-2)(m+1)(m-4)=0 \Longrightarrow m=2,\ m=-1,\ m=4$$

Si $m\neq -1$ y $m\neq 2$ y $m\neq 4 \Longrightarrow |A|\neq 0 \Longrightarrow$Rango$(A)=3=$Rango$(\overline{A})=n^{\text{o}}$ incógnitas luego en este caso el sistema sería compatible determinado.

Si $m=-1$ tenemos

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 1 & 3\\ -1 & -2 & 3 & -3\\ 1 & 2 & -3 & 4 \end{array}\right),\quad \left|\begin{array}{cc} -2 & 1\\ -1 & -2 \end{array}\right|=5\neq 0$$

Luego tenemos que Rango$(A)=2$. Ahora calculamos el rango de $\overline{A}$, para ello cogemos el determinate

$$\left|\begin{array}{ccc} 1 & 1 & 3\\ -2 & 3 & -3\\ 2 & -3 & 4 \end{array}\right|=5\neq 0$$

Luego en este caso Rango(A) $\neq$Rango($\overline{A}$) $\Longrightarrow$ el sistema es incompatible.

Si $m = 2$ tenemos

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 0 & 4 \end{array}\right), \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$$

Luego tenemos que Rango(A) $= 2$. Ahora calculamos el rango de $\overline{A}$, para ello cogemos el determinate

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 3 \\ 2 & 0 & 4 \end{vmatrix} = -4 \neq 0$$

Luego en este caso Rango(A) $\neq$Rango($\overline{A}$) $\Longrightarrow$ el sistema es incompatible.

Si $m = 4$ tenemos

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & 1 & 3 \\ 4 & 3 & 3 & 7 \\ 1 & 2 & 2 & 4 \end{array}\right), \quad \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = 5 \neq 0$$

Luego tenemos que Rango(A) $= 2$. Ahora calculamos el rango de $\overline{A}$, que está claro que es dos, ya que la última fila es la resta de las dos anteriores.

Luego en este caso Rango(A) =Rango($\overline{A}$) $= 2$ <nº incógnitas$\Longrightarrow$ el sistema es compatible indeterminado.

b) Resolvemos este último caso. Por el menor que hemos escogido podemos despreciar la tercera ecuación.

$$\left\{\begin{array}{rrr} 3x+ & y+ & z = 3 \\ 4x+ & 3y+ & 3z = 7 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{rrrr} 3x+ & y = & 3- & z \\ 4x+ & 3y = & 7- & 3z \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = \dfrac{2}{5} \\ \\ y = \dfrac{9}{5} - \lambda \\ \\ z = \lambda \end{array}\right.$$

Problema 6.3.4 *(3 puntos)* Dado el punto $P(1, 3, -1)$, se pide:

a) (1 punto) Escribir la ecuación que deben verificar los puntos $X(x, y, z)$ cuya distancia a P sea igual a 3.

b) (2 puntos) Calcular los puntos de la recta

$$\left\{\begin{array}{rrr} x = & & 3\lambda \\ y = & 1+ & \lambda \\ z = & 1- & 4\lambda \end{array}\right.$$

cuya distancia a P es igual 3.

Solución:

a) Se trata de la ecuación de una esfera

$$(x-1)^2+(y-3)^2+(z+1)^2 = 9 \Longrightarrow x^2+y^2+z^2-2x-6y+2z+2 = 0$$

b) Sustituimos un punto genérico de la recta en la esfera y obtenemos

$$(3\lambda)^2+(1+\lambda)^2+(1-4\lambda)^2-2(3\lambda)-6(1+\lambda)+2(1-4\lambda)+2 = 0 \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow 26\lambda(\lambda-1) = 0 \Longrightarrow \lambda = 1, \ \ \lambda = 0$$

Sustituyendo en la recta estos valores tendremos los puntos buscados:

Para $\lambda = 0 \Longrightarrow (0, 1, 1)$ y para $\lambda = 1 \Longrightarrow (3, 2, -3)$.

