Problemas de Selectividad de Matemáticas II
Comunidad de Madrid
(Resueltos)

Isaac Musat Hervás

22 de mayo de 2013

Capítulo 10

Año 2009

10.1. Modelo 2009 - Opción A

Problema 10.1.1 *(3 puntos)* Dados el plano $\pi : x + 2y - z = 2$, la recta:

$$r : \frac{x-3}{2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-5}{4}$$

y el punto $P(-2, 3, 2)$, perteneciente al plano π, se pide:

a) (0,5 puntos) Determinar la posición relativa de π y r.

b) (1 punto) Calcular la ecuación de la recta t contenida en π, que pasa por el punto P y que corta perpendicularmente a r.

c) (1,5 puntos) Sea Q el punto intersección de r y t. Si s es la recta perpendicular al plano π y que contiene a P, y R es un punto cualquiera de s, probar que la recta determinada por R y Q es perpendicular a r.

Solución:

a) De dos formas difrentes:

- La ecuación de la recta en paramétricas es $r : \left\{\begin{array}{l} x = 3 + 2\lambda \\ y = 2 + \lambda \\ z = 5 + 4\lambda \end{array}\right.$, y si sustituimos en el plano π tenemos:

$$(3 + 2\lambda) + 2(2 + \lambda) - (5 + 4\lambda) = 2 \Longrightarrow 2 = 2$$

expresión que se cumple para cualquier punto de la recta independientemente del valor de λ y, por tanto, la recta r está contenida en el plano π.

- Ponemos la recta r como intersección de dos planos:

$$\frac{x-3}{2}=\frac{z-5}{4}\Longrightarrow 2x-z=1$$

$$\frac{x-3}{2}=\frac{y-2}{1}\Longrightarrow x-2y=-1$$

  Ahora estudiamos el sistema formado por estos dos planos y el plano π

$$\left\{\begin{array}{rrrr} x+ & 2y- & z= & 2\\ x- & 2y & = & -1\\ 2x & - & z= & 1\end{array}\right. \Longrightarrow \overline{A}=\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & -1 & 2\\ 1 & -2 & 0 & -1\\ 2 & 0 & -1 & 1\end{array}\right)$$

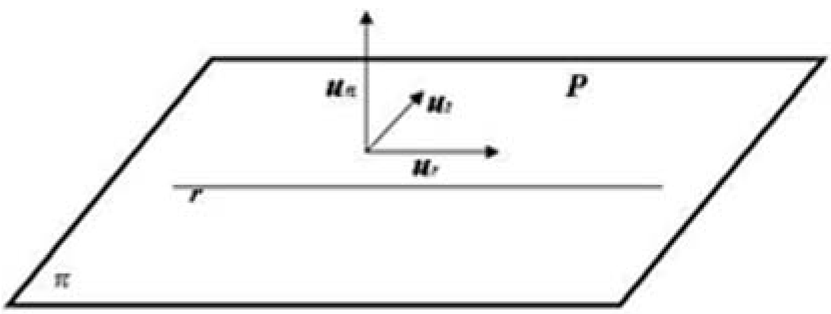
$$\left.\begin{array}{c} |A|=0 \text{ y } \left|\begin{array}{rr} 1 & 2\\ 1 & -2\end{array}\right| = -4\Longrightarrow \text{Rango}(A)=2\\ \\ F_3=F_1+F_2\Longrightarrow \text{Rango}(\overline{A})=2\end{array}\right\}\Longrightarrow$$

  Rango(A) =Rango$(\overline{A})=2<$ n$^{\text{o}}$ de incógnitas $\Longrightarrow$ Sistema Compatible Indeterminado.

  El plano π y la recta r tienen infinitos puntos comunes y, por tanto, la recta está contenida en el plano.

b) Para que el enuciado tenga sentido es necesario que el punto P esté en el plano π, basta sustituir el punto en el plano para comprobarlo.

El vector $\overrightarrow{u_t}$ de la recta t que buscamos tiene que ser perpendicular



al vector característico del plano $\overrightarrow{u_\pi}=(1,2,-1)$ y al vector director $\overrightarrow{u_r}=(2,1,4)$ de la recta r. Luego:

$$\overrightarrow{u_t}=\overrightarrow{u_\pi}\times\overrightarrow{u_r}=\left|\begin{array}{rrr} i & j & k\\ 1 & 2 & -1\\ 2 & 1 & 4\end{array}\right|=3(3,-2,-1)$$

$$t : \begin{cases} \overrightarrow{u_t} = (3, -2, -1) \\ P(-2, 3, 2) \end{cases} \Longrightarrow t : \frac{x+2}{3} = \frac{y-3}{-2} = \frac{z-2}{-1}$$

