Problemas de Selectividad de Matemáticas II
Comunidad de Madrid
(Resueltos)

Isaac Musat Hervás

22 de mayo de 2013

Capítulo 9

Año 2008

9.1. Modelo 2008 - Opción A

Problema 9.1.1 *(2 puntos)* Se considera la función

$$f(x) = \frac{x}{e^x}$$

a) (1 punto) Hallar sus asíntotas y sus extremos locales.

b) (1 punto) Calcular los puntos de inflexión de $f(x)$ y dibujar la gráfica de $f(x)$.

Solución:

a) Asíntotas:

- Verticales: No hay ya que el denominador no se anula nunca.
- Horizontales:

$$\lim_{x \longrightarrow +\infty} \frac{x}{e^x} = 0 \Longrightarrow y = 0$$

$$\lim_{x \longrightarrow -\infty} \frac{x}{e^x} = -\infty \Longrightarrow \text{No Hay}$$

- Oblicuas: No hay al haber horizontales

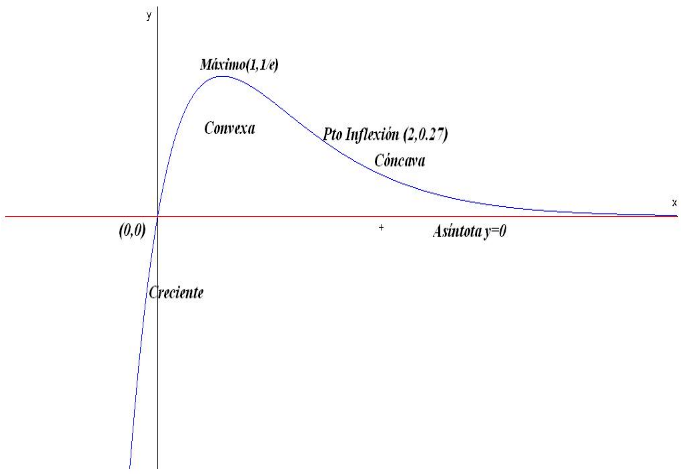
b) Representación gráfica

$$f'(x) = \frac{1-x}{e^x} = 0 \Longrightarrow x = 1$$

	$(-\infty, 1)$	$(1, \infty)$
$f'(x)$	$+$	$-$
$f(x)$	Creciente	Decreciente

Luego hay un máximo en el punto $(1, e^{-1})$

$$f''(x) = \frac{x-2}{e^x} = 0 \Longrightarrow x = 2$$



	$(-\infty, 2)$	$(2, \infty)$
$f'(x)$	$-$	$+$
$f(x)$	Convexa	Cóncava

Problema 9.1.2 *(2 puntos)* Calcular:

a) (1 punto) $\lim_{n\longrightarrow\infty}\left(\dfrac{2+n}{1+n}\right)^{1-5n}$

b) (1 punto) $\lim_{n\longrightarrow\infty}\dfrac{\sqrt{n^4+2n^3-3}-\sqrt{n^4-n}}{n+5}$

Solución:

a)

$$\lim_{n\longrightarrow\infty}\left(\frac{2+n}{1+n}\right)^{1-5n}=[1^\infty]=e^\lambda=e^{-5}$$

$$\lambda=\lim_{n\longrightarrow\infty}(1-5n)\cdot\left(\frac{2+n}{1+n}-1\right)=-5$$

b)

$$\lim_{n\longrightarrow\infty}\frac{\sqrt{n^4+2n^3-3}-\sqrt{n^4-n}}{n+5}=$$

$$\lim_{n\longrightarrow\infty}\frac{(\sqrt{n^4+2n^3-3}-\sqrt{n^4-n})(\sqrt{n^4+2n^3-3}+\sqrt{n^4-n})}{(n+5)(\sqrt{n^4+2n^3-3}+\sqrt{n^4-n})}=$$

$$\lim_{n\longrightarrow\infty}\frac{2n^3+n-3}{(n+5)(\sqrt{n^4+2n^3-3}+\sqrt{n^4-n})}=$$

$$\lim_{n\longrightarrow\infty}\frac{2+1/n^2-3/n^3}{(1+5/n)(\sqrt{1+2/n-3/n^4}+\sqrt{1-1/n^3})}=1$$

Problema 9.1.3 *(3 puntos)* Dado el sistema de ecuaciones:

$$\left\{\begin{array}{rrrr} x+ & y+ & mz = & m+2 \\ 2x+ & (m+1)y+ & (m+1)z = & -m \\ (m+2)x+ & 3y+ & (2m+1)z = & 3m+4 \end{array}\right.$$

a) (2 punto) Discutirlo según los valores del parámetro real m.

b) (1 punto) Resolverlo cuando tenga infinitas soluciones.

Solución:

a)

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & m & m+2 \\ 2 & m+1 & m+1 & -m \\ m+2 & 3 & 2m+1 & 3m+4 \end{array}\right)$$

$$|A| = -(m+2)(m-1)^2 = 0 \Longrightarrow m = 1, \quad m = -2$$

Si $m \neq 1$ y $m \neq -2 \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow$ Rango(A) =Rango$(\overline{A}) = 3 =$ nº de incógnitas y el sistema es compatible determinado, es decir, tiene solución única.

