Problemas de Selectividad de Matemáticas II
Comunidad de Madrid
(Resueltos)

Isaac Musat Hervás

22 de mayo de 2013

Capítulo 7

Año 2006

7.1. Modelo 2006 - Opción A

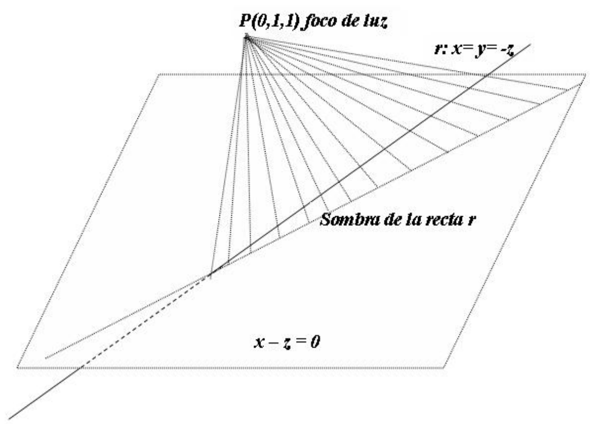
Problema 7.1.1 *(2 puntos)* Un punto de luz situado en $P(0,1,1)$ proyecta la sombra de la recta:

$$x = y = -z$$

sobre el plano $\pi : x - z = 0$.

Calcular las coordenadas del punto de esta proyección que pertenece al plano $z = 1$.

Solución:



$$r : \begin{cases} \overrightarrow{u_r} = (1,1,-1) \\ P_r(0,0,0) \end{cases}$$

El plano que contiene a P y a r será:

$$\pi_1 : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_r} = (1,1,-1) \\ \overrightarrow{P_rP} = (0,1,1) \\ P_r(0,0,0) \end{array} \right. \Longrightarrow \pi_1 : \left| \begin{array}{rrr} 1 & 0 & x \\ 1 & 1 & y \\ -1 & 1 & z \end{array} \right| = 0 \Longrightarrow \pi_1 : 2x - y + z = 0$$

La proyección de r será la intersección de los planos π_1 y π:

$$s : \left\{ \begin{array}{r} 2x - y + z = 0 \\ x - z = 0 \end{array} \right. \Longrightarrow s : \left\{ \begin{array}{l} x = \lambda \\ y = 3\lambda \\ z = \lambda \end{array} \right.$$

El corte con el plano $z = 1$ será $z = \lambda = 1 \Longrightarrow x = 1, \; y = 3 \Longrightarrow (1,3,1)$

Problema 7.1.2 *(2 puntos)* Se consideran las rectas:

$$r : \frac{x}{1} = \frac{y-6}{1} = \frac{z-5}{2} \qquad s : \left\{ \begin{array}{l} x = 3 + \lambda \\ y = -4 + 3\lambda \\ z = 0 \end{array} \right.$$

Hallar la ecuación de la recta que contiene al punto $P(2,-1,1)$ y cuyo vector director es perpendicular a lo vectores directores de las dos rectas anteriores.

Solución:

$$r : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_r} = (1,1,2) \\ P_r(0,6,5) \end{array} \right. \qquad s : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_s} = (1,3,0) \\ P_s(3,-4,0) \end{array} \right.$$

$$\overrightarrow{u_t} = \overrightarrow{u_r} \times \overrightarrow{u_s} = \left| \begin{array}{ccc} i & j & k \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 0 \end{array} \right| = (-6,2,2) = 2(-3,1,1)$$

$$t : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_t} = (-3,1,1) \\ P_t(2,-1,1) \end{array} \right. \Longrightarrow t : \left\{ \begin{array}{l} x = 2 - 3\lambda \\ y = -1 + \lambda \\ z = 1 + \lambda \end{array} \right.$$

Problema 7.1.3 *(3 puntos)* Dado el sistema de ecuaciones:

$$\left\{ \begin{array}{rrrr} 2x+ & 3y- & z = & k \\ x+ & 2y+ & 3z = & 2 \\ kx+ & ky- & 4z = & -1 \end{array} \right.$$

a) (2 punto) Discutirlo según los distintos valores de k.

b) (1 punto) Resolverlo cuando sea compatible indeterminado.

Solución:

a)

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -1 & k\\ 1 & 2 & 3 & 2\\ k & k & -4 & -1 \end{array}\right), \quad |A|=4k-4=0\Longrightarrow k=1$$

Si $k\neq 1\Longrightarrow |A|\neq 0\Longrightarrow$ Rango(A) =Rango$(\overline{A})=3=$ nº de incógnitas y el sistema es compatible determinado, es decir, tiene solución única.

Si $k=1$:

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -1 & 0\\ 1 & 2 & 3 & 2\\ 0 & 0 & -4 & -1 \end{array}\right)$$

Como el menor $\left|\begin{array}{cc} 2 & 3\\ 1 & 2 \end{array}\right|=1\neq 0\Longrightarrow$ Rango$(A)=2$. Por otro lado se observa que la cuarta fila es la diferencia entre la primera y la segunda, luego el Rango$(\overline{A})=2$, en conclusión: Rango(A) =Rango$(\overline{A})=2<$ nº de incógnitas y en este caso el sistema es compatible indeterminado, tiene infinitas soluciones.

b)

$$\left\{\begin{array}{rrrr} 2x+ & 3y- & z= & 1\\ x+ & 2y+ & 3z= & 2 \end{array}\right.\Longrightarrow\left\{\begin{array}{l} x=-4+11\lambda\\ y=3-7\lambda\\ z=\lambda \end{array}\right.$$

Problema 7.1.4 *(3 puntos)* Dada la función:

$$f(x)=\frac{-4x}{(1+x^2)^2}$$

a) (2 puntos) Hallar sus máximos y mínimos locales y/o globales.

b) (1 punto) Determinar el valor del parámetro $a>0$ para el cual es:

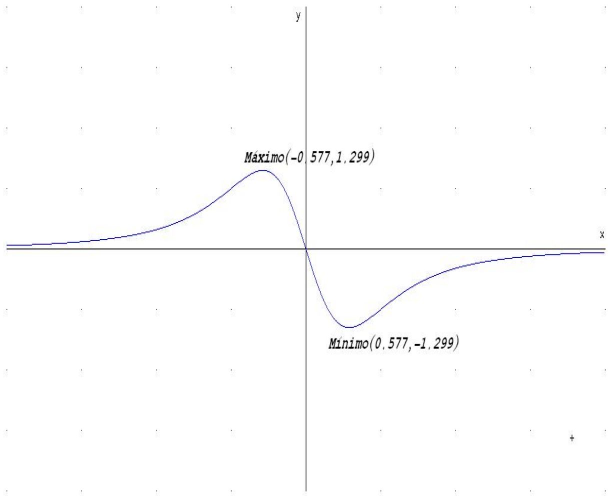
$$\int_0^a f(x)\,dx=-1$$

Solución:

a)

$$f'(x)=\frac{4(3x^2-1)}{(1+x^2)^3}=0\Longrightarrow x=\pm\sqrt{\frac{1}{3}}=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}$$

	$(-\infty,-\frac{\sqrt{3}}{3})$	$(-\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{3}}{3})$	$(\frac{\sqrt{3}}{3},\infty)$
$f'(x)$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	creciente	decreciente	creciente



Luego en el punto $\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{3},\dfrac{3\sqrt{3}}{4}\right)$ tenemos un Máximo y en el punto $\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3},-\dfrac{3\sqrt{3}}{4}\right)$ tenemos un Mínimo.

b)

$$\int_0^a \frac{-4x}{(1+x^2)^2}\,dx = -2\int_0^a 2x(1+x^2)^{-2}\,dx = -2\frac{(1+x^2)^{-1}}{-1}\bigg]_0^a =$$

$$\frac{2}{1+x^2}\bigg]_0^a = \frac{2}{1+a^2} - 2 = -1 \Longrightarrow a = \pm 1, \text{ como } a > 0 \Longrightarrow a = 1$$

7.2. Modelo 2006 - Opción B

Problema 7.2.1 *(2 puntos)*

a) (1 punto) Hallar el punto P en el que se cortan las gráficas de las funciones:

$$f(x) = \frac{2}{x} \quad g(x) = +\sqrt{x^2-3}$$

b) (1 punto) Hallar las ecuaciones de las rectas tangentes en el punto P a cada una de las curvas anteriores y demostrar que son perpendiculares.

Solución:

a)

$$f(x) = g(x) \Longrightarrow \frac{2}{x} = \sqrt{x^2-3} \Longrightarrow x = \pm 2$$

La solución negativa no vale, luego $x = 2$ es el único punto común.

b) Tangente a $f(x)$:

$$f'(x) = -\frac{2}{x^2} \Longrightarrow m = f'(2) = -\frac{1}{2}, \text{ y } f(2) = 1 \Longrightarrow y-1 = -\frac{1}{2}(x-2)$$

Tangente a $g(x)$:

$$g'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2-3}} \Longrightarrow m' = g'(2) = -2, \text{ y } g(2) = 1 \Longrightarrow y-1 = 2(x-2)$$

Como $m = -\dfrac{1}{m'} \Longrightarrow$ las dos rectas son perpendiculares.

Problema 7.2.2 *(2 puntos)* Se considera la función:

$$f(x) = \frac{1}{2 + \sin x - \cos x}$$

Se pide:

a) (1 punto) Calcular los extremos locales y/o globales en el intervalo $[-\pi, \pi]$

b) (1 punto) Comprobar la existencia de, al menos, un punto $c \in [-\pi, \pi]$ tal que $f''(c) = 0$. (Sugerencia: utilizar el teorema de Rolle). Demostrar que en c hay un punto de inflexión.

Solución:

a)

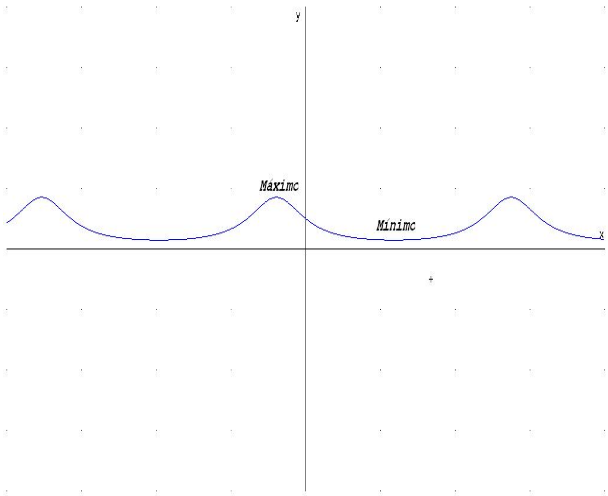
$$f'(x) = -\frac{\cos x + \sin x}{(2 + \sin x - \cos x)^2} = 0 \Longrightarrow \cos x + \sin x = 0 \Longrightarrow \sin x = -\cos x$$

$$\Longrightarrow \tan x = -1 \Longrightarrow x = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi, \ \ x = \frac{7\pi}{4} + 2k\pi$$

El denominador de $f'(x)$ es siempre positivo y no se anula nunca.

	$(0, \frac{3\pi}{4})$	$(\frac{3\pi}{4}, \frac{7\pi}{4})$	$(\frac{7\pi}{4}, 0)$
$f'(x)$	$-$	$+$	$-$
$f(x)$	decreciente	creciente	decreciente

Luego en el punto $x = \dfrac{3\pi}{4} + 2k\pi$ tenemos un Mínimo y en el punto $x = \dfrac{7\pi}{4} + 2k\pi$ tenemos un Máximo.



b) Como $f''(x)$ es una función continua y derivable en el intervalo $[-\pi, \pi]$ y además $f'(\pi) = f'(-\pi) = 1/9$ por el teorema de Rolle existe un punto $c \in [-\pi, \pi]$ en el que $f''(c) = 0$.

Como el punto c anula la segunda derivada y en él la función es continua tiene que tratarse de un punto de inflexión.