6.4. Junio 2005 - Opción B

Problema 6.4.1 *(2 puntos)*

a) (1 punto) Resolver el sistema de ecuaciones:

$$\left\{\begin{array}{rrr} x+ & 2y+ & 3z = 1 \\ 2x+ & y- & z = 2 \end{array}\right.$$

b) (1 punto) Hallar dos constantes α y β de manera que al añadir al sistema anterior una tercera ecuación: $5x + y + \alpha z = \beta$, el sistema resultante sea compatible indeterminado.

Solución:

a)

$$\left\{\begin{array}{rrr} x+ & 2y+ & 3z = 1 \\ 2x+ & y- & z = 2 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{rrrr} x+ & 2y & = 1- & 3z \\ 2x+ & y & = 2+ & z \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 1 + \dfrac{5}{3}t \\ \\ y = -\dfrac{7}{3}t \\ \\ z = t \end{array}\right.$$

b) Para que el sistema siga siendo compatible indeterminado esta última ecuación tiene que ser combinación lineal de las dos anteriores, es decir, si ponemos

$$\left(\begin{array}{ccr|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \\ 5 & 1 & \alpha & \beta \end{array}\right)$$

sería $a(1,2,3,1) + b(2,1,-1,2) = (5,1,\alpha,\beta) \Longrightarrow \begin{cases} a + 2b = 5 \\ 2a + b = 1 \end{cases} \Longrightarrow$ $a = -1,\ b = 3 \Longrightarrow \alpha = -6,\ \beta = 5$

Problema 6.4.2 *(2 puntos)* Hallar una matriz X tal que:

$$A^{-1}XA = B$$

siendo $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

Solución:

Primero resolvemos la ecuación matricial:

$$A^{-1}XA = B \Longrightarrow XA = AB \Longrightarrow X = ABA^{-1}$$

Ahora calculamos A^{-1}:

$$A^{-1} = \frac{(Adjt(A))^T}{|A|} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$$

Efectuamos el producto

$$X = ABA^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 9 & 11 \\ -6 & -7 \end{pmatrix}$$

Problema 6.4.3 *(3 puntos)* Calcular los siguientes límites

a) (1,5 puntos)

$$\lim_{x \longrightarrow \infty} \left(\sqrt{x^2 + x} - \sqrt{x^2 - x}\right)$$

b) (1,5 puntos)

$$\lim_{x \longrightarrow \infty} x \left[\arctan\left(e^x\right) - \frac{\pi}{2}\right]$$

Solución:

a)

$$\lim_{x\longrightarrow\infty}\left(\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x^2-x}\right)=[\infty-\infty]=$$

$$\lim_{x\longrightarrow\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x^2-x}\right)\left(\sqrt{x^2+x}+\sqrt{x^2-x}\right)}{\sqrt{x^2+x}+\sqrt{x^2-x}}=$$

$$\lim_{x\longrightarrow\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+x}\right)^2-\left(\sqrt{x^2-x}\right)^2}{\sqrt{x^2+x}+\sqrt{x^2-x}}=\lim_{x\longrightarrow\infty}\frac{2x}{\sqrt{x^2+x}+\sqrt{x^2-x}}=$$

$$\lim_{x\longrightarrow\infty}\frac{\frac{2x}{x}}{\sqrt{\frac{x^2+x}{x^2}}+\sqrt{\frac{x^2-x}{x^2}}}=\frac{2}{2}=1$$

b)

$$\lim_{x\longrightarrow\infty}x\left[\arctan\left(e^x\right)-\frac{\pi}{2}\right]=[0\cdot\infty]=\lim_{x\longrightarrow\infty}\frac{\arctan\left(e^x\right)-\frac{\pi}{2}}{1/x}=\left[\frac{0}{0}\right]=$$

$$\lim_{x\longrightarrow\infty}\frac{\frac{e^x}{1+e^{2x}}}{-\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\longrightarrow\infty}\frac{-x^2e^x}{1+e^{2x}}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\longrightarrow\infty}\frac{-2xe^x-x^2e^x}{2e^{2x}}=$$

$$\lim_{x\longrightarrow\infty}\frac{-2x-x^2}{2e^x}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\longrightarrow\infty}\frac{-2-2x}{2e^x}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\longrightarrow\infty}\frac{-2}{2e^x}=0$$

Problema 6.4.4 *(3 puntos)* Dadas las rectas:

$$r:\frac{x-1}{2}=\frac{y-1}{3}=\frac{z-1}{4}\quad s:\frac{x+1}{1}=\frac{y-2}{-1}=\frac{z}{2}$$

a) (1,5 puntos) Hallar la ecuación de la recta t que corta a las dos y es perpendicular a ambas.

b) (1,5 puntos) Calcular la mínima distancia entre r y s.