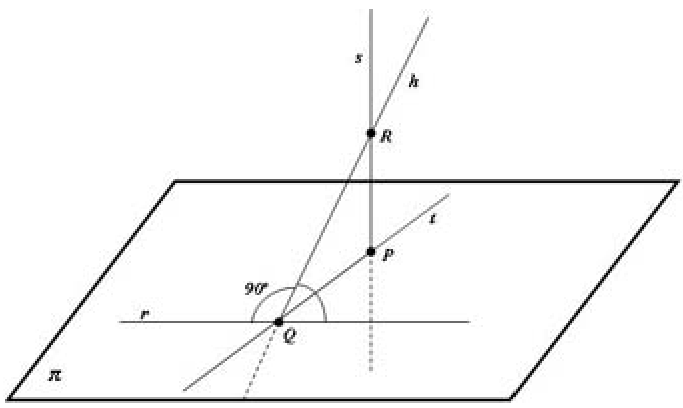
Evidentemente esta recta tiene que estar contenida en el plano π.

c) La situación geométrica es la siguiente:

Tenemos que encontrar una recta s perpendicular al plano π y que pase por el punto P

$$s : \begin{cases} \overrightarrow{u_\pi} = (1, 2, -1) \\ P(-2, 3, 2) \end{cases} \Longrightarrow s : \begin{cases} x = -2 + \lambda \\ y = 3 + 2\lambda \\ z = 2 - \lambda \end{cases}$$

Un punto cualquiera R de la recta s es $R(-2 + \lambda, 3 + 2\lambda, 2 - \lambda)$.



Ahora buscamos el punto de corte Q entre las rectas t y r

$$r : \begin{cases} x = 3 + 2\lambda \\ y = 2 + \lambda \\ z = 5 + 4\lambda \end{cases}, \quad t : \begin{cases} x = -2 + 3\mu \\ y = 3 - 2\mu \\ z = 2 - \mu \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 3 + 2\lambda = -2 + 3\mu \\ 2 + \lambda = 3 - 2\mu \\ 5 + 4\lambda = 2 - \mu \end{cases} \Longrightarrow$$

$$\begin{cases} \lambda = -1 \\ \mu = 1 \end{cases} \Longrightarrow Q(1, 1, 1)$$

Sólo nos queda por comprobar que los vectores $\overrightarrow{QR} = (-3 + \lambda, 2 + 2\lambda, 1 - \lambda)$ y $\overrightarrow{u_r} = (2, 1, 4)$ son siempre perpendiculares. Para ello calculamos su producto escalar y debe de ser cero independientemente del valor del parámetro λ

$$\overrightarrow{QR} \cdot \overrightarrow{u_r} = (-3+\lambda, 2+2\lambda, 1-\lambda) \cdot (2, 1, 4) = -6+2\lambda+2+2\lambda+4-4\lambda = 0$$

Luego la recta h que pasa por los puntos Q y R es siempre perpendicular a la recta r sea cual sea el punto R que tomemos de la recta s.

Problema 10.1.2 *(3 puntos)* Sea:

$$f(x) = \begin{cases} 1 - \dfrac{x^2}{4} & \text{si} \quad x < \dfrac{3}{2} \\ \\ \dfrac{7}{12}\left(1 - (x-2)^2\right) & \text{si} \quad x \ge \dfrac{3}{2} \end{cases}$$

a) (1 punto) Estudiar la continuidad y la derivabilidad de $f(x)$.

b) (1 punto) Hallar los máximos y mínimos locales de $f(x)$

c) (1 punto) Dibujar la gráfica de $f(x)$.

Solución:

a) (1 punto) Continuidad:

$$\lim_{x \longrightarrow (3/2)^-} f(x) = \lim_{x \longrightarrow (3/2)} \left(1 - \frac{x^2}{4}\right) = \frac{7}{16}$$

$$\lim_{x \longrightarrow (3/2)^+} f(x) = \lim_{x \longrightarrow (3/2)^+} \frac{7}{12}\left(1 - (x-2)^2\right) = \frac{7}{16}$$

$$f\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{7}{16}$$

Luego:

$$\lim_{x \longrightarrow (3/2)^-} f(x) = \lim_{x \longrightarrow (3/2)^+} f(x) = f\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{7}{16} \Longrightarrow$$

f es continua en $x = \dfrac{3}{2}$

Derivabilidad:

$$f'(x) = \begin{cases} -\dfrac{x}{2} & \text{si} \quad x < \dfrac{3}{2} \\ \\ \dfrac{-7(x-2)}{6} & \text{si} \quad x \ge \dfrac{3}{2} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} f'\left(\frac{3}{2}^-\right) = -\frac{3}{4} \\ f'\left(\frac{3}{2}^+\right) = \frac{7}{12} \end{cases}$$

Luego:

$$f'\left(\frac{3}{2}^-\right) \ne f'\left(\frac{3}{2}^+\right)$$

La función no es derivable en $x = 3/2$

b) Estudiamos su representación gráfica

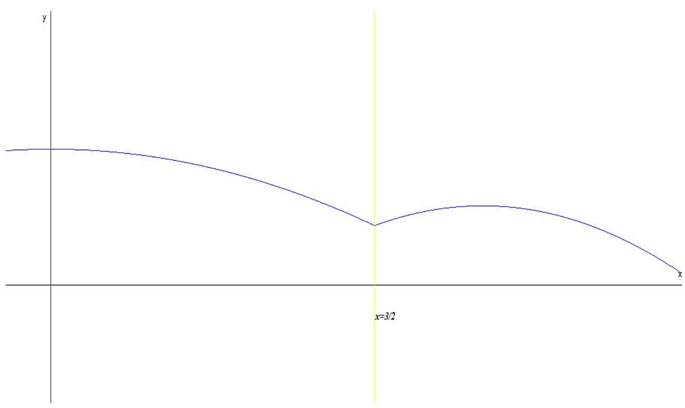
Primero los extremos

$$f'(x) = \begin{cases} -\dfrac{x}{2} = 0 & \text{si} \quad x < \dfrac{3}{2} \\[2ex] \dfrac{-7(x-2)}{6} = 0 & \text{si} \quad x \geq \dfrac{3}{2} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = 0 & \text{si} \quad x < \dfrac{3}{2} \\[2ex] x = 2 & \text{si} \quad x \geq \dfrac{3}{2} \end{cases}$$

Recurrimos a la segunda derivada para ver de que tipo son

$$f''(x) = \begin{cases} -\dfrac{1}{2} \Longrightarrow \text{Máximo} & \text{si} \quad x < \dfrac{3}{2} \\[2ex] \dfrac{-7}{6} \Longrightarrow \text{Máximo} & \text{si} \quad x \geq \dfrac{3}{2} \end{cases}$$

x	$f(x)$
0	1
3/2	7/16
2	7/12



Problema 10.1.3 *(2 puntos)* Dado el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x- & y = & 3 \\ 2x- & 3y = & 2k \\ 3x- & 5y = & k \end{cases}$$

a) (1 punto) Discutirlo según los distintos valores del parámetro k.

b) (1 punto) Resolverlo en los casos en que sea posible.

Solución:

a)

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{rr|r} 1 & -1 & 3\\ 2 & -3 & 2k\\ 3 & -5 & k \end{array}\right)$$

$$|\overline{A}|=3(k-1)=0\Longrightarrow k=1$$

Como el menor $\left|\begin{array}{rr} 1 & -1\\ 2 & -3 \end{array}\right|=-1\neq 0\Longrightarrow$ el Rango$(A)=2$ independientemente del valor de k.

Si $k\neq 1\Longrightarrow|\overline{A}|\neq 0\Longrightarrow$ Rango$(\overline{A})=3\neq$Rango$(A)=2=$ n^o de incógnitas y el sistema es Incompatible, es decir, no tiene solución.

Si $k=1$:

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{rr|r} 1 & -1 & 3\\ 2 & -3 & 2\\ 3 & -5 & 1 \end{array}\right),\ |\overline{A}|=0 \text{ y } \left|\begin{array}{rr} 1 & -1\\ 2 & -3 \end{array}\right|=-1\neq 0\Longrightarrow \text{Rango}(\overline{A})=2$$

Luego en este caso Rango$(A)=$Rango$(\overline{A})=2=$ n^o de incógnitas $\Longrightarrow$ Sistema Compatible Determinado, es decir, tiene solución única.

b)

$$\left\{\begin{array}{rrr} x- & y= & 3\\ 2x- & 3y= & 2 \end{array}\right.\Longrightarrow\left\{\begin{array}{l} x=7\\ y=4 \end{array}\right.$$

Problema 10.1.4 *(2 puntos)* Resolver la ecuación:

$$\left|\begin{array}{ccc} 2(x^2-1) & x+1 & (x+1)^2\\ x-1 & x+1 & x+1\\ (x-1)^2 & x-1 & x^2-1 \end{array}\right|=0$$

Solución:

$$\left|\begin{array}{ccc} 2(x^2-1) & x+1 & (x+1)^2\\ x-1 & x+1 & x+1\\ (x-1)^2 & x-1 & x^2-1 \end{array}\right|=(x+1)(x-1)\left|\begin{array}{ccc} 2(x-1) & 1 & x+1\\ x-1 & x+1 & x+1\\ x-1 & 1 & x+1 \end{array}\right|=$$

$$(x+1)^2(x-1)\left|\begin{array}{ccc} 2(x-1) & 1 & 1\\ x-1 & x+1 & 1\\ x-1 & 1 & 1 \end{array}\right|=\left[\begin{array}{c} F_1\\ F_2-F_1\\ F_3-F_1 \end{array}\right]=(x+1)^2(x-1)\left|\begin{array}{ccc} 2(x-1) & 1 & 1\\ -(x-1) & x & 0\\ -(x-1) & 0 & 0 \end{array}\right|=$$

$$(x+1)^2(x-1)^2\left|\begin{array}{ccc} 2 & 1 & 1\\ -1 & x & 0\\ -1 & 0 & 0 \end{array}\right|=-(x^2-1)^2\left|\begin{array}{cc} 1 & 1\\ x & 0 \end{array}\right|=x(x^2-1)^2=0\Longrightarrow x=\pm 1$$

10.2. Modelo 2009 - Opción B

Problema 10.2.1 *(3 puntos)* Dados el punto $P(1,-1,2)$ y el plano π : $2x-y+z=11$, se pide:

a) (1,5 puntos) Determinar el punto Q de intersección del plano π con la recta perpendicular a π que pasa por P. Hallar el punto simétrico del punto P respecto del plano π.