Problema 7.2.3 *(3 puntos)* Dadas las rectas:

$$r: \frac{x+1}{3} = \frac{y+2}{1} = \frac{z+3}{1} \quad s: \frac{x}{-1} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-2}{-2}$$

a) (1,5 puntos) Hallar la ecuación del plano que contiene a r y es paralelo a s.

b) (1,5 puntos) Calcular la distancia de s al plano anterior.

Solución:

a)

$$r: \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_r} = (3,1,1) \\ P_r(-1,-2,-3) \end{array} \right. \qquad s: \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_s} = (-1,1,-2) \\ P_s(0,-1,2) \end{array} \right.$$

$$\pi: \left| \begin{array}{rrr} 3 & -1 & x+1 \\ 1 & 1 & y+2 \\ 1 & 2 & z+3 \end{array} \right| = 0 \Longrightarrow 3x - 5y - 4z - 19 = 0$$

b)

$$d(P_s, \pi) = \frac{|3 \cdot 0 - 5 \cdot (-1) - 4 \cdot 2 - 19|}{\sqrt{9+25+16}} = \frac{11\sqrt{2}}{5}$$

Problema 7.2.4 *(3 puntos)* Se consideran las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ -1 & -2 & 2 \end{pmatrix} \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Se pide:

a) (1,5 punto) Hallar $(A - I)^2$.

b) (1,5 punto) Calcular A^4 haciendo uso del apartado anterior.

Solución:

a)

$$(A - I)^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & -2 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & -2 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

b) $(A - I)^2 = A^2 - 2A + I = 0 \Longrightarrow A^2 = 2A - I$

$$A^4 = (A^2)^2 = 4A^2 - 4A + I = 4(2A - I) - 4A + I = 4A - 3I$$

$$A^4 = 4\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ -1 & -2 & 2 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 8 & -4 \\ -4 & -7 & 4 \\ -4 & -8 & 5 \end{pmatrix}$$

7.3. Junio 2006 - Opción A

Problema 7.3.1 *(2 puntos)* Dado el sistema homogeneo

$$\left\{\begin{array}{rrr} x+ & ky & -z = 0 \\ kx- & y & +z = 0 \\ (k+1)x+ & y & = 0 \end{array}\right.$$

averiguar para qué valores de k tiene soluciones distintas de $x = y = z = 0$. Resolverlo en tales casos.

Solución:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & k & -1 \\ k & -1 & 1 \\ (k+1) & 1 & 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow |A| = k^2 - k - 2 = 0 \Longrightarrow k = -1, \; k = 2$$

Si $k \neq -1$ y $k \neq 2 \Longrightarrow |A| \neq 0$ el sistema es compatible determinado $x = y = z = 0$.

Si $k = 2 \Longrightarrow$ SCI

$$\left\{\begin{array}{c} x + 2y - z = 0 \\ 3x + y = 0 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = -\frac{1}{5}\lambda \\ y = \frac{3}{5}\lambda \\ z = \lambda \end{array}\right.$$

Si $k = -1 \Longrightarrow$ SCI

$$\left\{\begin{array}{c} x - y - z = 0 \\ y = 0 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = \lambda \\ y = 0 \\ z = \lambda \end{array}\right.$$

Problema 7.3.2 *(2 puntos)* Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ encontrar todas las matrices

$$P = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

tales que $AP = PA$.

Solución:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a + 2c & b + 2d \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 2a + b \\ c & 2c + d \end{pmatrix} \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} a + 2c = a \Longrightarrow c = 0 \\ b + 2d = 2a + b \Longrightarrow a = d \\ c = c \\ d = 2c + d \Longrightarrow c = 0 \end{array}\right.$$

$$P = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$$

Problema 7.3.3 *(3 puntos)* Se pide:

a) (1 punto) Dibujar la gráfica de la función $f(x) = \dfrac{2x}{x+1}$ indicando su dominio, intervalos de crecimiento y decrecimiento y asíntotas.

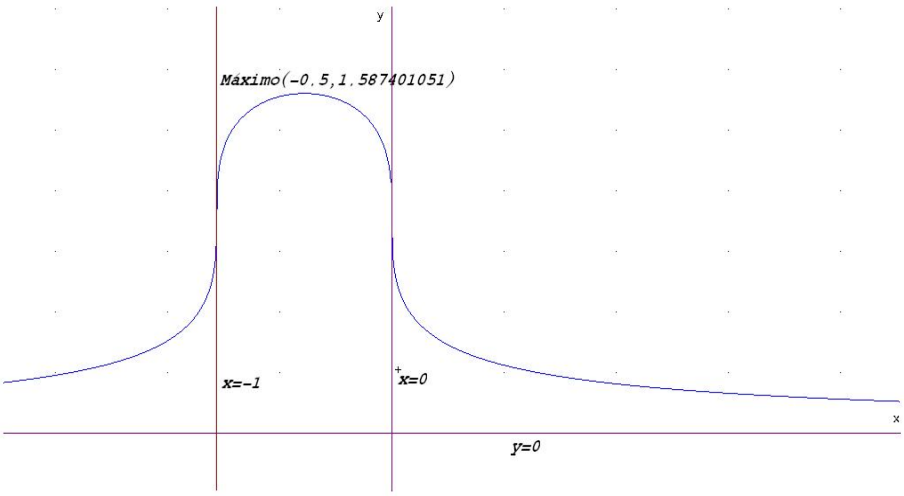
b) (1 punto) Demostrar que la función $a_n = \dfrac{2n}{n+1}$ es monótona creciente.

c) (1 punto) Calcular $\lim\limits_{n \longrightarrow \infty} n^2(a_{n+1} - a_n)$

Solución:

a)
- $Dom f = R - \{-1\}$.