Solución:

a)

$$r:\left\{\begin{array}{l}\overrightarrow{u_r}=(2,3,4)\\ P_r(1,1,1)\end{array}\right.\qquad s:\left\{\begin{array}{l}\overrightarrow{u_s}=(1,-1,2)\\ P_s(-1,2,0)\end{array}\right.$$

$$\overrightarrow{u_t}=\overrightarrow{u_r}\times\overrightarrow{u_s}=\left|\begin{array}{rrr}i&j&k\\2&3&4\\1&-1&2\end{array}\right|=(10,0,-5)$$

Para la construcción de la recta podemos poner $\overrightarrow{u_t}=(2,0,-1)$, ya que el módulo de este vector no influye.

Construimos la recta como intersección de dos planos:

$$\pi_1 : \begin{cases} \overrightarrow{u_t} = (2, 0, -1) \\ \overrightarrow{u_r} = (2, 3, 4) \\ P_r(1, 1, 1) \end{cases} \qquad \pi_1 : \begin{cases} \overrightarrow{u_t} = (2, 0, -1) \\ \overrightarrow{u_s} = (1, -1, 2) \\ P_s(-1, 2, 0) \end{cases}$$

$$\pi_1 : \begin{vmatrix} 2 & 2 & x-1 \\ 3 & 0 & y-1 \\ 4 & -1 & z-1 \end{vmatrix} = 0 \Longrightarrow 3x - 10y + 6z + 1 = 0$$

$$\pi_2 : \begin{vmatrix} 1 & 2 & x+1 \\ -1 & 0 & y-2 \\ 2 & -1 & z \end{vmatrix} = 0 \Longrightarrow x + 5y + 2z - 9 = 0$$

$$t : \begin{cases} 3x- & 10y+ & 6z + 1 = 0 \\ x+ & 5y+ & 2z - 9 = 0 \end{cases}$$

b)

$$\left|\left[\overrightarrow{P_rP_s}, \overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_r}\right]\right| = |\begin{vmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix}| = |-15|$$

$$d = \frac{\left|\left[\overrightarrow{P_rP_s}, \overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_r}\right]\right|}{|\overrightarrow{u_r} \times \overrightarrow{u_s}|} = \frac{|-15|}{\sqrt{10^2 + 5^2}} = \frac{3\sqrt{5}}{5}$$

$$\overrightarrow{P_rP_s} = (-1, 2, 0) - (1, 1, 1) = (-2, 1, -1)$$

6.5. Septiembre 2005 - Opción A

Problema 6.5.1 *(2 puntos)* Discutir según los valores del parámetro real λ la posición relativa de los planos

$$\begin{aligned} &\pi_1 : x + z = \lambda \\ &\pi_2 : 4x + (\lambda - 2)y + (\lambda + 2)z = \lambda + 2 \\ &\pi_3 : 2(\lambda + 1)x - (\lambda + 6)z = -\lambda \end{aligned}$$

Solución:

$$\begin{cases} x+ & & z = & \lambda \\ 4x+ & (\lambda-2)y+ & (\lambda+2)z = & \lambda+2 \\ 2(\lambda+1)x- & & (\lambda+6)z = & -\lambda \end{cases}$$

La matriz asociada a este sistema será

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & \lambda \\ 4 & \lambda-2 & \lambda+2 & \lambda+2 \\ 2(\lambda+1) & 0 & -(\lambda+6) & -\lambda \end{array}\right)$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 4 & \lambda-2 & \lambda+2 \\ 2(\lambda+1) & 0 & -(\lambda+6) \end{vmatrix} = (2-\lambda)(3\lambda+8) = 0 \Longrightarrow \lambda = 2, \ \lambda = -\frac{8}{3}$$

Si $\lambda \neq 2$ y $\lambda \neq -\frac{8}{3} \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow$ el sistema es compatible determinado, el sistema tiene, por tanto, solución única y los tres planos se cortan en un punto.