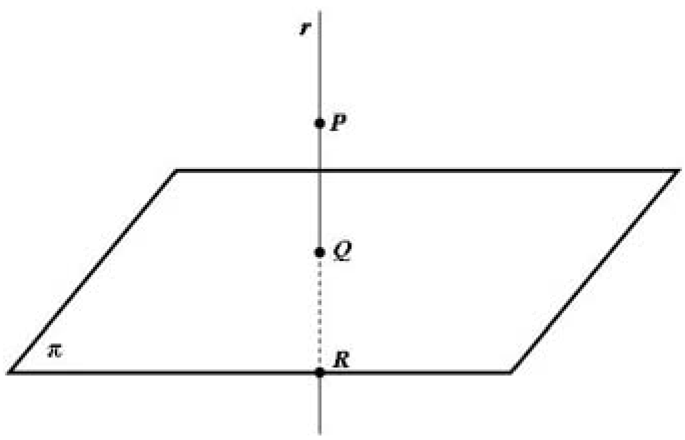
b) (1,5 puntos) Obtener la ecuación del plano paralelo al plano π que contiene al punto H que se encuentra a $5\sqrt{6}$ unidades del punto P en el sentido del vector $\overrightarrow{PQ}$.

Solución:

a) Tenemos

$$r:\left\{\begin{array}{l}\overrightarrow{u_r}=\overrightarrow{u_\pi}=(2,-1,1)\\ P_r=P(1,-1,2)\end{array}\right. \Longrightarrow r:\left\{\begin{array}{l}x=1+2\lambda\\ y=-1-\lambda\\ z=2+\lambda\end{array}\right.$$

Sustituyendo en el plano tenemos



$$2(1+2\lambda)-(-1-\lambda)+(2+\lambda)-11=0 \Longrightarrow \lambda=1$$

Sustituyendo este valor en r tenemos $Q(3,-2,3)$.

El punto Q es el punto medio entre P y el punto R que buscamos

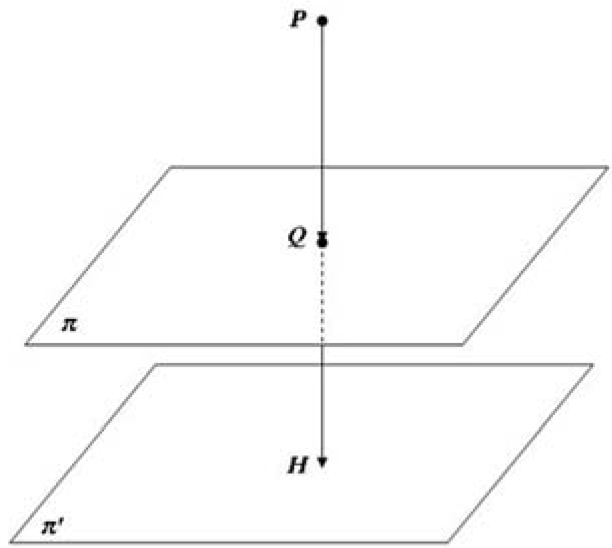
$$Q=\frac{P+R}{2} \Longrightarrow R=2Q-P=2(3,-2,3)-(1,-1,2)=(5,-3,4)$$

Luego $R(5,-3,4)$ es el punto simétrico de P respecto del plano π.

b) El vector $\overrightarrow{PQ} = (2, -1, 1) = \overrightarrow{u_\pi}$ y es perpedicular al plano π. Tenemos

$$H = P + \lambda \cdot \overrightarrow{u_\pi} \Longrightarrow \overrightarrow{PH} = -\lambda \cdot \overrightarrow{u_\pi} \Longrightarrow$$
$$|\overrightarrow{PH}| = \lambda |\overrightarrow{u_\pi}| = \lambda\sqrt{6} = 5\sqrt{6} \Longrightarrow \lambda = 5$$

Luego el punto $H = (1, -1, 2) + 5(2, -1, 1) = (11, -6, 7)$. El plano π' que buscamos contiene a este punto y tiene el mismo vector característico que π



$$\pi' : 2x - y + z = \lambda \Longrightarrow 22 + 6 + 7 = \lambda \Longrightarrow \lambda = 35 \Longrightarrow 2x - y + z = 35$$

Nota: Podemos comprobar si $d(P, \pi') = 5\sqrt{6}$:

$$d(P, \pi') = \frac{|2 + 1 + 2 - 35|}{\sqrt{6}} = \frac{30}{\sqrt{6}} = 5\sqrt{6}$$

y también podemos comprobar que

$$|\overrightarrow{PQ}| = \sqrt{4 + 1 + 1} = \sqrt{6} \text{ y } |\overrightarrow{QH}| = \sqrt{64 + 16 + 16} = 4\sqrt{6}$$

La suma de ambos módulos nos vuelve a dar $5\sqrt{6}$.

