Problemas de Selectividad de Matemáticas II
Comunidad de Madrid
(Resueltos)

Isaac Musat Hervás

22 de mayo de 2013

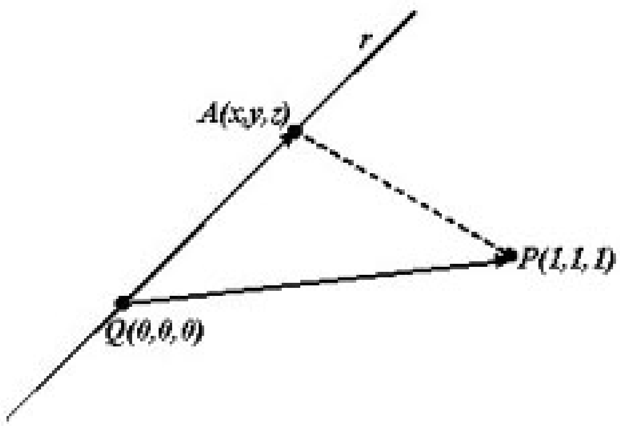
Capítulo 8

Año 2007

8.1. Modelo 2007 - Opción A

Problema 8.1.1 *(2 puntos)* Se considera la recta $\left\{\begin{array}{c} x-y=0 \\ x+2y+3z=0 \end{array}\right.$ y el punto $P(1,1,1)$. Dado el punto $Q(0,0,0)$ de r, hallar todos los puntos A contenidos en r tales que el triángulo de vértices A, P y Q tenga área 1.

Solución:



Un punto $A(x,y,z)$ de la recta sería

$$\left\{\begin{array}{l} x=\lambda \\ y=\lambda \\ z=-\lambda \end{array}\right. \Longrightarrow A(\lambda,\lambda,-\lambda)$$

$$\overrightarrow{QA}=(\lambda,\lambda,-\lambda), \quad \overrightarrow{QP}=(1,1,1)$$

$$S=\frac{1}{2}|\begin{vmatrix} i & j & k\\ \lambda & \lambda & -\lambda\\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}|=\frac{1}{2}|(2\lambda,-2\lambda,0)|=\sqrt{2\lambda^2}=1$$

Luego: $\lambda=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}\Longrightarrow A\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ y $A\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

Problema 8.1.2 *(2 puntos)*

a) (1,5 puntos) Calcula la ecuación general de un plano π_1 que contiene a la recta

$$r:\left\{\begin{array}{l} x=1+\lambda\\ y=-1+2\lambda\\ z=\lambda \end{array}\right.$$

y es perpendicular al plano $\pi_2: 2x+y-z=2$.

b) (0,5 puntos) Determinar la ecuaciones paramétricas de la recta intersección de los planos π_1 y π_2.

Solución:

a)

$$r:\left\{\begin{array}{l} \overrightarrow{u_r}=(1,2,1)\\ P_r(1,-1,0) \end{array}\right. \qquad \overrightarrow{u_{\pi_2}}=(2,1,-1)$$

$$\pi_1:\left\{\begin{array}{l} \overrightarrow{u_r}=(1,2,1)\\ \overrightarrow{u_{\pi_2}}=(2,1,-1)\\ P_r(1,-1,0) \end{array}\right. \Longrightarrow \begin{vmatrix} 1 & 2 & x-1\\ 2 & 1 & y+1\\ 1 & -1 & z \end{vmatrix}=0\Longrightarrow x-y+z-2=0$$

b)

$$\left\{\begin{array}{l} x-y+z-2=0\\ 2x+y-z-2=0 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=\frac{4}{3}\\ y=-\frac{2}{3}+\lambda\\ z=\lambda \end{array}\right.$$

Problema 8.1.3 *(3 puntos)* Dado el sistema de ecuaciones:

$$\left\{\begin{array}{rrrr} x+ & ky+ & k^2z= & 1\\ x+ & ky- & kz= & k^2\\ -x+ & ky- & k^2z= & k^2 \end{array}\right.$$

a) (2 punto) Discutirlo según los distintos valores de k.

b) (1 punto) Resolverlo para $k=-1$.

Solución:

a)

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & k & k^2 & 1\\ 1 & k & -k & k^2\\ -1 & k & -k^2 & k^2 \end{array}\right), \quad |A|=2k^2(k+1)=0 \Longrightarrow k=0, \quad k=-1$$

Si $k\neq 0$ y $k\neq -1 \Longrightarrow |A|\neq 0 \Longrightarrow$ Rango(A) =Rango$(\overline{A})=3=$ nº de incógnitas y el sistema es compatible determinado, es decir, tiene solución única.

Si $k=0$:

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 0 & 0\\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

El Rango$(A)=1$, dado que las tres filas son iguales. Sin embargo el menor $\left|\begin{array}{cc} 1 & 1\\ 1 & 0 \end{array}\right|=-1\neq 0 \Longrightarrow$ Rango$(\overline{A})=2$. Por tanto, Rango$(A)\neq$Rango$(\overline{A}) \Longrightarrow$ Sistema Incompatible (No tiene Solución).