- Asíntotas:
  a) Verticales: $x = -1$
  $$\lim_{x\longrightarrow -1^-} \frac{2x}{x+1} = \left[\frac{-2}{0^-}\right] = +\infty$$
  $$\lim_{x\longrightarrow -1^+} \frac{2x}{x+1} = \left[\frac{-2}{0^+}\right] = -\infty$$
  b) Horizontales: $y = 2$
  $$\lim_{x\longrightarrow\infty} \frac{2x}{x+1} = 2$$
  c) Oblicuas: No hay al haber horizontales.
- Monotonía:
  $$f'(x) = \frac{2}{(x+1)^2} > 0 \Longrightarrow \text{siempre creciente}$$
  Luego no hay ni máximos ni mínimos.
- Representación gráfica:



b) Si tenemos en cuenta que una sucesión es una función cuyo dominio es el conjunto de los números naturales excluido el cero, y si tenemos en cuenta que la función $a_n = f(n) = \dfrac{2n}{n+1}$ hemos demostrado en el apartado anterior que es creciente en $R - \{-1\}$, con mayor razón lo es en el conjunto $N - \{0\}$.

Otra manera de demostrarlo:
$$a_{n+1} - a_n = \frac{2n+2}{n+2} - \frac{2n}{n+1} = \frac{2}{(n+1)(n+2)} > 0$$
luego la sucesión es creciente.

c)

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} n^2(a_{n+1}-a_n)=\lim_{n\longrightarrow\infty}\frac{2n^2}{n^2+3n+2}=2$$

Problema 7.3.4 *(3 puntos)* Sean las rectas:

$$r:\frac{x+1}{-2}=\frac{y-2}{2}=\frac{z}{-4}\qquad\qquad \frac{x-2}{3}=\frac{y+1}{1}=\frac{z+2}{1}$$

a) (1,5 punto) Hallar la ecuación de la recta t que pasa por el origen y corta a las dos rectas anteriores.

b) (1,5 puntos) Hallar la recta perpendicular común a las rectas r y s.

Solución:

$$r:\left\{\begin{array}{l}\overrightarrow{u_r}=(-2,2,-4)\\ P_r(-1,2,0)\end{array}\right.\qquad s:\left\{\begin{array}{l}\overrightarrow{u_s}=(3,1,1)\\ P_s(2,-1,-2)\end{array}\right.$$

a) $\overrightarrow{OP_r}=(-1,2,0)$, $\overrightarrow{OP_s}=(2,-1,-2)$

$$\pi_1:\left\{\begin{array}{l}\overrightarrow{OP_r}\\ \overrightarrow{u_r}\\ P_r\end{array}\right.\qquad \pi_2:\left\{\begin{array}{l}\overrightarrow{OP_s}\\ \overrightarrow{u_s}\\ P_s\end{array}\right.\qquad t:\left\{\begin{array}{l}\pi_1\\ \pi_2\end{array}\right.$$

$$\pi_1:\left|\begin{array}{rrc}-1&-2&x+1\\2&2&y-2\\0&-4&z\end{array}\right|=0,\quad \pi_2:\left|\begin{array}{rrc}2&3&x-2\\-1&1&y+1\\-2&1&z+2\end{array}\right|=0$$

$$t:\left\{\begin{array}{l}4x+2y-z=0\\ x-8y+5z=0\end{array}\right.$$

b)

$$\overrightarrow{u_h}=\overrightarrow{u_r}\times\overrightarrow{u_s}=\left|\begin{array}{rrr}i&j&k\\-2&2&-4\\3&1&1\end{array}\right|=2(3,-5,-4)$$

$$\pi_1:\left\{\begin{array}{l}\overrightarrow{u_h}\\ \overrightarrow{u_r}\\ P_r\end{array}\right.\qquad \pi_2:\left\{\begin{array}{l}\overrightarrow{u_h}\\ \overrightarrow{u_s}\\ P_s\end{array}\right.\qquad t:\left\{\begin{array}{l}\pi_1\\ \pi_2\end{array}\right.$$

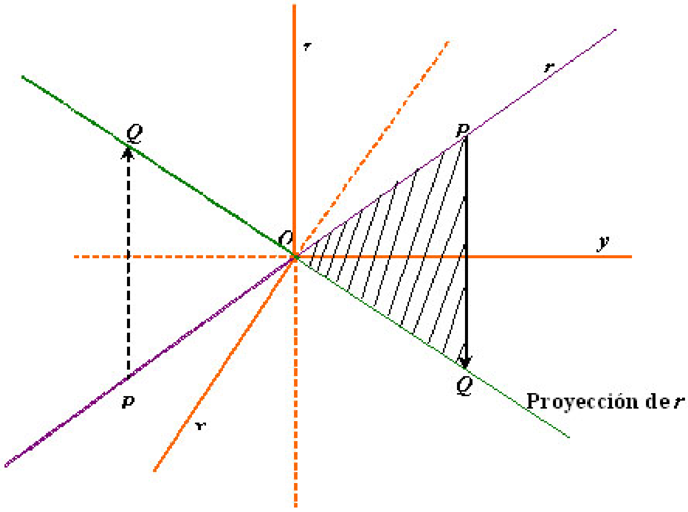
$$\pi_1:\left|\begin{array}{rrc}3&-2&x+1\\-5&2&y-2\\-4&-4&z\end{array}\right|=0,\quad \pi_2:\left|\begin{array}{rrc}3&3&x-2\\-5&1&y+1\\-4&1&z+2\end{array}\right|=0$$

$$h:\left\{\begin{array}{l}7x+5y-z-3=0\\ x+15y-18z-23=0\end{array}\right.$$

7.4. Junio 2006 - Opción B

Problema 7.4.1 *(2 puntos)* Sea r la recta que pasa por el origen de coordenadas O y tiene como vector director $\overrightarrow{v} = (4,3,1)$. Hallar un punto P contenido en dicha recta, tal que si se llama Q a su proyección sobre el plano $\pi : z = 0$, el triángulo OPQ tenga área 1.

Solución:



$$r : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_r} = (4,3,1) \\ P_r(0,0,0) \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 4\lambda \\ y = 3\lambda \\ z = \lambda \end{array} \right.$$

Un punto de esta recta será: $P(4\lambda, 3\lambda, \lambda)$, y su proyección sobre el plano $z = 0$ será el punto $P(4\lambda, 3\lambda, 0)$.