Problema 10.2.2 *(3 puntos)* Si $A = (C_1, C_2, C_3)$ es una matriz cuadrada de orden 3 con columnas C_1, C_2, C_3, y se sabe que $det(A) = 4$, se pide:

a) (1 punto) Calcular $det(A^3)$ y $det(3A)$.

b) (2 puntos) Calcular $det(B)$ y $det(B^{-1})$, siendo $B = (2C_3, C_1 - C_2, 5C_1)$ la matriz cuyas columnas son:

$$2C_3, C_1 - C_2, 5C_1$$

Solución:

a)
- $|A^3| = |A| \cdot |A| \cdot |A| = 4^3 = 64$
- $|3A| = |(3C_1, 3C_2, 3C_3)| = 3^3|A| = 27 \cdot 4 = 108$

b)
- $|B| = |(2C_3, C_1 - C_2, 5C_1)| = -10|(C_1, C_1 - C_2, C_3)| =$

  $= -10\left[(C_1, C_1, C_3) - (C_1, C_2, C_3)\right] = 10|A| = 40$
- Si $|B \cdot B^{-1}| = 1 \Longrightarrow |B| \cdot |B^{-1}| = 1 \Longrightarrow |B^{-1}| = \dfrac{1}{|B|} = \dfrac{1}{40}$

Problema 10.2.3 *(2 puntos)* Sea:

$$f(x) = \frac{|x|}{x^2+1}$$

a) (1 punto) Estudiar la continuidad y la derivabilidad de f en $x = 0$.

b) (1 punto) Estudiar cuándo se verifica que $f'(x) = 0$. Puesto que $f(1) = f(-1)$, ¿existe contradicción con el teorema de Rolle en el intervalo $[-1, 1]$?

Solución:

$$f(x) = \frac{|x|}{x^2+1} = \begin{cases} -\frac{x}{x^2+1} & \text{si} \quad x < 0 \\ \frac{x}{x^2+1} & \text{si} \quad x \geq 0 \end{cases}$$

a) Continuidad:

$$\lim_{x \longrightarrow 0)^-} f(x) = \lim_{x \longrightarrow 0} \left(-\frac{x}{x^2+1}\right) = 0$$

$$\lim_{x \longrightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \longrightarrow 0^+} \left(\frac{x}{x^2+1}\right) = 0$$

$$f(0) = 0$$

Luego:

$$\lim_{x \longrightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \longrightarrow 0^+} f(x) = f(0) = 0 \Longrightarrow$$

f es continua en $x = 0$

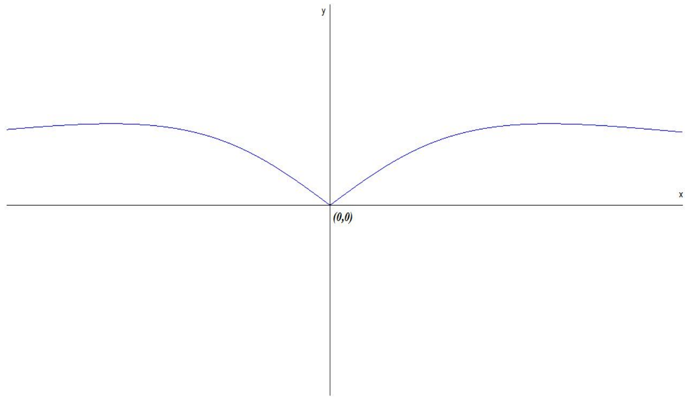
Derivabilidad:

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-1}{(x^2+1)^2} & \text{si} \quad x < 0 \\[2ex] \dfrac{1-x^2}{(x^2+1)^2} & \text{si} \quad x \geq 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} f'(0^-) = -1 \\ f'(0^+) = 1 \end{cases}$$

Luego:

$$f'(0^-) \neq f'(0^+)$$

La función no es derivable en $x = 0$



b) Para que se cumplan las hipótesis del teorema de Rolle la función debe ser continua en el intervalo $(-1, 1)$ y derivable en el intervalo $[-1, 1]$, lo cual no es cierto según el apartado anterior.

Problema 10.2.4 *(3 puntos)* Sea

$$f(x) = \begin{cases} (x-1)^2 & \text{si} \quad x \leq 1 \\ \ln x & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}$$

donde $\ln x$ significa logaritmo neperiano de x. Hallar el área de la región acotada limitada por la gráfica de $f(x)$, y por la recta $y = 1$.

Solución:

- Comprobamos si hay continuidad en el punto $x = 1$

$$\lim_{x \longrightarrow 1)^-} f(x) = \lim_{x \longrightarrow 1} \left((x-1)^2\right) = 0$$

$$\lim_{x \longrightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \longrightarrow 1^+} (\ln x) = 0$$

$$f(1) = 0$$

Luego:

$$\lim_{x \longrightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \longrightarrow 1^+} f(x) = f(1) = 0 \Longrightarrow$$

f es continua en $x = 1$

- Calculamos los puntos de corte de $f(x)$ con $y=1$

$$\left\{\begin{array}{lll}(x-1)^2=1 & \text{si} & x\le 1\\ \ln x=1 & \text{si} & x>1\end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{lll}x=0 & \text{si} & x\le 1\\ x=e & \text{si} & x>1\end{array}\right.$$