Si $m = -2$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 2 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & -3 & -2 \end{array}\right), \quad \left|\begin{array}{rr} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{array}\right| = -3 \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 2$$

Como $F_3 = 2F_1 - F_2$ podemos decir que Rango$(\overline{A}) = 2$ =Rango$(A) <$ nº de incógnitas y, por tanto, el sistema es Compatible Indeterminado.

Si $m = 1$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 2 & -1 \\ 3 & 3 & 3 & 7 \end{array}\right)$$

A la vista de la matriz se ve que el Rango$(A) = 1$ al tener las tres filas iguales, pero Rango$(\overline{A}) = 2 \neq$Rango$(A) \Longrightarrow$ Sistema Incompatible (No tiene Solución).

b)

$$\left\{\begin{array}{rrrr} x+ & y- & 2z = & 0 \\ 2x- & y- & z = & 2 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 2/3 + \lambda \\ y = -2/3 + \lambda \\ z = \lambda \end{array}\right.$$

Problema 9.1.4 *(3 puntos)* Sean los puntos $A(1,0,2)$ y $B(1,1,-4)$.

a) (1 punto) Determinar las coordenadas de los puntos P y Q que divide al segmento AB en tres partes iguales.

b) (1 punto) Si P es el punto del apartado anterior más próximo al punto A, determinar la ecuación del plano π que contiene a P y es perpendicular a la recta AB.

c) (1 punto) Determinar la posición relativa del plano π y la recta

$$r: \frac{x-3}{-2} = \frac{y}{1} = \frac{z+1}{1}$$

Solución:

a) $\overrightarrow{AB} = (1,1,-4) - (1,0,2) = (0,1,-6)$.

$$P = (1,0,2) + \frac{1}{3}(0,1,-6) = \left(1, \frac{1}{3}, 0\right)$$

$$Q = (1,0,2) + \frac{2}{3}(0,1,-6) = \left(1, \frac{2}{3}, -2\right)$$

b)

$$\pi : y - 6z + \lambda = 0 \Longrightarrow \frac{1}{3} + \lambda = 0 \Longrightarrow \lambda = -\frac{1}{3}$$

El plano buscado será: $\pi : 3y - 18z - 1 = 0$

c)

$$r : \left\{ \begin{array}{ll} x = & 3 - 2\lambda \\ y = & \lambda \\ z = & -1 + \lambda \end{array} \right. \Longrightarrow 3\lambda - 18(-1+\lambda) - 1 = 0 \Longrightarrow \lambda = \frac{17}{15}$$

Luego el plano y la recta se cortan en el punto:

$$\left(3 - 2\frac{17}{15}, \frac{17}{15}, -1 + \frac{17}{15}\right) = \left(\frac{11}{15}, \frac{17}{15}, \frac{2}{15}\right)$$

9.2. Modelo 2008 - Opción B

Problema 9.2.1 *(2 puntos)* Hallar los puntos de la recta $r : \left\{ \begin{array}{l} 2x + z = 0 \\ x - y + z = 3 \end{array} \right.$ cuya distancia al plano $\pi : 3x + 4y = 4$ es igual a $\frac{1}{3}$.

Solución:

$$\overrightarrow{u_r} = \left| \begin{array}{ccc} i & j & k \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{array} \right| = (1,-1,-2), \;\; P_r(0,-3,0) \Longrightarrow r : \left\{ \begin{array}{l} x = \lambda \\ y = -3 - \lambda \\ z = -2\lambda \end{array} \right.$$

$$P(\lambda, -3-\lambda, -2\lambda), \quad \pi : 3x+4y=4$$

$$d(P,\pi) = \frac{|3\lambda + 4(-3-\lambda) - 4|}{5} = \frac{1}{3} \Longrightarrow |-\lambda - 16| = \frac{5}{3} \Longrightarrow |\lambda + 16| = \frac{5}{3}$$

Tenemos dos soluciones:

$$\lambda + 16 = \frac{5}{3} \Longrightarrow \lambda = -\frac{43}{3} \Longrightarrow P\left(-\frac{43}{3}, -\frac{52}{3}, \frac{86}{3}\right)$$

$$\lambda + 16 = -\frac{5}{3} \Longrightarrow \lambda = -\frac{53}{3} \Longrightarrow P\left(-\frac{53}{3}, -\frac{62}{3}, \frac{106}{3}\right)$$

Problema 9.2.2 *(2 puntos)* Dados los puntos $A(1,3,-2)$, $B(2,2k+1,k)$ y $C(k+1,4,3)$, se pide:

a) (1 punto) Determinar para qué valor de k el triángulo BAC es rectángulo, con el ángulo recto en el vértice A.

b) (1 punto) Para el valor $k=0$ hallar el área del triángulo ABC.

Solución:

a)

$$\overrightarrow{AB} = (2, 2k+1, k) - (1, 3, -2) = (1, 2k-2, k+2)$$

$$\overrightarrow{AC} = (k+1, 4, 3) - (1, 3, -2) = (k, 1, 5)$$

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0 \Longrightarrow k + 2k - 2 + 5k + 10 = 0 \Longrightarrow k = -1$$

b) Si $k=0$:

$$\overrightarrow{AB} = (1, -2, 2), \quad \overrightarrow{AC} = (0, 1, 5)$$

$$S = \frac{1}{2}|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}| = \frac{1}{2}|\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 5 \end{vmatrix}| = |(-12, -5, 1)| = \frac{\sqrt{170}}{2}\, u^2$$

Problema 9.2.3 *(3 puntos)* Sean las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 7 & -3 \\ 8 & -3 \end{pmatrix}$$

a) (1 punto) Hallar una matriz X tal que $AXA^{-1} = B$.