Los vectores $\overrightarrow{OP}$ y $\overrightarrow{OQ}$ forman el triángulo OPQ, para calcular el área calculamos el producto vectorial de estos dos vectores

$$\overrightarrow{OP} \times \overrightarrow{OQ} = \left| \begin{array}{ccc} i & j & k \\ 4\lambda & 3\lambda & \lambda \\ 4\lambda & 3\lambda & 0 \end{array} \right| = (-3\lambda^2, 4\lambda^2, 0)$$

$$S = \frac{1}{2}|\overrightarrow{OP} \times \overrightarrow{OQ}| = \frac{1}{2}\sqrt{9\lambda^4 + 16\lambda^4} = \frac{5\lambda^2}{2} = 1 \Longrightarrow \lambda = \pm\sqrt{\frac{2}{5}}$$

Si $\lambda = \sqrt{\frac{2}{5}} \Longrightarrow P\left(4\sqrt{\frac{2}{5}}, 3\sqrt{\frac{2}{5}}, \sqrt{\frac{2}{5}}\right)$

Si $\lambda = -\sqrt{\frac{2}{5}} \Longrightarrow P\left(-4\sqrt{\frac{2}{5}}, -3\sqrt{\frac{2}{5}}, -\sqrt{\frac{2}{5}}\right)$

Problema 7.4.2 *(2 puntos)* Determinar la posición relativa de las rectas:

$$r : \frac{x+4}{-3} = \frac{y-7}{4} = \frac{z}{1} \qquad s : \left\{ \begin{array}{l} x + 2y - 5z - 5 = 0 \\ 2x + y + 2z - 4 = 0 \end{array} \right.$$

Solución:

$$r : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_r} = (-3, 4, 1) \\ P_r(-4, 7, 0) \end{array} \right. \qquad s : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_s} = (3, -4, -1) \\ P_s(1, 2, 0) \end{array} \right. \qquad \overrightarrow{P_rP_s} = (5, -5, 0)$$

$$|A| = \left| \begin{array}{rrr} 5 & -5 & 0 \\ -3 & 4 & 1 \\ 3 & -4 & -1 \end{array} \right| = 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 2$$

$$\text{Rango} \left(\begin{array}{rrr} 5 & -5 & 0 \\ -3 & 4 & 1 \end{array} \right) = 2$$

Luego las rectas son paralelas.

Problema 7.4.3 *(3 puntos)* Dada la matriz:

$$M = \left(\begin{array}{rrr} 2 & 1 & -a \\ 2a & 1 & -1 \\ 2 & a & 1 \end{array} \right)$$

a) (1,5 punto) Determinar el rango de M según los valores del parámetro a.

b) (1,5 punto) Determinar para qué valores de a existe la matriz inversa de M. Calcular dicha matriz inversa para $a = 2$.

Solución:

a)

$$|M| = -2a(a^2 - 1) = 0 \Longrightarrow a = 0, \;\; a = 1, \;\; a = -1$$

Si $a \neq 0$, $a \neq 1$ y $a \neq -1$ entonces $|M| \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(M) = 3$.

Si $a = 0$

$$M = \left(\begin{array}{rrr} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{array} \right), \quad \left| \begin{array}{rr} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{array} \right| = 2 \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(M) = 2$$

Si $a = 1$

$$M = \left(\begin{array}{rrr} 2 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{array} \right), \quad \left| \begin{array}{rr} 2 & -1 \\ 2 & 1 \end{array} \right| = 4 \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(M) = 2$$

Si $a = -1$

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 4 \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(M) = 2$$

b) M es inversible para cualquier valor de a distinto de 0, 1 y -1.

Si $a = 2$

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 4 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow M^{-1} = \begin{pmatrix} -1/4 & 5/12 & -1/12 \\ 1/2 & -1/2 & 1/2 \\ -1/2 & 1/6 & 1/6 \end{pmatrix}$$

Problema 7.4.4 *(3 puntos)* Se pide:

a) (1,5 punto) Estudiar y representar gráficamente la función:

$$f(x) = \frac{1}{(x-2)^2}$$

b) (1,5 puntos) Hallar el área de la región acotada comprendida entre la gráfica de la función anterior y las rectas $y = 1$, $x = 5/2$.

Solución:

a) *a)*
- $Dom f = R - \{2\}$, Punto de corte en $(0, 1/2)$.
- Asíntotas:

  1) Verticales: $x = 2$

  $$\lim_{x\longrightarrow 2^-} \frac{1}{(x-2)^2} = \left[\frac{1}{0^+}\right] = +\infty$$

  $$\lim_{x\longrightarrow 2^+} \frac{1}{(x-2)^2} = \left[\frac{1}{0^+}\right] = +\infty$$

  2) Horizontales: $y = 2$

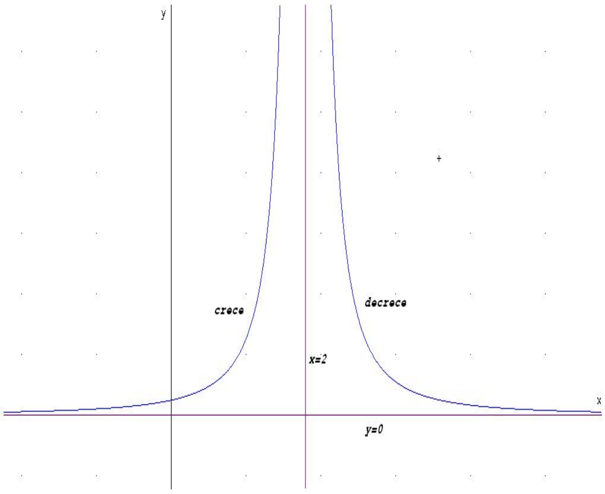
  $$\lim_{x\longrightarrow \infty} \frac{1}{(x-2)^2} = 0$$

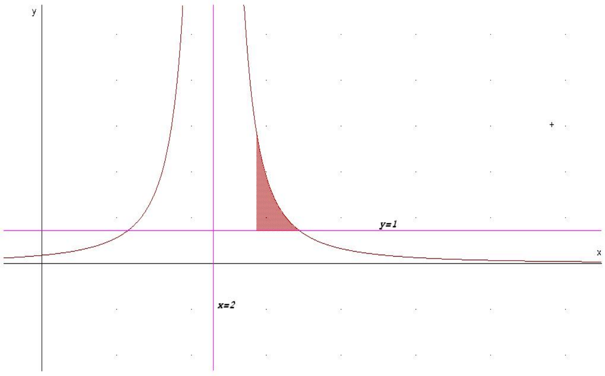
  3) Oblicuas: No hay al haber horizontales.
- Monotonía:

  $$f'(x) = \frac{2}{(x-2)^3} \neq 0$$

  Luego no hay ni máximos ni mínimos.