Si $k=-1$:

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 1 & 1\\ -1 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

La matriz tiene dos primeras filas iguales, luego Rango(A) =Rango$(\overline{A})<$ nº incógnitas$\Longrightarrow$ Sistema Compatible Indeterminado (Infinitas Soluciones).

b)

$$\left\{\begin{array}{rrrr} x- & y+ & z= & 1\\ -x- & y- & z= & 1 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=-\lambda\\ y=-1\\ z=\lambda \end{array}\right.$$

Problema 8.1.4 *(3 puntos)*

a) (1 puntos) Si f es una función continua, obtener $F'(x)$ siendo

$$F(x)=\int_0^x (f(t)+t^2+t^3)\,dt$$

b) (2 punto) Si $f(1)=1$ y además $\int_0^1 f(t)dt=1$, hallar la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $F(x)$ en el punto $(1,F(1))$.

Solución:

a) Por el teorema fundamental del cálculo sabemos que si f es una función continua si
$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt \Longrightarrow F'(x) = f(x)$$
Luego $F'(x) = f(x) + x^2 + x^3$

b)
$$m = F'(1) = f(1) + 2 = 3$$
$$F(1) = \int_0^1 (f(t)+t^2+t^3)\,dt = \int_0^1 f(t)\,dt + \int_0^1 t^2\,dt + \int_0^1 t^3\,dt = 1 + \left.\frac{t^3}{3} + \frac{t^4}{4}\right]_0^1 =$$
$$= 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{19}{4}$$
$$y - \frac{19}{4} = 3(x-1)$$

8.2. Modelo 2007 - Opción B

Problema 8.2.1 *(2 puntos)* Dada la función $f(x) = 6x^2 - x^3$, se pide:

a) (1 punto) Hallar un valor $a > 0$ tal que la recta tangente a la gráfica de f en el punto $(a, f(a))$ sea paralela a la recta $y = -15x$.

b) (1 punto) Hallar el área de la región acotada limitada por la gráfica de f y la parte positiva del eje OX.

Solución:

a) La pendiente de la recta tangente es $m = f'(a) = -15$

$$f'(x) = 12x - 3x^2 \Longrightarrow m = f'(a) = 12a - 3a^2 = -15 \Longrightarrow a = 5, \quad a = -1$$

Como $a > 0 \Longrightarrow$ la solución buscada es $a = 5$ y, por tanto, como $f(5) = 25 \Longrightarrow (5, 25)$ es el punto buscado.

b) Los puntos de corte con el eje OX son
$$6x^2 - x^3 = 0 \Longrightarrow x = 0, \quad x = 6$$
$$S = \int_0^6 (6x^2 - x^3)\,dx = \left. 2x^3 - \frac{x^4}{4}\right]_0^6 = 108\,u^2$$

Problema 8.2.2 *(2 puntos)* Obtener el valor de k sabiendo que
$$\lim_{x\longrightarrow\infty} \left(\frac{x+3}{x}\right)^{kx+5} = e^2$$

Solución:

$$\lim_{x\longrightarrow\infty}\left(\frac{x+3}{x}\right)^{kx+5}=[1^{\infty}]=e^{\lambda}$$

$$\lambda=\lim_{x\longrightarrow\infty}(kx+5)\left(\frac{x+3}{x}-1\right)=3k$$

Luego $3k=2\Longrightarrow k=\dfrac{2}{3}$.

Problema 8.2.3 *(3 puntos)* Se consideran el punto $P(1,0,1)$ y la recta:

$$r:\frac{x-1}{1}=\frac{y}{2}=\frac{z+1}{-1}$$

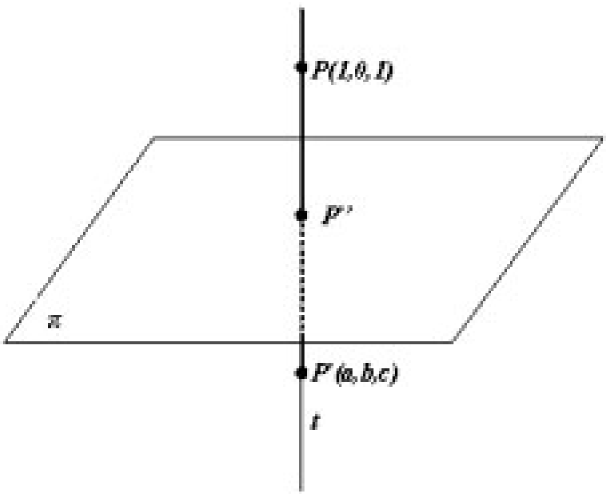
y el plano $\pi: x+y+z=0$. Se pide:

a) (1,5 puntos) Obtener un punto P', simétrico de P respecto del plano π.

b) (1,5 puntos) Determinar la ecuación de la recta s que contiene al punto P, corta a la recta r y es paralela al plano π.