b) (1 punto) Calcular A^{10}.

c) (1 punto) Hallar todas las matrices M que satisfacen

$$(A-M)(A+M) = A^2 - M^2$$

Solución:

a) $AXA^{-1} = B \Longrightarrow X = A^{-1}BA$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow X = A^{-1}BA =$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 7 & -3 \\ 8 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 & -21 \\ 8 & -11 \end{pmatrix}$$

b)

$$A^1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A^n = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^{10} = \begin{pmatrix} 1 & 10 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

c)

$$A^2 + AM - MA - M^2 = A^2 - M^2 \Longrightarrow AM = MA$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a+c & b+d \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & a+b \\ c & c+d \end{pmatrix} \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} a+c = a \Longrightarrow c = 0 \\ b+d = a+b \Longrightarrow a = d \\ c = c \\ d = c+d \Longrightarrow c = 0 \end{array} \right.$$

La matriz buscada es:

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$$

Problema 9.2.4 *(3 puntos)* Se considera la función

$$f(x) = \left\{ \begin{array}{ccc} ax^2 + b & \text{si} & |x| < 2 \\ 1/x^2 & \text{si} & |x| \geq 2 \end{array} \right.$$

Se pide:

a) (1,5 punto) Calcular a y b para que f sea continua y derivable en todo R.

b) (1,5 punto) Para los valores de a y b obtenidos en el apartado anterior, calcular el área de la región acotada limitada por la gráfica de f el eje horizontal y las rectas $x = 1$, $x = 3$.

Solución:

a)

$$f(x) = \left\{ \begin{array}{lll} ax^2 + b & \text{si} & |x| < 2 \\ 1/x^2 & \text{si} & |x| \geq 2 \end{array} \right. \Longrightarrow f(x) = \left\{ \begin{array}{lll} 1/x^2 & \text{si} & x \leq -2 \\ ax^2 + b & \text{si} & -2 < x < 2 \\ 1/x^2 & \text{si} & x \geq 2 \end{array} \right.$$

Para que $f(x)$ sea continua en $x = -2$:

$$\lim_{x \longrightarrow -2^-} f(x) = \lim_{x \longrightarrow 2} \frac{1}{x^2} = \frac{1}{4}$$

$$\lim_{x \longrightarrow -2^+} f(x) = \lim_{x \longrightarrow 2} (ax^2 + b) = 4a + b$$

$$4a + b = \frac{1}{4} \Longrightarrow 16a + 4b = 1$$

Para que $f(x)$ sea continua en $x = 2$: (Quedan los mismos resultados de $x = -2$)

La derivada será:

$$f'(x) = \left\{ \begin{array}{lll} -2/x^3 & \text{si} & x \leq -2 \\ 2ax & \text{si} & -2 < x < 2 \\ -2/x^3 & \text{si} & x \geq 2 \end{array} \right.$$

Para que $f(x)$ sea derivable en $x = -2$:

$$f'(-2^-) = \frac{1}{4}, \quad f'(-2^+) = -4a$$

$$-4a = \frac{1}{4} \Longrightarrow a = -\frac{1}{16}$$

Para que $f(x)$ sea derivable en $x = 2$: (Quedan los mismos resultados de $x = -2$)

$$4a = -\frac{1}{4} \Longrightarrow a = -\frac{1}{16}$$

Si $a = -\dfrac{1}{16} \Longrightarrow b = \dfrac{1}{2}$

$$f(x) = \left\{ \begin{array}{lll} 1/x^2 & \text{si} & x \leq -2 \\ -1/16x^2 + 1/2 & \text{si} & -2 < x < 2 \\ 1/x^2 & \text{si} & x \geq 2 \end{array} \right.$$

b) El signo de la función f en el intervalo $[1, 2]$ es siempre positiva, y lo mismo ocurre en el intervalo $[2, 3]$

$$-1/16x^2 + 1/2 = 0 \Longrightarrow x = \pm\sqrt{8}$$

Los íntervalos de integración serán $(1,2)$ y $(2,3)$

$$S_1=\int_1^2\left(-\frac{1}{16}x^2+\frac{1}{2}\right)\,dx=\left.\frac{-x^3}{48}+\frac{x}{2}\right]_1^2=\frac{17}{48}$$

$$S_2=\int_2^3\left(-\frac{1}{x^2}\right)\,dx=\left.-\frac{1}{x}\right]_2^3=\frac{1}{6}$$

$$S=S_1+S_2=\frac{17}{48}+\frac{1}{6}=\frac{25}{48}\;u^2$$

9.3. Junio 2008 - Opción A

Problema 9.3.1 *(3 puntos)* Dado el sistema de ecuaciones lineales:

$$\left\{\begin{array}{rrr} x- & ay= & 2\\ ax- & y= & a+1\end{array}\right.$$

se pide:

a) (2 puntos) Discutir el sistema según los valores del parámetro a. Resolverlo cuando la solución sea única.

b) (1 punto) Determinar para qué valor o valores de a el sistema tiene solución en la que $y=2$.