- Calculamos el área:

$$S=|S_1|+|S_2|$$

Resolvemos las integrales por separado

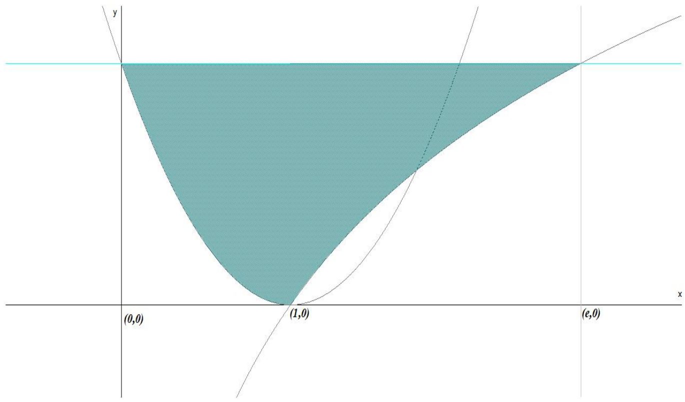
$$S_1=\int_0^1(1-(x-1)^2)dx=-\frac{x^3}{3}+x^2\Big]_0^1=\frac{2}{3}\Longrightarrow |S_1|=\frac{2}{3}$$

La siguiente integral se resuelve por partes $u=\ln x\Longrightarrow u'=dx/x$ y $dv=dx\Longrightarrow v=x$

$$\int(1-\ln x)dx=x-\left(x\ln x-\int dx\right)=2x-x\ln x$$

$$S_2=\int_1^e(1-\ln x)dx=2x-x\ln x]_1^e=e-2\Longrightarrow |S_2|=e-2$$

$$S=\frac{2}{3}+e-2=e-\frac{4}{3}u^2$$



10.3. Junio 2009 - Opción A

Problema 10.3.1 *(3 puntos)* Dado el plano $\pi: x+3y+z=4$, se pide:

a) (1 punto) Calcular el punto simétrico P del punto $O(0,0,0)$ respecto del plano π.

b) (1 punto) Calcular el coseno del ángulo α que forman el plano π y el plano $z=0$.

c) (1 punto) Calcular el volumen del tetraedro T determinado por el plano π, y los planos $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$.

Solución:

a) Tres pasos:

- Calculo $r \perp \pi$ que pasa por $O(0,0,0)$:

$$r : \begin{cases} \overrightarrow{u_r} = (1,3,1) \\ P_r(0,0,0) \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = \lambda \\ y = 3\lambda \\ z = \lambda \end{cases}$$

- Calculo el punto de corte Q de π con r:

$$\lambda + 3(3\lambda) + \lambda = 4 \Longrightarrow \lambda = \frac{4}{11} \Longrightarrow Q\left(\frac{4}{11}, \frac{12}{11}, \frac{4}{11}\right)$$

- P es el punto simétrico de O respecto de Q:

$$\frac{P+O}{2} = Q \Longrightarrow P = 2Q - O = \left(\frac{8}{11}, \frac{24}{11}, \frac{8}{11}\right)$$

b)

$$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{11}} = \frac{\sqrt{11}}{11}$$

c) Si $y = 0$, $z = 0 \Longrightarrow A(4,0,0)$
Si $x = 0$, $z = 0 \Longrightarrow B(0,4/3,0)$
Si $x = 0$, $y = 0 \Longrightarrow C(0,0,4)$

$$\overrightarrow{OA} = (4,0,0), \quad \overrightarrow{OB} = (0,4/3,0), \quad \overrightarrow{OC} = (0,0,4)$$

$$V = \frac{1}{6}\left|\begin{vmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4/3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix}\right| = \frac{32}{9}\ u^2$$

Problema 10.3.2 *(3 puntos)* Dado el sistema:

$$\begin{cases} 4x+ & 4\lambda y+ & 2z = & 2\lambda \\ \lambda x+ & y- & \lambda z = & \lambda \\ 4\lambda x+ & 4\lambda y+ & \lambda z = & 9 \end{cases},$$

Se pide:

a) (2 puntos) Discutir el sistema según los valores del parámetro λ.

b) (1 punto) Resolver el sistema para $\lambda = -1$.

Solución:

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{rrr|r} 4 & 4\lambda & 2 & 2\lambda\\ \lambda & 1 & -\lambda & \lambda\\ 4\lambda & 4\lambda & \lambda & 9 \end{array}\right) \quad |A|=-4\lambda(5\lambda^2-6\lambda+1)=0 \Longrightarrow \lambda=0 \;\; \lambda=1 \;\; \lambda=\frac{1}{5}$$

- Si $\lambda\neq 0$ y $\lambda\neq 1$ y $k\neq 1/5 \Longrightarrow |A|\neq 0 \Longrightarrow$Rango$(A)=$Rango$(\overline{A})=3=n^{\text{o}}$ de incógnitas, luego en este caso el sistema será compatible determinado.

- Si $\lambda=0$
$$\overline{A}=\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 0 & 2 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 9 \end{array}\right)$$
Como $|A|=0$ y $\begin{vmatrix} 4 & 0\\ 0 & 1 \end{vmatrix}=4\neq 0 \Longrightarrow$ Rango$(A)=2$.
Como
$$\begin{vmatrix} 0 & 2 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 9 \end{vmatrix}=-18\neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(\overline{A})=3$$
Luego el sistema es incompatible.