Solución:

a) Sería el siguiente dibujo Calculamos primero el punto P'' corte de la



recta t y el plano π, donde t es una recta perpedicular a π y que pasa por P.

$$t:\begin{cases}\overrightarrow{u_t}=(1,1,1)\\ P_t(1,0,1)\end{cases}\qquad t:\begin{cases}x=1+\lambda\\ y=\lambda\\ z=1+\lambda\end{cases}$$

Sustituyendo este punto en el plano obtenemos el corte

$$1+\lambda+\lambda+1+\lambda=0 \Longrightarrow \lambda=-\frac{2}{3} \Longrightarrow P''\left(\frac{1}{3},-\frac{2}{3},\frac{1}{3}\right)$$

P'' es el punto medio entre P y P'

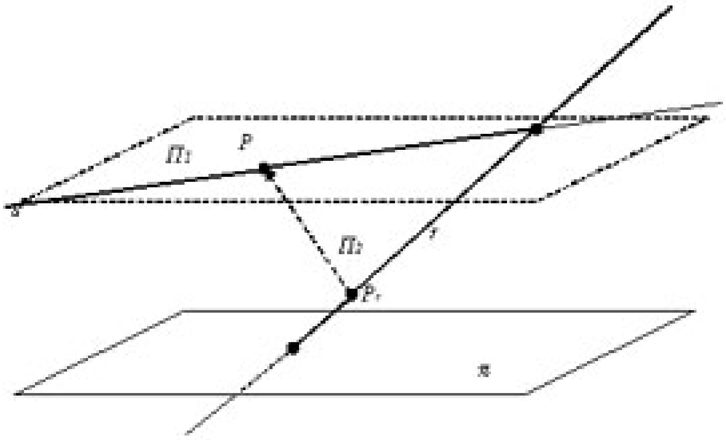
$$\left(\frac{1}{3},-\frac{2}{3},\frac{1}{3}\right)=\left(\frac{1+a}{2},\frac{b}{2},\frac{1+c}{2}\right) \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} a=-\frac{1}{3} \\ b=-\frac{4}{3} \\ c=-\frac{1}{3} \end{array}\right. \Longrightarrow P'\left(-\frac{1}{3},-\frac{4}{3},-\frac{1}{3}\right)$$

b) Encontramos la recta como intersección de dos planos:

El plano π_1 es paralelo a π y contiene a P

El plano π_2 contiene a P y a r

Sería el siguiente dibujo



$\pi_1 : x+y+z+\lambda=0$ y como contiene a $P \Longrightarrow 1+0+1+\lambda=0 \Longrightarrow \lambda=-2 \Longrightarrow \pi_1 : x+y+z-2=0$

$$\pi_2 : \left\{\begin{array}{l} \overrightarrow{u_r}=(1,2,-1) \\ \overrightarrow{PP_r}=(0,0,-2) \\ P(1,0,1) \end{array}\right. \Longrightarrow \left|\begin{array}{ccc} 1 & 0 & x-1 \\ 2 & 0 & y \\ -1 & -2 & z-1 \end{array}\right|=0 \Longrightarrow 2x-y-2=0$$

$$t : \left\{\begin{array}{c} x+y+z-2=0 \\ 2x-y-2=0 \end{array}\right. \Longrightarrow t : \left\{\begin{array}{l} x=\frac{4}{3}-\frac{1}{3}\lambda \\ y=\frac{2}{3}-\frac{2}{3}\lambda \\ z=\lambda \end{array}\right.$$

Problema 8.2.4 *(3 puntos)* Dada la matriz

$$M = \begin{pmatrix} 2 & -1 & \lambda \\ 2 & -\lambda & 1 \\ 2\lambda & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

a) (1,5 punto) Determinar el rango de M según los valores del parámetro λ.

b) (1,5 punto) Determinar para qué valores de λ existe la matriz inversa de M. Calcular dicha inversa para $\lambda = 0$.

Solución:

a)

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & \lambda \\ 2 & -\lambda & 1 \\ 2\lambda & -1 & 1 \end{vmatrix} = 2(\lambda^3 - 3\lambda + 2) = 0 \Longrightarrow \lambda = 1 \quad \lambda = -2$$

Si $\lambda \neq 1$ y $\lambda \neq -2 \Longrightarrow |M| \neq 0 \Longrightarrow$Rango$(M) = 3$.

Si $\lambda = 1$:

$$M = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Las tres filas son iguales y, por tanto, el Rango$(M) = 1$.

Si $\lambda = -2$:

$$M = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 2 & 2 & 1 \\ -4 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Como el menor $\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 6 \neq 0 \Longrightarrow$ Rango$(M) = 2$.

b) Si $\lambda = 0$:

$$M = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow M^{-1} = \begin{pmatrix} 1/4 & 1/4 & -1/4 \\ -1/2 & 1/2 & -1/2 \\ -1/2 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

8.3. Junio 2007 - Opción A

Problema 8.3.1 *(2 puntos)* Estudiar el rango de la matriz $\begin{pmatrix} m & m-1 & m(m-1) \\ m & 1 & m \\ m & 1 & m-1 \end{pmatrix}$ según los valores del parámetro m.

Solución:

$$|A| = m(m-2) = 0 \Longrightarrow m = 0, \quad m = 2$$

Si $m \neq 0$ y $m \neq 2 \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 3$.

Si $m = 0$:

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \Longrightarrow |A| = 0 \text{ y } \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Luego en este caso el Rango$(A) = 2$.

Si $m = 2$:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow |A| = 0 \text{ y } \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \text{ (dos filas iguales)}$$

Luego en este caso el Rango$(A) = 2$.