Solución:

a)

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -a & 2\\ a & -1 & a+1\end{array}\right),\quad |A|=-1+a^2=0\Longrightarrow a=\pm 1$$

Si $a\neq\pm 1\Longrightarrow |A|\neq 0\Longrightarrow$ Rango$(A)=2=$Rango$(\overline{A})=$ nº de incógnitas y el sistema es Compatible Determinado (solución única). Su solución sería, aplicando Cramer:

$$x=\frac{\left|\begin{array}{cc} 2 & -a\\ a+1 & -1\end{array}\right|}{-1+a^2}=\frac{a+2}{a+1},\quad y=\frac{\left|\begin{array}{cc} 1 & 2\\ a & a+1\end{array}\right|}{-1+a^2}=-\frac{1}{a+1}$$

Si $a=-1$

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2\\ -1 & -1 & 0\end{array}\right)$$

En este caso Rango$(A)=1$, mientras que Rango$(\overline{A})=2$ ya que el menor $\left|\begin{array}{cc} 1 & 2\\ -1 & 0\end{array}\right|=2\neq 0$. Como Rango$(A)\neq$Rango$(\overline{A})\Longrightarrow$ Sistema Incompatible (no tiene solución).

Si $a = 1$

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{array} \right)$$

Está claro, que las dos filas son iguales y, por tanto, Rango(A) = 1 =Rango$(\overline{A})$ < nº de incógnitas y el sistema es Compatible Indeterminado (infinitas soluciones). Las soluciones, en este caso y aunque no las pida el problema son:

$$\left\{ \begin{array}{l} x = 2 + \lambda \\ y = \lambda \end{array} \right.$$

b)

$$2 = -\frac{1}{a+1} \Longrightarrow a = -\frac{3}{2}$$

Cuando $a = 1$ e $y = 2 \Longrightarrow x = 4$, luego las soluciones de a pedidas son $a = 1$ y $a = -\frac{3}{2}$.

Problema 9.3.2 *(3 puntos)* Dadas las rectas:

$$r : \left\{ \begin{array}{l} x - ay = 2 \\ ay + z = 1 \end{array} \right. \qquad s : \left\{ \begin{array}{l} x - z = 1 \\ y + z = 3 \end{array} \right.$$

se pide:

a) (1,5 puntos) Discutir la posición relativa de las dos rectas r, s según los valores del parámetro a.

b) (1,5 puntos) Si $a = 1$, calcular la distancia mínima entre las dos rectas r y s.

Solución:

$$r : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_r} = (-a, -1, a) \\ P_r(2, 0, 1) \end{array} \right. \qquad s : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_s} = (1, -1, 1) \\ P_s(1, 3, 0) \end{array} \right.$$

a) $\overrightarrow{P_rP_s} = (-1, 3, -1)$

$$|A| = \left| \begin{array}{rrr} -a & -1 & a \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & -1 \end{array} \right| = 4a = 0 \Longrightarrow a = 0$$

Si $a \neq 0 \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow$ Se cruzan.

Si $a = 0$:

$$(A) = \left(\begin{array}{rrr} 0 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & -1 \end{array} \right)$$

como $\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \Longrightarrow$ se cortan.

b) Si $a = 1$:

$$r : \begin{cases} \overrightarrow{u_r} = (-1,-1,1) \\ P_r(2,0,1) \end{cases} \quad s : \begin{cases} \overrightarrow{u_s} = (1,-1,1) \\ P_s(1,3,0) \end{cases} , \quad \overrightarrow{P_rP_s} = (-1,3,-1)$$

$$d(r,s) = \frac{|\overrightarrow{P_rP_s}, \overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_s}|}{|\overrightarrow{u_r} \times \overrightarrow{u_s}|} = \frac{4}{2\sqrt{2}} = \sqrt{2}\, u$$

$$|\overrightarrow{P_rP_s}, \overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_s}| = \begin{vmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 4$$

$$|\overrightarrow{u_r} \times \overrightarrow{u_s}| = |\begin{vmatrix} i & j & k \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}| = |(0,2,2)| = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

Problema 9.3.3 *(2 puntos)* Estudiar los siguientes límites:

a) (1 punto) $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} (e^x - x^2)$

b) (1 punto) $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} \dfrac{4^x + 5^x}{3^x + 6^x}$

Solución:

a)

$$\lim_{x \longrightarrow +\infty} (e^x - x^2) = \lim_{x \longrightarrow +\infty} e^x \left(1 - \frac{x^2}{e^x}\right) = \lim_{x \longrightarrow +\infty} e^x = \infty$$

ya que:

$$\lim_{x \longrightarrow +\infty} \frac{x^2}{e^x} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x \longrightarrow +\infty} \frac{2x}{e^x} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x \longrightarrow +\infty} \frac{2}{e^x} = 0$$

b)

$$\lim_{x \longrightarrow +\infty} \frac{4^x + 5^x}{3^x + 6^x} = \lim_{x \longrightarrow +\infty} \frac{5^x \left(\left(\frac{4}{5}\right)^x + 1\right)}{6^x \left(\left(\frac{3}{6}\right)^x + 1\right)} = \lim_{x \longrightarrow +\infty} \left(\frac{5}{6}\right)^x \frac{\left(\frac{4}{5}\right)^x + 1}{\left(\frac{3}{6}\right)^x + 1} = 0$$

Problema 9.3.4 *(2 puntos)* Obtener los máximos y mínimos relativos, y los puntos de inflexión de la función:

$$f(x) = x(\ln(x))^2$$

siendo $\ln(x)$ el logaritmo neperiano de x.