	$(-\infty, 2)$	$(2, \infty)$
$f'(x)$	$-$	$+$
$f(x)$	decrece	crece





b)

$$\frac{1}{(x-2)^2} = 1 \Longrightarrow x = 1, \;\; x = 3$$

Como la recta $x = 5/2$ corta a las gráficas entre estos dos puntos, los límites de integración serán desde $x = 1$ a $x = 5/2$

c)

$$\frac{1}{(x-2)^2} = 1 \Longrightarrow x = 1, \;\; x = 3$$

Como la recta $x = 5/2$ corta a las gráficas entre estos dos puntos, los límites de integración serán desde $x = 1$ a $x = 5/2$

$$S = \int_{5/2}^{3} \left(\frac{1}{(x-2)^2} - 1 \right) dx = -\frac{1}{x-2} - x \Big]_{5/2}^{3} = \frac{1}{2}$$

7.5. Septiembre 2006 - Opción A

Problema 7.5.1 *(2 puntos)* Calcular $\displaystyle\int_1^2 \frac{dx}{x^2+2x}$

Solución:

$$\frac{1}{x^2+2x} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+2} = \frac{A(x+2)+Bx}{x^2+2x}$$

$$\begin{array}{ll} & 1 = A(x+2)+Bx \\ \text{si } x=0 & 1 = 2A \Longrightarrow A = 1/2 \\ \text{si } x=-2 & 1 = -2B \Longrightarrow B = -1/2 \end{array}$$

$$\int \frac{dx}{x^2+2x} = \frac{1}{2}\int \frac{1}{x}\,dx - \frac{1}{2}\int \frac{1}{x+2} = \ln\sqrt{\frac{x}{x+2}}$$

$$\int_1^2 \frac{dx}{x^2+2x} = \ln\sqrt{\frac{3}{2}}$$

Problema 7.5.2 *(2 puntos)*

a) (1 punto) Calcular los valores de a y b para que la función

$$f(x) = \left\{ \begin{array}{ccc} 3x+2 & \text{si} & x<0 \\ x^2+2a\cos x & \text{si} & 0 \le x < \pi \\ ax^2+b & \text{si} & x \ge \pi \end{array} \right.$$

sea continua en todo valor de x.

b) (1 punto) Estudiar la derivabilidad de $f(x)$ para todos los valores a y b obtenidos en el apartado anterior.

Solución:

a) Continua en $x=0$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\longrightarrow 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\longrightarrow 0}(3x+2) = 2 \\ \\ \lim\limits_{x\longrightarrow 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\longrightarrow 0}(x^2+2a\cos x) = 2a \end{array}\right\} \Longrightarrow a = 1$$

Continua en $x=\pi$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\longrightarrow \pi^-} f(x) = \lim\limits_{x\longrightarrow \pi}(x^2+2a\cos x) = \pi^2-2a = \pi^2-2 \\ \\ \lim\limits_{x\longrightarrow \pi^+} f(x) = \lim\limits_{x\longrightarrow \pi}(ax^2+b) = a\pi^2+b = \pi^2+b \end{array}\right\} \Longrightarrow b = -2$$

$$f(x) = \left\{ \begin{array}{ccc} 3x+2 & \text{si} & x<0 \\ x^2+2\cos x & \text{si} & 0 \le x < \pi \\ x^2-2 & \text{si} & x \ge \pi \end{array} \right.$$

b)

$$f'(x) = \begin{cases} 3 & \text{si} \quad x < 0 \\ 2x - 2\sin x & \text{si} \quad 0 \le x < \pi \\ 2x & \text{si} \quad x \ge \pi \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} f'(0^-) = 3 \\ \\ f'(0^+) = 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow \text{No es derivable en } x = 0$$

$$\left.\begin{array}{l} f'(\pi^-) = 2\pi \\ \\ f'(\pi^+) = 2\pi \end{array}\right\} \Longrightarrow \text{Es derivable en } x = \pi$$

Problema 7.5.3 *(3 puntos)* Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -8 & -3 \end{pmatrix}$, $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

a) (1 punto) Comprobar que $|A^2| = |A|^2$, y que $|A + I| = |A| + |I|$

b) (0,5 puntos) Sea M una matriz cuadrada de orden 2. ¿Se puede asegurar que se cumple $|M^2| = |M|^2$?. Razonar la respuesta.

c) (1,5 puntos) Encontrar todas las matrices cuadradas M, de orden 2, tales que:

$$|M + I| = |M| + |I|$$

Solución:

a)

$$|A^2| = \left| \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -8 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -8 & -3 \end{pmatrix} \right| = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

$$|A|^2 = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -8 & -3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -8 & -3 \end{vmatrix} = (-1)(-1) = 1$$

Luego $|A^2| = |A|^2$.

$$|A + I| = \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ -8 & -2 \end{vmatrix} = 0$$

$$|A| + |I| = -1 + 1 = 0 \Longrightarrow |A + I| = |A| + |I|$$

b) Si podemos asegurar que $|M^2| = |M|^2$:

$$|M^2| = |M \cdot M| = |M| \cdot |M| = |M|^2$$

c)

$$M = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - cb, \quad |I| = 1$$

$$|M + I| = \begin{pmatrix} a+1 & b \\ c & d+1 \end{pmatrix} = (a+1)(d+1) - cd$$

$$(a+1)(d+1) - cd = ad - cb \Longrightarrow a = -d$$

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix}$$

Problema 7.5.4 *(3 puntos)* Se consideran los puntos $A(0,1,0)$ y $B(1,0,1)$. Se pide:

a) (1 punto) Escribir la ecuación que deben verificar los puntos $X(x,y,z)$ que equidistan de A y B.

b) (0,5 puntos) Determinar la ecuación que verifican los puntos $X(x,y,z)$ cuya distancia a A es igual a la distancia de A a B.

c) (1,5 puntos) Escribir las ecuaciones paramétricas de la recta formada por los puntos $C(x,y,z)$ del plano $x+y+z=3$ tales que el triángulo ABC es rectángulo con el ángulo recto en el vértice A.