Problema 8.3.2 *(2 puntos)* Sean las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 8 & -9 \\ 6 & -7 \end{pmatrix}$$

Hallar una matriz X tal que $XAX^{-1} = B$

Solución:

$$XAX^{-1} = B \Longrightarrow XA = BX$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & -9 \\ 6 & -7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \Longrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 2a & -b \\ 2c & -d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8a-9c & 9b-9d \\ 6a-9c & b-d \end{pmatrix} \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{c} 6a-9c=0 \\ b-d=0 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{c} b=d \\ c=2/3a \end{array} \right.$$

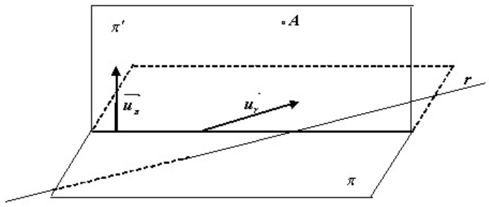
$$X = \begin{pmatrix} a & b \\ 2/3a & b \end{pmatrix}, \quad \text{p.e } X = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Problema 8.3.3 *(3 puntos)* Dados el punto $A(1,-2,-3)$, la recta $r:\left\{\begin{array}{l} x+y+1=0\\ z=0\end{array}\right.$ y el plano $\pi: x-2y-3z+1=0$, se pide:

a) (1,5 puntos) Ecuación del plano que pasa por A, es paralelo a r y perpendicular a π.

b) (1,5 puntos) Ecuación de la recta que pasa por A, corta a r y es paralela a π.

Solución:

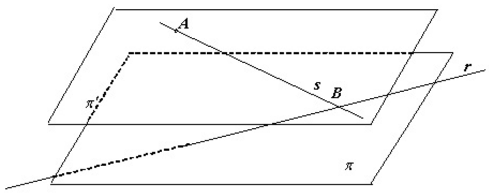


a)

$$r:\left\{\begin{array}{l} x+y+1=0\\ z=0\end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=-1-\lambda\\ y=\lambda\\ z=0\end{array}\right. \Longrightarrow r:\left\{\begin{array}{l} \overrightarrow{u_r}=(-1,1,0)\\ P_r(-1,0,0)\end{array}\right.$$

$$\pi: x-2y-3z+1=0 \Longrightarrow \overrightarrow{u_\pi}=(1,-2,-3)$$

$$\pi':\left|\begin{array}{ccc} -1 & 1 & x-1\\ 1 & -2 & y+2\\ 0 & -3 & z+3\end{array}\right|=0 \Longrightarrow \pi': 3x+3y-z=0$$



b) Construyo un plano π' paralelo a π que contenga a A:

$$x-2y-3z+\lambda=0 \Longrightarrow 1+4+9+\lambda=0 \Longrightarrow \lambda=-14$$

$$\pi': x-2y-3z-14=0$$

Corto con este plano a la recta r y obtengo el punto B:

$$-1-\lambda-2\lambda-14=0 \Longrightarrow \lambda=-5 \Longrightarrow B\,(4,-5,0)$$

La recta que buscamos pasa por A y B:

$$\overrightarrow{AB}=(3,-3,3)=3(1,-1,1)$$

$$s:\left\{\begin{array}{l}\overrightarrow{u_s}=(1,-1,1)\\ P_s(1,-2,-3)\end{array}\right. \Longrightarrow s:\left\{\begin{array}{l}x=1+\lambda\\ y=-2-\lambda\\ z=-3+\lambda\end{array}\right.$$

Problema 8.3.4 *(3 puntos)* Se considera la función $f(x)=x^2+m$, donde $m>0$ es una constante.

a) (1,5 puntos) Para cada valor de m hallar el valor de $a>0$ tal que la recta tangente a la gráfica de f en el punto $(a,f(a))$ pase por el origen de coordenadas.

b) (1,5 puntos) Hallar el valor de m para que la recta $y=x$ sea tangente a la gráfica de $f(x)$.

Solución:

a) $(a,f(a))=(a,a^2+m)$, $f'(x)=2x \Longrightarrow f'(a)=2a$. Luego la recta tangente sería: $y-a^2-m=2a(x-a)$. Si imponemos que pase por el punto $(0,0) \Longrightarrow -a^2-m=-2a^2 \Longrightarrow a=\sqrt{m}$ (la solución negativa no vale).

b) La recta $y=x$ tiene de pendiente $1 \Longrightarrow f'(a)=2a=1 \Longrightarrow a=\dfrac{1}{2}$, luego el punto de tangencia es el $\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right)$, es decir, $f\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{1}{2}$:

$$f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{4}+m=\frac{1}{2}\Longrightarrow m=\frac{1}{4}$$

8.4. Junio 2007 - Opción B

Problema 8.4.1 *(2 puntos)* Dada la función $f(x)=\dfrac{x^2-12}{x^2+4}$ calcular el área de la región acotada encerrada por su gráfica y el eje OX.