Solución:

$$f'(x) = (\ln(x))^2 + 2\ln(x) = 0 \Longrightarrow x = 1,\ \ x = e^{-2}$$

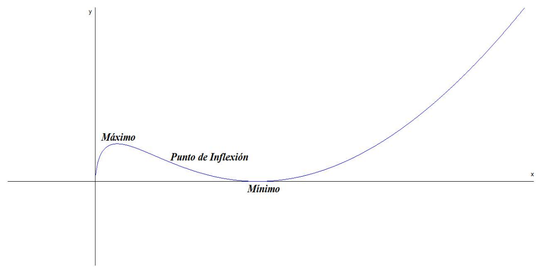
	$(0, e^{-2})$	$(e^{-2}, 1)$	$(1, \infty)$
$f'(x)$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	Creciente $\nearrow$	Decreciente $\searrow$	Creciente $\nearrow$

La función presenta un máximo en el punto $(e^{-2}, 4e^{-2})$ y un mínimo en $(1, 0)$.

$$f''(x) = \frac{2\ln(x)}{x} + \frac{2}{x} = 0 \Longrightarrow x = e^{-1}$$

	$(0, e^{-1})$	(e^{-1}, ∞)
$f''(x)$	$-$	$+$
$f(x)$	Convexa $\cap$	Cóncava $\cup$

La función presenta un punto de Inflexión en el (e^{-1}, e^{-1})



9.4. Junio 2008 - Opción B

Problema 9.4.1 *(3 puntos)* Dada la siguiente matriz de orden n:

$$A_n = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ -1 & 9 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 9 & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ -1 & -1 & -1 & \cdots & -1 & 9 \end{pmatrix}$$

se pide:

a) (0,5 puntos) Calcular el determinante de la matriz A_2.

b) (0,5 puntos) Calcular el determinante de la matriz A_3.

c) (2 puntos) Calcular el determinante de la matriz A_5.

Solución:

a)

$$A_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 9 \end{vmatrix} = 10$$

b)

$$A_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 9 & 1 \\ -1 & -1 & 9 \end{vmatrix} = 10^2 = 100$$

c)

$$A_5 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 9 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 9 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 9 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & 9 \end{vmatrix} = 10^4 = 10000$$

Problema 9.4.2 *(3 puntos)*

a) (1,5 puntos) Para cada valor de $c > 0$, calcular el área de la región acotada comprendida entre la gráfica de la función:

$$f(x) = cx^4 + \frac{1}{c}x^2 + 1$$

el eje OX y las rectas $x = 0$, $x = 1$.

b) (1,5 puntos) Hallar el valor de c para el cual el área obtenida en el apartado anterior es mínima.

Solución:

a)

$$cx^4 + \frac{1}{c}x^2 + 1 = 0 \Longrightarrow c^2x^4 + x^2 + c = 0$$

Esta ecuación no tiene soluciones para $0 < c < 10$, ya que el discriminate $1 - 4c^2 < 0$, ésto quiere decir que, la función no corta el eje OX en el intervalo $[0, 1]$ y, por tanto, los límites de integración del área buscada serán desde $x = 0$ hasta $x = 1$.

$$S = \left|\int_0^1 \left(cx^4 + \frac{1}{c}x^2 + 1\right)\, dx\right| = \left|\left.\frac{cx^5}{5} + \frac{x^3}{3c} + x\right]_0^1\right| = \frac{c}{5} + \frac{1}{3c} + 1$$

$$S(c) = \frac{3c^2 + 15c + 5}{15c}$$

b)

$$S'(c) = \frac{3c^2 - 5}{15c^2} = 0 \Longrightarrow c = \pm\frac{\sqrt{5}}{3}$$

	$(0, -\sqrt{5}/3)$	$(-\sqrt{5}/3, \sqrt{5}/3)$	$(\sqrt{5}/3, \infty)$
$f'(x)$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	Creciente $\nearrow$	Decreciente $\searrow$	Creciente $\nearrow$

La función presenta un máximo en $c = -\sqrt{5}/3$ y un mínimo en $c = \sqrt{5}/3$, que es el valor buscado.

Problema 9.4.3 *(2 puntos)* Dados los puntos $A(0,0,1)$, $B(1,0,-1)$, $C(0,1,-2)$ y $D(1,2,0)$, se pide:

a) (0,5 puntos) Demostrar que los cuatro puntos no son coplanarios.

b) (1 punto) Hallar la ecuación del plano π determinado por los puntos A, B y C.

c) (0,5 puntos) Hallar la distancia del punto D al plano π.

Solución:

a) Construimos los vectores:

$$\left\{\begin{array}{l} \overrightarrow{AB} = (1,0,-2) \\ \overrightarrow{AC} = (0,1,-3) \\ \overrightarrow{AD} = (1,2,-1) \end{array}\right. \Longrightarrow \left|\begin{array}{ccc} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -3 \\ 1 & 2 & -1 \end{array}\right| = 7 \neq 0 \Longrightarrow$$

Los cuatro puntos no son coplanarios.

b)

$$\pi : \left\{\begin{array}{l} \overrightarrow{AB} = (1,0,-2) \\ \overrightarrow{AC} = (0,1,-3) \\ A(0,0,1) \end{array}\right. \Longrightarrow \pi : \left|\begin{array}{ccc} 1 & 0 & x \\ 0 & 1 & y \\ -2 & -3 & z-1 \end{array}\right| = 0 \Longrightarrow$$

$$\pi : 2x + 3y + z - 1 = 0$$

c)

$$d(D,\pi) = \frac{|2+6-1|}{\sqrt{14}} = \frac{7}{\sqrt{14}} = \frac{\sqrt{14}}{2}$$