Si $\lambda = 2$ tenemos

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 4 & 0 & 4 & 4 \\ 6 & 0 & -8 & -2 \end{array} \right) \Longrightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 4 & 4 & 4 \\ 6 & -8 & -2 \end{vmatrix} = -56$$

El sistema es incompatible, y si comparamos plano a plano tenemos

$$\begin{array}{l} \frac{1}{4} = \frac{1}{4} \neq \frac{2}{4} \Longrightarrow \pi_1 \text{ y } \pi_2 \text{ paralelos} \\ \frac{1}{6} \neq \frac{1}{-8} \Longrightarrow \pi_1 \text{ y } \pi_3 \text{ se cortan} \\ \frac{4}{6} \neq \frac{4}{-8} \Longrightarrow \pi_2 \text{ y } \pi_3 \text{ se cortan} \end{array}$$

Si $\lambda = -\frac{8}{3}$ el sistema es incompatible, ya que Rango$(\overline{A}) = 3$, ahora vamos a comparar plano a plano en el sistema de la matriz asociada

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & -8/3 \\ 4 & -14/3 & -2/3 & -2/3 \\ -10/3 & 0 & -10/3 & 8/3 \end{array} \right)$$

$$\begin{array}{l} \frac{1}{4} \neq \frac{0}{-14/3} \Longrightarrow \pi_1 \text{ y } \pi_2 \text{ se cortan} \\ \frac{1}{-10/3} = \frac{1}{-10/3} \neq \frac{-8/3}{8/3} \Longrightarrow \pi_1 \text{ y } \pi_3 \text{ son paralelos} \\ \frac{4}{-10/3} \neq \frac{-14/3}{0} \Longrightarrow \pi_2 \text{ y } \pi_3 \text{ se cortan} \end{array}$$

Problema 6.5.2 *(2 puntos)* Se consideran las rectas

$$r : \left\{ \begin{array}{rrrl} x- & y & & = 3 \\ x+ & y & -z & = 0 \end{array} \right. , \quad s : \left\{ \begin{array}{rrrl} x- & & z & = 4 \\ 2x- & y & & = 7 \end{array} \right.$$

a) (1 punto) Hallar la recta t, perpendicular a r y a s, que pasa por el origen.

b) (1 punto) Hallar las coordenadas del punto de intersección de la recta s con la recta t obtenida en el apartado anterior.

Solución:

$$r : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_r} = (1,1,2) \\ P_r(0,-3,-3) \end{array} \right. , \quad s : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_s} = (-1,-2,-1) \\ P_s(0,-7,-4) \end{array} \right.$$

$$\overrightarrow{u_r} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = (1,1,2), \quad \overrightarrow{u_s} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix} = (-1,-2,-1)$$

a)

$$\overrightarrow{u_t} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & -2 & -1 \end{vmatrix} = (3, -1, -1)$$

$$t : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_t} = (3, -1, -1) \\ P_t(0, 0, 0) \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 3\lambda \\ y = -\lambda \\ z = -\lambda \end{array} \right.$$

b) Sustituimos t en s y tenemos:

$$\left\{ \begin{array}{l} 3\lambda + \lambda = 4 \\ 6\lambda + \lambda = 7 \end{array} \right. \Longrightarrow \lambda = 1$$

El punto de corte será $(3, -1, -1)$.

Problema 6.5.3 *(3 puntos)* Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

a) (1 punto) Hallar dos constantes α y β tales que $A^2 = \alpha A + \beta I$.

b) (1 punto) Calcular A^5 utilizando la expresión obtenida en el apartado anterior.

c) (1 punto) Hallar todas las matrices X que satisfacen $(A-X)(A+X) = A^2 - X^2$.