Solución:

$$\frac{x^2-12}{x^2+4}=0 \Longrightarrow x^2-12=0 \Longrightarrow x=\pm 2\sqrt{3}$$

$$S=\left|\int_{-2\sqrt{3}}^{2\sqrt{3}}\frac{x^2-12}{x^2+4}\,dx\right|$$

$$F(x)=\int \frac{x^2-12}{x^2+4}\,dx=\int\left(1-16\frac{1}{x^2+4}\right)dx=x-16\int\frac{1}{x^2+4}\,dx=$$

$$x-16\int\frac{1}{4}\left(\frac{1}{\left(\frac{x}{2}\right)^2+1}\right)dx=x-4\int\frac{2}{t^2+1}\,dt=x-8\arctan t=x-8\arctan\frac{x}{2}$$

$$S=|F(2\sqrt{3})-F(-2\sqrt{3})|=\left|\frac{4(3\sqrt{3}-4\pi)}{3}\right|=|-9,8269|=9,8269\ u^2$$

Problema 8.4.2 *(2 puntos)* Dibujar la gráfica de la función

$$f(x)=\frac{|x|}{2-x}$$

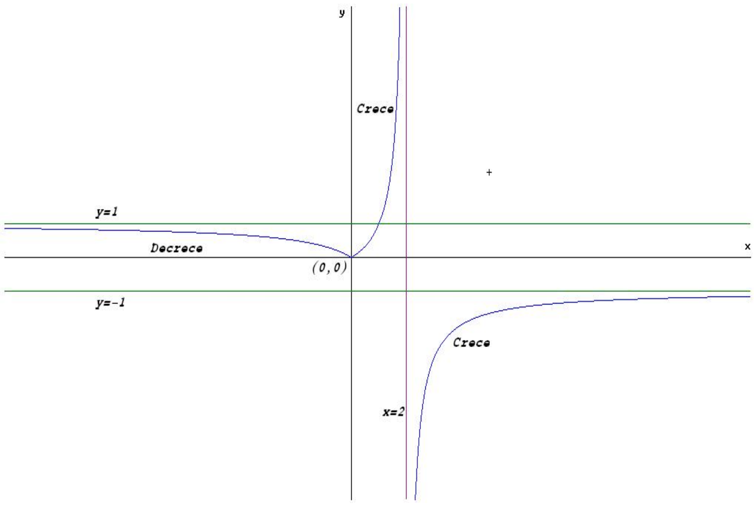
indicando su dominio, intervalos de crecimiento y decrecimiento y asíntotas.

Solución:

$$f(x)=\frac{|x|}{2-x}=\begin{cases}-\dfrac{x}{2-x} & \text{si} \quad x<0\\[2ex] \dfrac{x}{2-x} & \text{si} \quad x\ge 0\end{cases} \qquad f'(x)=\begin{cases}-\dfrac{2}{(2-x)^2} & \text{si} \quad x<0\\[2ex] \dfrac{2}{(2-x)^2} & \text{si} \quad x\ge 0\end{cases}$$

Dominio: $\text{Dom}(f)=R-\{2\}$

Monotonía: La función es decreciente en el intervalo $(-\infty,0)$ y es creciente



en el intevalo $(0,2)\cup(2,\infty)$. Asíntotas:

- Verticales:
  Si $x<0$ no hay

Si $x \geq 0 \Longrightarrow x = 2$:

$$\lim_{x \longrightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \longrightarrow 2^-} \frac{x}{2-x} = \left[\frac{2}{0^+}\right] = +\infty$$

$$\lim_{x \longrightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \longrightarrow 2^+} \frac{x}{2-x} = \left[\frac{2}{0^-}\right] = -\infty$$

- Horizontales:
  Si $x < 0 \Longrightarrow y = 1$

$$\lim_{x \longrightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \longrightarrow -\infty} \frac{-x}{2-x} = 1$$

  Si $x \geq 0 \Longrightarrow y = -1$:

$$\lim_{x \longrightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{x}{2-x} = -1$$

- Oblicuas: No hay al haber horizontales

Problema 8.4.3 *(3 puntos)* Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ c & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Se pide:

a) (1,5 puntos) Encontrar las condiciones que deben cumplir a, b y c para que se verifique $AB = BA$.

b) (1,5 puntos) Para $a = b = c = 1$, calcular B^{10}.

Solución:

a)
$$\begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ c & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ c & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 5a+2c & 5b+2c & 0 \\ 2a+5c & 2b+5c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5a+2b & 2a+5b & 0 \\ 7c & 7c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} a-c=0 \\ b-c=0 \end{array} \right.$$

Las condición que debería de cumplir sería $a = b = c$

b)

$$B^1 = \begin{pmatrix} 2^0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad B^2 = \begin{pmatrix} 2^1 & 2^1 & 0 \\ 2^1 & 2^1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B^3 = \begin{pmatrix} 2^2 & 2^2 & 0 \\ 2^2 & 2^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad B^4 = \begin{pmatrix} 2^3 & 2^3 & 0 \\ 2^3 & 2^3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Luego:

$$A^{10} = \begin{pmatrix} 2^9 & 2^9 & 0 \\ 2^9 & 2^9 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad A^n = \begin{pmatrix} 2^{n-1} & 2^{n-1} & 0 \\ 2^{n-1} & 2^{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Problema 8.4.4 *(3 puntos)* Sean los puntos

$$A(\lambda, 2, \lambda), \quad B(2, -\lambda, 0), \quad C(\lambda, 0, \lambda + 2)$$

a) (1 punto) ¿Existe algún valor de λ para el que los puntos A, B y C están alineados?

b) (1 punto) Comprobar que si A, B y C no están alineados el triángulo que forman es isósceles.

c) (1 punto) Calcular la ecuación del plano que contiene al triángulo ABC para el valor $\lambda = 0$ y hallar la distancia de este plano al origen coordenadas.