Problema 9.4.4 *(2 puntos)* Dados el plano $\pi : 3x + 2y - z + 10 = 0$ y el punto $P(1,2,3)$, se pide:

a) (0,5 puntos) Hallar la ecuación de la recta r perpendicular al plano π que pasa por el punto P.

b) (0,5 puntos) Hallar el punto Q intersección de π con r.

c) (0,5 puntos) Hallar el punto R intersección de π con el eje OY.

d) (0,5 puntos) Hallar el área del triángulo PQR

Solución:

a)

$$r : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_r} = (3, 2, -1) \\ P_r(1, 2, 3) \end{array} \right. \Longrightarrow r : \left\{ \begin{array}{l} x = 1 + 3\lambda \\ y = 2 + 2\lambda \\ z = 3 - \lambda \end{array} \right.$$

b)

$$3(1 + 3\lambda) + 2(2 + 2\lambda) - (3 - \lambda) + 10 = 0 \Longrightarrow \lambda = -1$$

Luego el punto buscado es el $Q(-2, 0, 4)$ (Sustituyendo el valor de λ en la recta r.

c) Cuando el plano π corta al eje OY tendremos que $x = 0$ y $z = 0$, luego $2y + 10 = 0 \Longrightarrow y = -5$. El punto buscado es $R(0, -5, 0)$.

d) Construyo los vectores $\overrightarrow{RQ} = (-2, 5, 4)$ y $\overrightarrow{RP} = (1, 7, 3)$

$$S = \frac{1}{2}|\overrightarrow{RQ} \times \overrightarrow{RP}| = | \left| \begin{array}{ccc} i & j & k \\ -2 & 5 & 4 \\ 1 & 7 & 3 \end{array} \right| | = \frac{1}{2}|(-13, 10, -19)| = \frac{3\sqrt{70}}{2}$$

9.5. Septiembre 2008 - Opción A

Problema 9.5.1 *(3 puntos)* Dada la función;

$$f(x) = e^{-x}(x^2 + 1)$$

se pide:

a) (2 puntos) Dibujar la gráfica de f, estudiando el crecimiento, decrecimiento, puntos de inflexión y asíntotas.

b) (1 punto) Calcular:

$$\int_0^1 f(x)\, dx$$

Solución:

$$f(x) = \frac{x^2 + 1}{e^x}$$

a)
- Asíntotas:
  a) Verticales: No Hay

b) Horizontales:

$$\lim_{x \longrightarrow \infty} f(x) = 0$$
$$\lim_{x \longrightarrow -\infty} f(x) = \infty$$

La recta $y = 0$ es una asíntota horizontal cuando $x \longrightarrow \infty$, pero no lo es cuando $x \longrightarrow -\infty$.

c) Oblicuas: No hay al haber horizontales

- Monotonía:

$$f'(x) = \frac{-x^2 + 2x - 1}{e^x} = -\frac{(x-1)^2}{e^x} = 0 \Longrightarrow x = 1$$

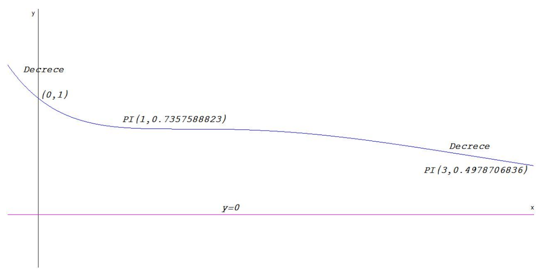
Además, $f'(x) \leq 0$ siempre y, por tanto, la función es siempre decreciente. Esto quiere decir que, la función no tiene ni máximos ni mínimos.

- Curvatura:

$$f''(x) = \frac{x^2 - 4x + 3}{e^x} = 0 \Longrightarrow x = 1, \;\; x = 3$$

	$(-\infty, 1)$	$(1, 3)$	$(3, \infty)$
$f''(x)$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	Cóncava $\cup$	Convexa $\cap$	Cóncava $\cup$

- Representación:



b) Se trata de una integral por partes donde $u = x^2 + 1 \Longrightarrow du = 2xdx$ y $dv = e^{-x}dx \Longrightarrow v = -e^{-x}$

$$\int f(x)\, dx = \int \frac{x^2+1}{e^{-x}}\, dx = -e^{-x}(x^2+1) + 2\int xe^{-x}dx =$$

(Volviendo a resolver por partes $u = x \Longrightarrow du = dx$ y $dv = e^{-x}dx \Longrightarrow v = -e^{-x}$)

$$= -e^{-x}(x^2+1) + 2\left[-xe^{-x} + \int e^{-x}\right] = -e^{-x}(x^2+1) - 2xe^{-x} - 2e^{-x} =$$

$$= -e^{-x}(x^2+2x+3) = -\frac{x^2+2x+3}{e^x}$$

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 \frac{x^2+1}{e^x}\,dx = -\frac{x^2+2x+3}{e^x}\Bigg]_0^1 = 3 - \frac{6}{e}$$

Problema 9.5.2 *(3 puntos)* Dada la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & a+1 & 1 \\ 2a & 0 & 1 \\ 2 & 0 & a+1 \end{pmatrix}$$

se pide:

a) (1,5 puntos) Determinar el rango de A según los valores del parámetro a.

b) (1,5 puntos) Decir cuándo la matriz A es invertible. Calcular la inversa para $a = 1$.