- Si $\lambda=1$
$$\overline{A}=\left(\begin{array}{ccr|c} 4 & 4 & 2 & 2\\ 1 & 1 & -1 & 1\\ 4 & 4 & 1 & 9 \end{array}\right) \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} \text{Rango}(\overline{A})=3\\ \text{Rango}(A)=2 \end{array}\right. \Longrightarrow$$
Sistema es Incompatible.

- Si $\lambda=1/5$
$$\overline{A}=\left(\begin{array}{rrr|r} 4 & 4/5 & 2 & 2/5\\ 1/5 & 1 & -1/5 & 1/5\\ 4/5 & 4/5 & 1/5 & 9 \end{array}\right) \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} \text{Rango}(\overline{A})=3\\ \text{Rango}(A)=2 \end{array}\right. \Longrightarrow$$
Sistema es Incompatible.

Si $\lambda = -1$

$$\left\{\begin{array}{rrrr} 4x- & 4y+ & 2z = & -2 \\ -x+ & y+ & z = & -1 \\ -4x- & 4y- & z = & 9 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = -1 \\ y = -1 \\ z = -1 \end{array}\right.$$

Problema 10.3.3 *(2 puntos)* Calcular el siguiente límite:

$$\lim_{x\longrightarrow +\infty}\left(1+\frac{1}{\alpha x^2+4x+8}\right)^{(x+1)}$$

según los valores del parámetro α

Solución:

$$\lim_{x\longrightarrow +\infty}\left(1+\frac{1}{\alpha x^2+4x+8}\right)^{(x+1)} = [1^\infty] = e^\lambda$$

$$\lambda = \lim_{x\longrightarrow +\infty}(x+1)\left(1+\frac{1}{\alpha x^2+4x+8}-1\right) = \lim_{x\longrightarrow +\infty}\left(\frac{x+1}{\alpha x^2+4x+8}\right)$$

Si $\alpha = 0 \Longrightarrow \lambda = \dfrac{1}{4} \Longrightarrow$:

$$\lim_{x\longrightarrow +\infty}\left(1+\frac{1}{4x+8}\right)^{(x+1)} = e^{1/4}$$

Si $\alpha \neq 0 \Longrightarrow \lambda = 0 \Longrightarrow$:

$$\lim_{x\longrightarrow +\infty}\left(1+\frac{1}{\alpha x^2+4x+8}\right)^{(x+1)} = e^0 = 1$$

Problema 10.3.4 *(2 puntos)* Calcular la integral:

$$F(x) = \int_0^x t^2\, e^{-t}\, dt$$

Solución:

Se trata de una integral que se resuelve por partes:

$$\left(u = t^2 \Longrightarrow du = 2tdt; \quad dv = e^{-t}\, dt \Longrightarrow v = -e^{-t}\right)$$

$$\int t^2\, e^{-t}\, dt = -t^2e^{-t} + 2\int te^{-t}\, dt =$$

$$\left(u = t \Longrightarrow du = dt; \quad dv = e^{-t}\, dt \Longrightarrow v = -e^{-t}\right)$$

$$= -t^2e^{-t}+2\left[-te^{-t}+\int e^{-t}\, dt\right] = -t^2e^{-t}+2\left[-te^{-t}-e^{-t}\right] = -e^{-t}\left(t^2+2t+2\right)$$

$$F(x) = \int_0^x t^2\, e^{-t}\, dt = -e^{-t}\left(t^2+2t+2\right)\Big]_0^x = -e^{-x}(x^2+2x+2)+2$$

10.4. Junio 2009 - Opción B

Problema 10.4.1 *(3 puntos)* Dadas las rectas:

$$r : \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{3} = \frac{z}{1}, \quad s : \frac{x+2}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z-2}{1},$$

se pide:

a) (1 punto) Hallar la ecuación del plano π que contiene a r y es paralelo a s.

b) (1 punto) Determinar la distancia entre las rectas r y s.

c) (1 punto) Estudiar si la recta t paralela a r y que pasa por $O(0,0,0)$ corta a la recta s.

Solución:

a)

$$r : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_r} = (2,3,1) \\ P_r(1,2,0) \end{array} \right. , \quad s : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_s} = (2,1,1) \\ P_s(-2,0,2) \end{array} \right. \Longrightarrow \pi : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_r} = (2,3,1) \\ \overrightarrow{u_s} = (2,1,1) \\ P_r(1,2,0) \end{array} \right.$$

$$\pi : \left| \begin{array}{ccc} 2 & 2 & x-1 \\ 3 & 1 & y-2 \\ 1 & 1 & z \end{array} \right| = 0 \Longrightarrow x - 2z - 1 = 0$$

b) $\overrightarrow{P_rP_s} = (-3,-2,2)$:

$$\left| \left[\overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_s}, \overrightarrow{P_rP_s} \right] \right| = | \left| \begin{array}{ccc} 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ -3 & -2 & 2 \end{array} \right| | = |-14| = 14$$

$$|\overrightarrow{u_r} \times \overrightarrow{u_s}| = | \left| \begin{array}{ccc} i & j & k \\ 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{array} \right| | = |(2,0,-4)| = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$$

$$d(r,s) = \frac{\left| \left[\overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_s}, \overrightarrow{P_rP_s} \right] \right|}{|\overrightarrow{u_r} \times \overrightarrow{u_s}|} = \frac{14}{2\sqrt{5}} = \frac{7\sqrt{5}}{5} \ u$$

c)

$$t : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_t} = (2,3,1) \\ P_t(0,0,0) \end{array} \right. \quad s : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_s} = (2,1,1) \\ P_s(-2,0,2) \end{array} \right. \Longrightarrow \overrightarrow{P_tP_s} = (-2,0,2)$$

$$\left| \begin{array}{ccc} 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \end{array} \right| = -12 \Longrightarrow \text{Se cruzan}$$