Solución:

a)

$$\begin{vmatrix} \lambda & 2 & \lambda \\ 2 & -\lambda & 0 \\ \lambda & 0 & \lambda + 2 \end{vmatrix} = -2(\lambda^2+2\lambda+4) \neq 0 \text{ Siempre} \Longrightarrow \text{No están alineados}$$

b)

$$\left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{AB} = (2 - \lambda, -\lambda - 2, -\lambda) \\ \overrightarrow{AC} = (0, -2, 2) \\ \overrightarrow{BC} = (\lambda - 2, \lambda, \lambda + 2) \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{3\lambda^2 + 8} \\ |\overrightarrow{AC}| = 2\sqrt{2} \\ |\overrightarrow{BC}| = \sqrt{3\lambda^2 + 8} \end{array} \right.$$

El triángulo que forman los puntos tiene dos lados iguales y otro desigual, se trata, por tanto, de un triángulo isósceles.

c)

$$\pi : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{AB} = (2, -2, 0) \\ \overrightarrow{AC} = (0, -2, 2) \\ A(0, 2, 0) \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u} = (1, -1, 0) \\ \overrightarrow{v} = (0, -1, 1) \\ P(0, 2, 0) \end{array} \right.$$

$$\pi : \left| \begin{array}{ccc} 1 & 0 & x \\ -1 & -1 & y-2 \\ 0 & 1 & z \end{array} \right| = 0 \Longrightarrow \pi : x + y + z - 2 = 0$$

$$d(O, \pi) = \frac{|-2|}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}\ u^2$$

8.5. Septiembre 2007 - Opción A

Problema 8.5.1 *(2 puntos)* Hallar los puntos de la recta $r : \dfrac{x-3}{1} = \dfrac{y-5}{1} = \dfrac{z+1}{1}$ cuya distancia al plano $\pi : 2x - y + 2z + 1 = 0$ es igual a 1.

Solución:

$$\left\{ \begin{array}{l} x = 3 + \lambda \\ y = 5 + \lambda \\ z = -1 + \lambda \end{array} \right. \quad \text{un punto de } r \text{ es } P(3 + \lambda, 5 + \lambda, z = -1 + \lambda)$$

$$d(P, \pi) = \frac{|2(3 + \lambda) - (5 + \lambda) + 2(-1 + \lambda) + 1|}{\sqrt{4 + 1 + 4}} = |\lambda| = 1 \Longrightarrow \lambda = \pm 1$$

Los puntos buscados son:

$$P_1(4, 6, 0), \quad P_2(2, 4, -2)$$

Problema 8.5.2 *(2 puntos)* Sea consideran las rectas:

$$r : \left\{ \begin{array}{c} x - y = 3 \\ x + y - z = 0 \end{array} \right. \qquad s : \left\{ \begin{array}{c} x - z = 4 \\ 2x - y = 7 \end{array} \right.$$

Hallar la ecuación continua de la recta que contiene al punto $P(2, -1, 2)$ y cuyo vector director es perpendicular a los vectores directores de las dos rectas anteriores.

Solución:

$$\overrightarrow{u_r} = \left| \begin{array}{ccc} i & j & k \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{array} \right| = (1, 1, 2), \quad \overrightarrow{u_s} = \left| \begin{array}{ccc} i & j & k \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{array} \right| = -(1, 2, 1)$$

$$\overrightarrow{u_r} \times \overrightarrow{u_s} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = (-3, 1, 1) \quad t: \frac{x-2}{-3} = \frac{y+1}{1} = \frac{y-2}{1}$$

Problema 8.5.3 *(3 puntos)* Dado el sistema de ecuaciones lineales

$$\left\{ \begin{array}{rrrr} x+ & (k+1)y+ & 2z = & -1 \\ kx+ & y+ & z = & k \\ (k-1)x- & 2y- & z = & k+1 \end{array} \right.$$

se pide:

a) (2 puntos) Discutirlo según los distintos valores de k.

b) (1 punto) Resolverlo cuando tenga infinitas soluciones.

Solución:

a)

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & (k+1) & 2 & -1 \\ k & 1 & 1 & k \\ (k-1) & -2 & -1 & k+1 \end{array} \right)$$

$$|A| = 2k^2 - 5k + 2 = 0 \Longrightarrow k = \frac{1}{2}, \;\; k = 2$$

- Si $k \neq \frac{1}{2}$ y $k \neq 2 \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow$ Rango(A) =Rango$(\overline{A}) = 3 =$ n$^{\text{o}}$ de incógnitas $\Longrightarrow$ Sistema Compatible Determinado.
- $k = \frac{1}{2}$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3/2 & 2 & -1 \\ 1/2 & 1 & 1 & 1/2 \\ -1/2 & -2 & -1 & 3/2 \end{array} \right)$$

Como $|A| = 0$ y $\begin{vmatrix} 1 & 3/2 \\ 1/2 & 1 \end{vmatrix} = -1/2 \Longrightarrow$ Rango$(A) = 2$. Por otra parte

$$\begin{vmatrix} 3/2 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1/2 \\ -2 & -1 & 3/2 \end{vmatrix} = -3 \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(\overline{A}) = 3$$

Como Rango(A) $\neq$Rango$(\overline{A}) \Longrightarrow$ Sistema Incompatible.