Solución:

a)

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & a+1 & 1 \\ 2a & 0 & 1 \\ 2 & 0 & a+1 \end{vmatrix} = -2(a+1)(a^2+a-1) = 0 \Longrightarrow a = -1,\ a = \frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$$

En los tres casos el Rango$(A) = 2$

b) Si $a \neq -1$ y $a \neq \frac{-1\pm\sqrt{5}}{2} \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow$ la matriz A es invertible.

Si $a = -1$ o $a = \frac{-1\pm\sqrt{5}}{2} \Longrightarrow |A| = 0 \Longrightarrow$ la matriz A no es invertible.

Cuando $a = 1$:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \Longrightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1/2 \\ 1/2 & -1/2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Problema 9.5.3 *(2 puntos)* Dados los puntos $P(1,1,3)$ y $Q(0,1,0)$, se pide:

a) (1 punto) Hallar todos los puntos R tales que la distancia entre P y R sea igual a la distancia entre Q y R. Describir dicho conjunto de puntos.

b) (1 punto) Hallar todos los puntos S contenidos en la recta que pasa por P y Q que verifican $\text{dist}(P,S) = 2\text{dist}(Q,S)$, donde "dist" significa distancia.

Solución:

a) Sea $R(x,y,z)$:

$$|\overrightarrow{PR}| = |\overrightarrow{QR}| \Longrightarrow |(x-1,y-1,z-3)| = |(x,y-1,z)| \Longrightarrow$$

$$\sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2+(z-3)^2} = \sqrt{x^2+(y-1)^2+z^2} \Longrightarrow x+3z-5=0$$

Se trata, por tanto, de un plano.

b) La recta

$$r : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{QP} = (1,0,3) \\ Q(0,1,0) \end{array} \right. \Longrightarrow r : \left\{ \begin{array}{l} x = \lambda \\ y = 1 \\ z = 3\lambda \end{array} \right. \Longrightarrow S(\lambda, 1, 3\lambda)$$

$$|\overrightarrow{PS}| = 2|\overrightarrow{QS}| \Longrightarrow |(\lambda-1, 0, 3\lambda-3)| = 2|(\lambda, 0, 3\lambda)|$$

$$\sqrt{(\lambda-1)^2+(3\lambda-3)^2} = 2\sqrt{\lambda^2+(3\lambda)^2} \Longrightarrow (\lambda-1)^2+(3\lambda-3)^2 = 4(\lambda^2+(3\lambda)^2)$$

$$3\lambda^2+2\lambda-1=0 \Longrightarrow \lambda=-1, \quad \lambda=\frac{1}{3}$$

Los puntos buscados serán:

$$S_1(-1,1,-1) \text{ y } S_2\left(\frac{1}{3},1,1\right)$$

Problema 9.5.4 *(2 puntos)* Dadas las rectas:

$$r : \frac{x+1}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z}{3}, \quad s : \frac{x}{2} = \frac{y-1}{3} = \frac{z}{4}$$

hallar la ecuación de la recta t perpendicular común a ambas.

Solución:

$$r : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_r} = (1,2,3) \\ P_r(-1,2,0) \end{array} \right. , \quad s : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_s} = (2,3,4) \\ P_s(0,1,0) \end{array} \right.$$

$$u_t = \left| \begin{array}{ccc} i & j & k \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{array} \right| = (-1,2,-1)$$

Obtengo la recta t como intersección de dos planos:

$$\pi_1 : \begin{cases} \overrightarrow{u_t} = (-1, 2, -1) \\ \overrightarrow{u_r} = (1, 2, 3) \\ P_r(-1, 2, 0) \end{cases} \quad \text{y} \quad \pi_2 : \begin{cases} \overrightarrow{u_t} = (-1, 2, -1) \\ \overrightarrow{u_s} = (2, 3, 4) \\ P_s(0, 1, 0) \end{cases}$$

$$\pi_1 : \begin{vmatrix} -1 & 1 & x+1 \\ 2 & 2 & y-2 \\ -1 & 3 & z \end{vmatrix} = 0 \Longrightarrow 4x + y - 2z + 2 = 0$$

$$\pi_2 : \begin{vmatrix} -1 & 2 & x \\ 2 & 3 & y-1 \\ -1 & 4 & z \end{vmatrix} = 0 \Longrightarrow 11x + 2y - 7z - 2 = 0$$

$$t : \begin{cases} 4x + y - 2z + 2 = 0 \\ 11x + 2y - 7z - 2 = 0 \end{cases}$$

9.6. Septiembre 2008 - Opción B

Problema 9.6.1 *(3 puntos)*

a) (1,5 puntos) Calcular:

$$\int x^3 \ln(x)\, dx$$

donde $\ln(x)$ es el logaritmo neperiano de x.