Solución:

a) $d(A,X) = d(B,X)$

$$\sqrt{x^2 + (y-1)^2 + z^2} = \sqrt{(x-1)^2 + y^2 + (z-1)^2}$$

$$2x - 2y + 2z - 1 = 0$$

Se trata de un plano que se llama mediador.

b) $d(A,B) = d(A,X)$

$$\sqrt{x^2 + (y-1)^2 + z^2} = \sqrt{3}$$

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2y - 2 = 0$$

Se trata de una esfera

c) $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$ como C es un punto del plano $x+y+z=3$ tendrá de coordenadas $C(3-\mu-\lambda, \mu, \lambda)$. Luego:

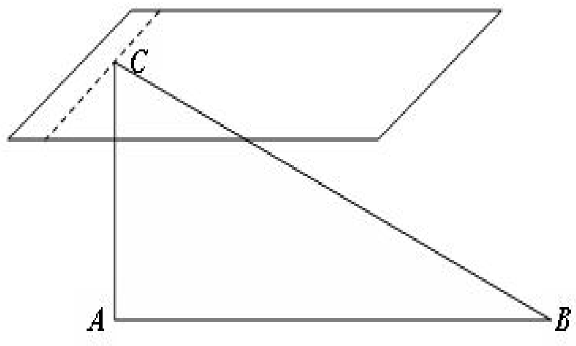
$$\overrightarrow{AC} = (3-\mu-\lambda, \mu, \lambda) - (0,1,0) = (3-\mu-\lambda, \mu-1, \lambda)$$

$$(3-\mu-\lambda, \mu-1, \lambda) \cdot (1,-1,1) = 3-\mu-\lambda-\mu+1+\lambda = 0 \Longrightarrow \mu = 2$$

Luego los puntos de ese plano con la condición de perpendicularidad con el vector $\overrightarrow{AB}$ serán:

$$\left\{\begin{array}{l} x = 1-\lambda \\ y = 2 \\ z = \lambda \end{array}\right.$$

Se trata de una recta.



7.6. Septiembre 2006 - Opción B

Problema 7.6.1 *(2 puntos)*

a) (1 punto) Resolver el sistema de ecuaciones:

$$\left\{\begin{array}{rrr} x+ & y- & 3z = 0 \\ 2x+ & 3y- & z = 5 \end{array}\right.$$

b) (1 punto) Hallar la solución del sistema anterior tal que la suma de los valores correspondientes a cada una de las tres incógnitas sea igual a 4.

Solución:

a)

$$\left\{\begin{array}{rrr} x+ & y- & 3z = 0 \\ 2x+ & 3y- & z = 5 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = -5+8\lambda \\ y = 5-5\lambda \\ z = \lambda \end{array}\right.$$

b) $-5 + 8\lambda + 5 - 5\lambda + \lambda = 4 \Longrightarrow \lambda = 1.$

$$x = 3, \quad y = 0, \quad z = 1$$

Problema 7.6.2 *(2 puntos)*

a) (1 punto) Hallar todas las matrices $A = \begin{pmatrix} a & a \\ 0 & b \end{pmatrix}$ distintas de $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ tales que $A^2 = A$

b) (1 punto) Para cualquiera de las matrices A obtenidas en el apartado 1.), calcular
$$M = A + A^2 + A^3 + \cdots + A^{10}$$

Solución:

a)

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} a & a \\ 0 & b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & a \\ 0 & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 & a^2 + ab \\ 0 & b^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & a \\ 0 & b \end{pmatrix}$$

$$\left\{\begin{array}{l} a^2 = a \\ a^2 + ab = a \\ b^2 = b \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} a(a-1) = 0 \Longrightarrow a = 0, \ \ a = 1 \\ a(a+b-1) = 0 \\ b(b-1) = 0 \Longrightarrow b = 0, \ \ b = 1 \end{array}\right. \Longrightarrow$$

$$\left\{\begin{array}{l} a = 0, \ \ b = 1 \\ a = 1, \ \ b = 0 \end{array}\right. \Longrightarrow A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

b) $A^2 = A$; $A^3 = A^2A = AA = A$; $A^4 = A^3A = AA = A \cdots A^{10} = A$ Luego:

$$M = A + A^2 + A^3 + \cdots + A^{10} = 10A = \begin{pmatrix} 10 & 10 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Problema 7.6.3 *(3 puntos)* Dada la función $f(x) = xe^{2x}$, se pide:

a) (1,5 puntos) Dibujar su gráfica indicando su dominio, asíntotas, intervalos de crecimiento y decrecimiento, máximos y mínimos relativos, intervalos de concavidad y convexidad y puntos de inflexión.

b) (1,5 puntos) Calcular el área comprendida entre el eje OX y la gráfica de $f(x)$ entre $-1 \le x \le 1$.

Solución:

a) $Dom(f) = R$

Asíntotas:

- Verticales: No hay
- Horizontales:

$$\lim_{x \longrightarrow \infty} xe^{2x} = \infty$$

$$\lim_{x \longrightarrow -\infty} xe^{2x} = \lim_{t \longrightarrow \infty} (-te^{-2t}) = \left[\frac{-\infty}{\infty}\right] = \lim_{t \longrightarrow \infty} \frac{-1}{-2e^{2t}} = 0$$

  Luego cuando la $x \longrightarrow -\infty$ hay una asíntota $y = 0$

- Oblicuas: No hay por haber horizontales.