- $k = 2$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & -1 & 3 \end{array} \right)$$

Observamos que la tercera fila es la diferencia de la segunda menos la primera, y como $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -5 \neq 0 \Longrightarrow$ Sistema Compatible Indeterminado.

b)

$$\left\{\begin{array}{rrrr} x+ & 3y+ & 2z= & -1 \\ 2x+ & y+ & z= & 2 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=7/5-1/5\lambda \\ y=-4/5-3/5\lambda \\ z=\lambda \end{array}\right.$$

Problema 8.5.4 *(3 puntos)*

a) (1,5 puntos) Hallar los máximos y los mínimos relativos y los puntos de inflexión de la función:

$$f(x)=\frac{3x^2+x+3}{x^2+1}$$

b) (1,5 puntos) Determinar una función $F(x)$ tal que su derivada sea $f(x)$ y además $F(0)=4$.

Solución:

a)

$$f'(x)=\frac{1-x^2}{(x^2+1)^2}=0 \Longrightarrow x=1,\ \ x=-1$$

	$(-\infty,-1)$	$(-1,1)$	$(1,\infty)$
$f'(x)$	$-$	$+$	$-$
$f(x)$	Decrece $\searrow$	Crece $\nearrow$	Decrece $\searrow$

Luego la función tiene un mínimo en el punto $(-1,5/2)$ y un máximo en el $(1,7/2)$.

$$f''(x)=\frac{2x(x^2-3)}{(x^2+1)^3}=0 \Longrightarrow x=0,\ \ x=\pm\sqrt{3}$$

	$(-\infty,-\sqrt{3})$	$(-\sqrt{3},0)$	$(0,\sqrt{3})$	$(\sqrt{3},\infty)$
$f''(x)$	$-$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	Convexa $\cap$	Cóncava $\cup$	Convexa $\cap$	Cóncava $\cup$

Como la función en estos tres puntos cambia de curvatura y hay continuidad, los tres son puntos de inflexión:

$$(0,3),\quad \left(\sqrt{3},\frac{5\sqrt{3}}{4}\right),\quad \left(-\sqrt{3},\frac{11\sqrt{3}}{4}\right)$$

b)

$$F(x)=\int\frac{3x^2+x+3}{x^2+1}\,dx=3x+\frac{1}{2}\ln(x^2+1)+C$$

$$F(0)=4\Longrightarrow C=4\Longrightarrow F(x)=3x+\frac{1}{2}\ln(x^2+1)+4$$

8.6. Septiembre 2007 - Opción B

Problema 8.6.1 *(2 puntos)* Calcular una matriz cuadrada X sabiendo que verifica

$$XA^2 + BA = A^2$$

siendo $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Solución:

$$XA^2 + BA = A^2 \Longrightarrow XA^2 = A^2 - BA \Longrightarrow X = (A^2 - BA)(A^2)^{-1}$$

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3$$

$$(A^2)^{-1} = I_3$$

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = 2I_3$$

Luego:

$$X = (A^2 - BA)(A^2)^{-1} = (I_3 - 2I_3)I_3 = -I_3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Problema 8.6.2 *(2 puntos)* Dado el sistema de ecuaciones

$$\left\{ \begin{array}{rrrr} x+ & 2y- & 3z = & 3 \\ 2x+ & 3y+ & z = & 5 \end{array} \right.$$

se pide:

a) (1 punto) Calcular a y b de manera que al añadir una tercera ecuación de la forma $ax + y + bz = 1$ el sistema resultante tenga las mismas soluciones que el sistema original.

b) (1 punto) Calcular las soluciones del sistema dado tales que la suma de los valores de las incógnitas sea igual a 4.

Solución:

a) Para que las soluciones del sistema resultante sean las mismas que las del sistema del enunciado necesariamente la ecuación $ax + y + bz = 1$

tiene que ser combinación lineal de las otras dos, de esa manera el sistema

$$\left\{\begin{array}{rrrr} x+ & 2y- & 3z= & 3\\ 2x+ & 3y+ & z= & 5\\ ax+ & y+ & bz= & 1 \end{array}\right. \quad \text{es Sistema Compatible Indeterminado}$$

Si multiplicamos la primera ecuación por k y la segunda por l su suma será la ecuación $ax + y + bz = 1$, es decir $F_3 = kF_1 + lF_2$:

$$\left\{\begin{array}{l} a = k + 2l\\ 2k + 3l = 1\\ -3k + l = b\\ 3k + 5l = 1 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} k = 2\\ l = -1\\ a = 0\\ b = -7 \end{array}\right.$$

La ecuación sería $y - 7z = 1$

b)

$$\left\{\begin{array}{rrrr} x+ & 2y- & 3z= & 3\\ 2x+ & 3y+ & z= & 5 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 1 - 11\lambda\\ y = 1 + 7\lambda\\ z = \lambda \end{array}\right.$$

Luego $(1-11\lambda)+(1+7\lambda)+\lambda = 4 \Longrightarrow \lambda = -\dfrac{2}{3}$ y sustituyendo tenemos:

$$x = \frac{25}{3}, \;\; y = -\frac{11}{3}, \;\; z = \frac{2}{3}$$

Problema 8.6.3 *(3 puntos)* Sean las rectas

$$r: \frac{x}{1} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-2}{2}, \quad s: \left\{\begin{array}{l} x - 3y - 5 = 0\\ x - 3z - 8 = 0 \end{array}\right.$$

a) (1,5 puntos) Hallar la ecuación del plano π que contiene a r y es paralelo a s.

b) (1,5 puntos) Calcular la distancia entre el plano π y la recta s.