b) (1,5 puntos) Utilizar el cambio de variable

$$x = e^t - e^{-t}$$

para calcular:

$$\int \frac{1}{\sqrt{4 + x^2}}\, dx$$

Indicación : Para deshacer el cambio de variable utilizar:

$$t = \ln\left(\frac{x + \sqrt{x^2 + 4}}{2}\right)$$

Solución:

a) Se trata de una integral por partes, donde hacemos: $u = \ln x \Longrightarrow du = \dfrac{dx}{x}$ y $dv = x^3 dx \Longrightarrow v = \dfrac{x^4}{4}$

$$\int x^3 \ln(x)\, dx = \frac{x^4 \ln x}{4} - \frac{1}{4}\int x^3\, dx = \frac{x^4 \ln x}{4} - \frac{1}{4} \cdot \frac{x^4}{4} = \frac{4x^4 \ln x - x^4}{16} + C$$

b) $x = e^t - e^{-t} \Longrightarrow dx = (e^t + e^{-t})dt$

$$\int \frac{1}{\sqrt{4+x^2}}\,dx = \int \frac{e^t + e^{-t}}{\sqrt{4+(e^t - e^{-t})^2}}\,dt = \int \frac{e^t + e^{-t}}{\sqrt{2+e^{2t}+e^{-2t}}}\,dt =$$

$$\int \frac{e^t + e^{-t}}{\sqrt{(e^t + e^{-t})^2}}\,dt = \int \frac{e^t + e^{-t}}{e^t + e^{-t}}\,dt = \int dt = t = \ln\left(\frac{x+\sqrt{x^2+4}}{2}\right)+C$$

Problema 9.6.2 *(3 puntos)* Dados el plano:

$$\pi_1 : x + y + z = 1$$

y la recta:

$$r : \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z}{-4}$$

se pide:

a) (1 punto) Hallar el punto P determinado por la intersección de r con π_1.

b) (2 puntos) Hallar el plano π_2 paralelo a π_1 y tal que el segmento de la recta r comprendido entre los planos π_1, π_2 tenga longitud $\sqrt{29}$ unidades.

Solución:

a) Ponemos la ecuación paramétrica de la recta

$$r : \left\{\begin{array}{l} x = 1 + 2\lambda \\ y = -1 + 3\lambda \\ z = -4\lambda \end{array}\right.$$

Sustituimos en el plano: $1 + 2\lambda - 1 + 3\lambda - 4\lambda = 1 \Longrightarrow \lambda = 1$, luego el punto buscado es: $P(3, 2, -4)$.

b) Calculamos un punto $Q(1 + 2\lambda, -1 + 3\lambda, -4\lambda)$ de la recta r que dista $\sqrt{29}$ unidades del punto P calculado anteriormente:

$$|\overrightarrow{PQ}| = |(-2+2\lambda, -3+3\lambda, 4-4\lambda)| = \sqrt{4(\lambda-1)^2 + 9(\lambda-1)^2 + 16(1-\lambda)^2} =$$

$$\sqrt{29}(\lambda - 1) = \sqrt{29} \Longrightarrow \lambda = 2$$

Luego $Q(5, 5, -8)$ que, estará contenido en el plano que buscamos π_2 cuya ecuación será: $x + y + z = \mu$ por ser paralelo a π_1. Para calcular μ sustituimos el punto Q en el plano π_2 y tenemos

$$\mu = 5 + 5 - 8 = 2 \Longrightarrow \pi_2 : x + y + z = 2$$

La otra solución sería:

$$\sqrt{29}(1-\lambda) = \sqrt{29} \Longrightarrow \lambda = 0$$

Luego $Q(1,-1,-4)$ que, estará contenido en el plano que buscamos π_2 cuya ecuación será: $x+y+z=\mu$ por ser paralelo a π_1. Para calcular μ sustituimos el punto Q en el plano π_2 y tenemos

$$\mu = 1-1-4 = -4 \Longrightarrow \pi_2 : x+y+z = -4$$

Problema 9.6.3 *(2 puntos)* Resolver el siguiente sistema:

$$\left\{\begin{array}{rrrrrr} x & -2y & +\ z & -3v & = & -4 \\ x & +2y & +\ z & +3v & = & 4 \\ 2x & -4y & +2z & -6v & = & -8 \\ 2x & & +2z & & = & 0 \end{array}\right.$$

Solución:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & -3 & -4 \\ 1 & 2 & 1 & 3 & 4 \\ 2 & -4 & 2 & -6 & -8 \\ 2 & 0 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Observando la matriz vemos que, la 1^a columna es igual a la 3^a, y la segunda es igual a la 4^a multiplicada por dos, luego el Rango(A) =Rango$(\overline{A}) = 2 < 4$ n^o de incógnitas y se trata de un Sistema Compatible Indeterminado con $4-2=2$ grados de libertad. Es decir, necesitaremos dos parámetros para su solución.

Como las dos primeras filas son linealmente independientes el sitema a resolver será:

$$\left\{\begin{array}{rrrrrr} x & -2y & +z & -3v & = & -4 \\ x & +2y & +z & +3v & = & 4 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = -\lambda \\ \\ y = \dfrac{4-3\mu}{2} \\ \\ z = \lambda \\ v = \mu \end{array}\right.$$

Problema 9.6.4 *(2 puntos)* El cajero automático de una determinada entidad bancaria sólo admite billetes de 50, de 20 y de 10 euros. Los viernes depositan en el cajero 225 billetes por un importe total de 7000 euros. Averiguar el número de billetes de cada valor depositado, sabiendo que la suma del número de billetes de 50 y de 10 euros es el doble que el número de billetes de 20 euros.

Solución:

x: n$^{\text{o}}$ de billetes de 50 euros

y: n$^{\text{o}}$ de billetes de 20 euros

z: n$^{\text{o}}$ de billetes de 10 euros

$$\left\{\begin{array}{c} 50x+20y+10z=7000\\ x+y+z=225\\ x+z=2y \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{c} x=100\\ y=75\\ z=50 \end{array}\right.$$