Solución:

a)

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \alpha A + \beta I = \begin{pmatrix} \alpha + \beta & 2\alpha \\ 0 & \alpha + \beta \end{pmatrix}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha + \beta = 1 \\ 2\alpha = 4 \end{array} \right. \Longrightarrow \alpha = 2, \ \ \beta = -1$$

b)

$$A^5 = A^2A^2A = (2A-I)^2A = (4A^2+I^2-4AI)A = (4A^2-4A+I)A =$$

$$4(2A-I)A - 4A^2 + A = 8A^2 - 4IA - 4(2A-I) + A =$$

$$8(2A-I)-4A-8A+4I+A = 5A-4I = 5\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - 4\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 10 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

c)
$$(A-X)(A+X)=A^2-X^2 \Longrightarrow A^2+AX-XA+X^2=A^2-X^2$$
$$\Longrightarrow AX-XA=0 \Longrightarrow AX=XA$$
Serán todas aquellas matrices X que cumplan $AX=XA$.
$$\left(\begin{array}{cc} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{array}\right)\cdot\left(\begin{array}{cc} a & b \\ c & d \end{array}\right)=\left(\begin{array}{cc} a & b \\ c & d \end{array}\right)\cdot\left(\begin{array}{cc} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{array}\right) \Longrightarrow \left\{\begin{array}{c} a+2c=a \Longrightarrow c=0 \\ b+2d=2a+b \Longrightarrow a=d \\ c=c \\ d=d \end{array}\right.$$
Serán las matrices A de la forma
$$A=\left(\begin{array}{cc} a & b \\ 0 & a \end{array}\right)$$

Problema 6.5.4 *(3 puntos)* Dada la función $f(x)=\dfrac{1}{x}$ se pide:

a) (1 punto) Hallar la ecuación de la recta tangente a su gráfica en el punto $(a, f(a))$ para $a>0$

b) (1 punto) Hallar los puntos de corte de las recta tangente hallada en el apartado anterior con los ejes coordenados.

c) (1 punto) Hallar el valor de $a>0$ que hace que las distancias entre los dos puntos hallados en el apartado anterior sea mínima.

Solución:

a)
$$f(a)=\frac{1}{a}, \quad m=f'(a)=-\frac{1}{a^2}$$
La recta tangente es
$$y-\frac{1}{a}=-\frac{1}{a^2}(x-a)$$

b) Haciendo $y=0 \Longrightarrow A(2a,0)$ y haciendo $x=0 \Longrightarrow B\left(0,\frac{2}{a}\right)$.

c)
$$d(a)=\sqrt{(2a)^2+\left(\frac{2}{a}\right)^2}=\frac{2}{a}\sqrt{a^4+1}$$
$$d'(a)=\frac{2a^4-2}{a^2\sqrt{a^4+1}}=0 \Longrightarrow \ a=1, \ \ a=-1$$
Como $a>0 \Longrightarrow a=1$ En el intervalo $(-1,1)$ la d' es negativa y en el $(1,+\infty)$ es positiva, luego pasa de decrecer a crecer en $a=1$ y, por tanto, es un mínimo.

6.6. Septiembre 2005 - Opción B

Problema 6.6.1 *(2 puntos)* Dada la función $f(x) = \ln \dfrac{x^2}{x-1}$ donde ln significa *logaritmo neperiano*, definida para $x > 1$, hallar un punto $(a, f(a))$ tal que la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en ese punto sea paralela al eje OX.

Solución:

$$f'(x) = \frac{2}{x} - \frac{1}{x-1} = \frac{x-2}{x(x-1)} = 0 \Longrightarrow x = 2$$

$$f(2) = \ln\frac{4}{1} = \ln 4 = 2\ln 2 \Longrightarrow (4, 2\ln 2)$$

Problema 6.6.2 *(2 puntos)* Se considera la función

$$f(x) = \frac{e^x}{(1+e^x)^2}$$

a) (1 punto) Calcular los extremos locales y/o globales de la función $f(x)$.

b) (1 punto) Determinar el valor del parámetro a tal que:

$$\int_0^a f(x)dx = \frac{1}{4}$$

Solución:

a)

$$f'(x) = \frac{e^x(1-e^x)}{(1+e^x)^3} = 0 \Longrightarrow x = 0$$

En el intervalo $(-\infty, 0) \Longrightarrow f'(x) > 0 \Longrightarrow$ la función es creciente en este intervalo.

En el intervalo $(0, +\infty) \Longrightarrow f'(x) < 0 \Longrightarrow$ la función es decreciente en este intervalo.