Solución:

a)

$$\left\{\begin{array}{l} \overrightarrow{u_r} = (1,-1,2)\\ \overrightarrow{u_s} = (3,1,0)\\ P_r(0,1,2) \end{array}\right. \qquad \overrightarrow{u_s} = \left|\begin{array}{ccc} i & j & k\\ 1 & -3 & -5\\ 1 & -3 & -8 \end{array}\right| = 3(3,1,1)$$

$$\pi: \left|\begin{array}{rrc} 1 & 3 & x\\ -1 & 1 & y-1\\ 2 & 1 & z-2 \end{array}\right| = -3x + 5y + 4z - 13 = 0$$

$$\pi: 3x - 5y - 4z + 13 = 0$$

b) Elejimos un punto de la recta s por ejemplo $P_s(2,-1,-2)$

$$d(P_s,\pi)=\frac{|6+5+8+13|}{\sqrt{9+25+16}}=\frac{32}{\sqrt{50}}=\frac{16\sqrt{2}}{5}\ u$$

Problema 8.6.4 *(3 puntos)* Sea $g(x)$ una función continua y derivable para todo valor real de x, de la que se conoce la siguiente información:

- $g'(x)>0$ para todo $x\in(-\infty,0)\cup(2,+\infty)$, mientras que $g'(x)<0$ para todo $x\in(0,2)$.
- $g''(x)>0$ para todo $x\in(1,3)$ y $g''(x)<0$ para todo $x\in(-\infty,1)\cup(3,+\infty)$.
- $g(-1)=0,\ \ g(0)=2,\ \ g(2)=1$.
- $\lim\limits_{x\longrightarrow-\infty} g(x)=-\infty$ y $\lim\limits_{x\longrightarrow+\infty} g(x)=3$

Teniendo en cuenta los datos anteriores, se pide:

a) (1 punto) Analizar razonadamente la posible existencia o no existencia de asíntotas verticales, horizontales u oblicuas.

b) (1 punto) Dibujar de manera esquemática la gráfica de la función $g(x)$.

c) (1 punto) Si $G(x)=\displaystyle\int_0^x g(t)\,dt$ encontrar un valor x_0 tal que su derivada $G'(x_0)=0$

Solución:

	$(-\infty,0)$	$(0,2)$	$(2,\infty)$
$g'(x)$	$+$	$-$	$+$
$g(x)$	Crece $\nearrow$	Decrece $\searrow$	Crece $\nearrow$

Como la función es continua y derivable en todo R, podemos asegurar que la función tiene un máximo en $x=0$ y un mínimo en $x=2$.

	$(-\infty,1)$	$(1,3)$	$(3,\infty)$
$f''(x)$	$-$	$+$	$-$
$f(x)$	Convexa $\cap$	Cóncava $\cup$	Convexa $\cap$

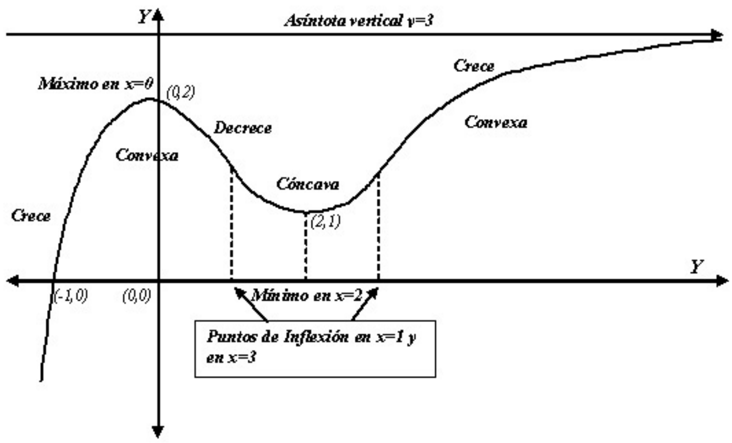
Como la función es continua y derivable en todo R, podemos asegurar que la función tiene dos puntos de inflexión en $x=1$ y en $x=3$.

a) Asíntotas:

- Verticales: No hay, ya que la función es continua y derivable en todo R.
- Horizontales: en $y=3$, ya que $\lim\limits_{x\longrightarrow+\infty} g(x)=3$

- Oblicuas: No hay al haber horizontales

b) Su representación sería:



c) $G(x) = \int_0^x g(t)\,dt$, como $g(x)$ es continua y derivable podemos aplicar el teorema fundamental del cálculo y tenemos que $G'(x) = g(x) \Longrightarrow G'(x_0) = g(x_0) = 0 \Longrightarrow x_0 = -1$