Monotonía:

$$f'(x) = e^{2x} + 2xe^{2x} = e^{2x}(1 + 2x) = 0 \Longrightarrow x = -\frac{1}{2}$$

	$(-\infty, -1/2)$	$(-1/2, \infty)$
$f'(x)$	$-$	$+$
$f(x)$	decrece	crece

La función es creciente en el intervalo: $(-1/2, \infty)$

La función es decreciente en el intervalo: $(-\infty, -1/2)$

Como en el punto $(-1/2, -1/(2e))$ la función pasa de decrecer a crecer estamos ante un mínimo.

Curvatura:

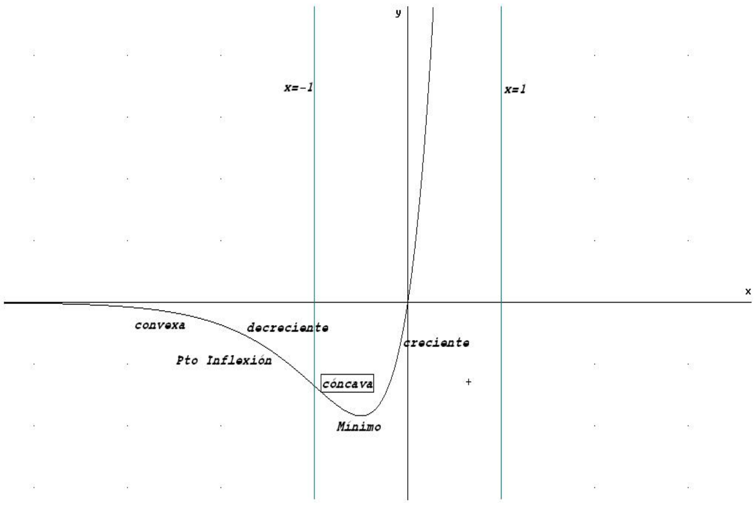
$$f''(x) = 4e^{2x}(x + 1) = 0 \Longrightarrow x = -1$$

	$(-\infty, -1)$	$(-1, \infty)$
$f''(x)$	$-$	$+$
$f(x)$	convexa	cóncava

Como en el punto $(-1, -1/(e^2))$ la función pasa de convexa a cóncava estamos ante un punto de inflexión.

b)

$$\acute{A}rea = \left|\int_{-1}^{0} xe^{2x}\, dx\right| + \left|\int_{0}^{1} xe^{2x}\, dx\right|$$



La integral $\int xe^{2x}\,dx$ se resuelve por partes, llamamos:

$u = x \Longrightarrow du = dx$ y $dv = e^{2x}dx \Longrightarrow v = \dfrac{1}{2}e^{2x}$.

$$\int xe^{2x}\,dx = \frac{xe^{2x}}{2} - \frac{1}{2}\int e^{2x}\,dx = e^{2x}\left(\frac{2x-1}{4}\right) = F(x)$$

$$\acute{A}rea = |F(0)-F(-1)|+|F(1)-F(0)| = \left|\frac{3e^{-2}-1}{4}\right|+\left|\frac{e^2+1}{4}\right| = 2{,}245762562$$

Problema 7.6.4 *(3 puntos)* Un plano π corta a los ejes de coordenadas en los puntos $A(1,0,0)$, $B(0,\lambda,0)$ y $C(0,0,4)$. Se pide:

a) (1,5 puntos) Hallar el valor de $\lambda > 0$ de manera que el volumen del tetraedro $OABC$ (donde O es el origen), sea 2.

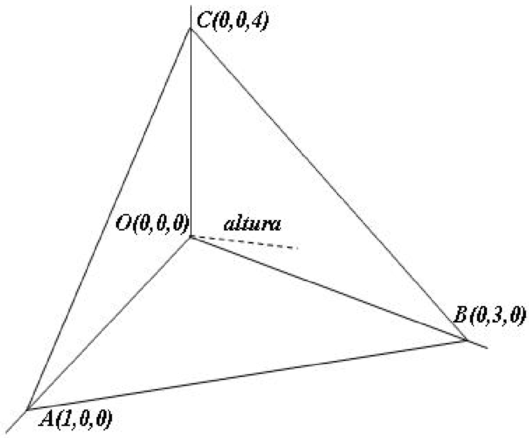
b) (1,5 puntos) Para el valor de λ obtenido en el apartado 1.), calcular la longitud de la altura del tetraedro $OABC$ correspondiente al vértice O.

Solución:

a)

$$\left\{\begin{array}{l} \overrightarrow{OA} = (1,0,0)\\ \overrightarrow{OB} = (0,\lambda,0)\\ \overrightarrow{OC} = (0,0,4)\end{array}\right. \Longrightarrow V = \frac{1}{6}|\left|\begin{array}{ccc} 0 & 0 & 4\\ 0 & \lambda & 0\\ 1 & 0 & 0\end{array}\right|| = \frac{1}{6}|-4\lambda| = 2 \Longrightarrow$$

$$\frac{4\lambda}{6} = 2 \Longrightarrow \lambda = 3$$



b)

$$\left\{\begin{array}{l}\overrightarrow{AC}=(-1,0,4)\\ \overrightarrow{AB}=(-1,3,0)\\ A(1,0,0)\end{array}\right. \Longrightarrow \pi:\left|\begin{array}{ccc}-1 & -1 & x-1\\ 0 & 3 & y\\ 4 & 0 & z\end{array}\right|=0 \Longrightarrow$$

$$\pi: 12x+4y+3z-12=0$$

$$d(O,\pi)=\frac{|0+0+0-12|}{\sqrt{12^2+4^2+3^2}}=\frac{12}{13}\ u$$

Otra forma de resolver el problema sería:

$$S_{\text{base}}=\frac{1}{2}|\left|\begin{array}{ccc}i & j & k\\ -1 & 0 & 4\\ -1 & 3 & 0\end{array}\right||=\frac{|(-12,-4,-3)|}{2}=\frac{13}{2}$$

$$V=\frac{1}{3}S_{\text{base}}\cdot h \Longrightarrow 2=\frac{1}{3}\cdot\frac{13}{2}\cdot h \Longrightarrow h=\frac{12}{13}\ u$$