Luego en el punto $(0, f(0)) = (0, 1/4)$ la función presenta un máximo.

b)

$$\int_0^a \frac{e^x}{(1+e^x)^2}dx = \frac{1}{4}$$

$$\int \frac{e^x}{(1+e^x)^2}dx = \int \frac{1}{t^2}dt = \frac{t^{-1}}{-1} = -\frac{1}{1+e^x} + C$$

$$\int_0^a \frac{e^x}{(1+e^x)^2}dx = -\frac{1}{1+e^x}\bigg]_0^a = -\frac{1}{1+e^a} + \frac{1}{2} = \frac{1}{4} \Longrightarrow$$

$$\frac{1}{1+e^a} = \frac{1}{4} \Longrightarrow 1 + e^a = 4 \Longrightarrow e^a = 3 \Longrightarrow a = \ln 3$$

Problema 6.6.3 *(3 puntos)* Se considera la familia de planos:

$$mx + (m-2)y + 3(m+1)z + (m+1) = 0$$

siendo m un parámetro real.

Se pide:

a) (1 punto) Determinar la recta común a todos los planos de la familia.

b) (1 punto) Determinar el plano de esta familia que pasa por el punto $P(1,1,0)$.

c) (1 punto) Determinar el plano de esta familia que es paralelo a la recta:

$$\left\{\begin{array}{rrrl} x- & & 2z+ & 1=0 \\ - & y+ & z+ & 1=0 \end{array}\right.$$

Solución:

a) Basta dar dos valores a m que sean distintos:

$$\left\{\begin{array}{rrrrr} m=0 \Longrightarrow & - & 2y & +3z+1= & 0 \\ m=-1 \Longrightarrow & -x- & 3y & = & 0 \end{array}\right.$$

La intersección de estos dos planos sería la recta pedida, que en forma paramétrica

$$\overrightarrow{u_r} = \left|\begin{array}{ccc} i & j & k \\ 0 & -2 & 3 \\ -1 & -3 & 0 \end{array}\right| = (9,-3,-2), \;\; P_r(-6,2,1) \Longrightarrow r: \left\{\begin{array}{l} x=-6+9\lambda \\ y=2-3\lambda \\ z=1-2\lambda \end{array}\right.$$

b) Sustituyendo este punto en la familia tenemos

$$m + (m-2) + m + 1 = 0 \Longrightarrow m = \frac{1}{3}$$

El plano buscado será

$$\frac{1}{3}x + \left(\frac{1}{3}-2\right)y + 3\left(\frac{1}{3}+1\right)z + \left(\frac{1}{3}+1\right) = 0 \Longrightarrow x-5y+12z+4=0$$

c)

$$r: \left\{\begin{array}{l} \overrightarrow{u_r} = \left|\begin{array}{ccc} i & j & k \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \end{array}\right| = (-2,-1,-1) \\ \\ P_r(1,2,1) \end{array}\right.$$

Los vectores $(m, m-2, 3m+3)$ y $(-2,-1,-1)$ tienen que ser perpendiculares, luego su producto escalar tiene que ser cero

$$-2m - m + 2 - 3m - 3 = 0 \Longrightarrow m = -\frac{1}{6}$$

Sustituyendo

$$-\frac{1}{6}x + \left(-\frac{1}{6} - 2\right)y + 3\left(-\frac{1}{6} + 1\right)z + \left(-\frac{1}{6} + 1\right) = 0 \Longrightarrow x + 13y - 15z - 5 = 0$$

Problema 6.6.4 *(3 puntos)* Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 0 & k & t \\ 0 & 0 & k \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & k & t \\ 0 & 1 & k \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

a) (1 punto) Hallar A^{10}.

b) (1 puntos) Hallar la matriz inversa de B.

c) (1 punto) En el caso particular de $k = 0$, hallar B^{10}.

Solución:

a)

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & k & t \\ 0 & 0 & k \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & k & t \\ 0 & 0 & k \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & k^2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & k^2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & k & t \\ 0 & 0 & k \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^{10} = A^3 \cdot A^7 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

b)

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -k & k^2 - t \\ 0 & 1 & -k \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

c)

$$B\begin{pmatrix} 1 & 0 & t \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad B^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2t \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad B^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3t \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & nt \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow B^{10} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 10t \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$