Problema 10.4.2 *(3 puntos)* Si la derivada de la función $f(x)$ es:

$$f'(x) = (x-1)^3(x-5)$$

Obtener:

a) (1 punto) Los intervalos de crecimiento y decrecimiento de f.

b) (1 punto) Los valores de x en los cuales f tiene máximos relativos, mínimos relativos, o puntos de inflexión.

c) (1 punto) La función f sabiendo que $f(0) = 0$

Solución:

a)

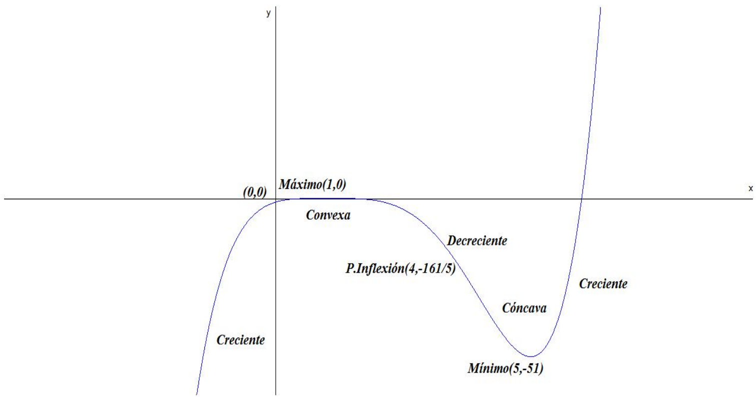
	$(-\infty, 1)$	$(1, 5)$	$(5, \infty)$
$f'(x)$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	Creciente $\nearrow$	Decreciente $\searrow$	Creciente $\nearrow$

b) En $x = 1$ hay un máximo y en $x = 5$ hay un mínimo. Para calcular los puntos de inflexión calculamos la segunda derivada:

$$f''(x) = 4(x-4)(x-1)^2$$

$f''(x) = 0 \Longrightarrow x = 4$ y $x = 1$. El único posible punto de inflexión es $x = 4$ ya que en $x = 1$ hay un máximo:

	$(-\infty, 1)$	$(1, 4)$	$(4, \infty)$
$f''(x)$	$-$	$-$	$+$
$f(x)$	Convexa$\cap$	Convexa$\cap$	Cóncava$\cup$



c)

$$f(x) = \int \left[x^4 - 8x^3 + 18x^2 - 16x + 5\right] dx = \frac{x^5}{5} - 2x^4 + 6x^3 - 8x^2 + 5x + C$$

$$f(0) = 0 + C = 0 \Longrightarrow C = 0$$

$$f(x) = \frac{x^5}{5} - 2x^4 + 6x^3 - 8x^2 + 5x$$

Problema 10.4.3 *(2 puntos)* Dado el sistema:

$$\begin{cases} 2x - y = \lambda \\ \lambda x - 2y = 4 \\ 3x - y = 2 \end{cases}$$

a) (1,5 puntos) Discutir el sistema según los valores del parámetro λ

b) (0,5 punto) Resolver el sistema cuando sea posible

Solución:

a)

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & \lambda \\ \lambda & -2 & 4 \\ 3 & -1 & 2 \end{array} \right) \quad |\overline{A}| = -(\lambda - 2)(\lambda - 6) = 0 \Longrightarrow \lambda = 2 \;\; \lambda = 6$$

- Si $\lambda \neq 2$ y $\lambda \neq 6 \Longrightarrow |\overline{A}| \neq 0 \Longrightarrow$Rango($A$) $\neq$Rango($\overline{A}$) luego en este caso el sistema será Incompatible.

- Si $\lambda = 2$

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 4 \\ 3 & -1 & 2 \end{array} \right) \Longrightarrow \begin{cases} \text{Rango}(\overline{A}) = 2 \\ \text{Rango}(A) = 2 \end{cases} \Longrightarrow$$

Sistema es Compatible Determinado.

- Si $\lambda = 6$

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & 6 \\ 6 & -2 & 4 \\ 3 & -1 & 2 \end{array} \right) \Longrightarrow \begin{cases} \text{Rango}(\overline{A}) = 2 \\ \text{Rango}(A) = 2 \end{cases} \Longrightarrow$$

Sistema Compatible Determinado.

b) Cuando $\lambda = 2$:

$$\begin{cases} 2x - y = 2 \\ 2x - 2y = 4 \\ 3x - y = 2 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = -2 \end{cases}$$

Cuando $\lambda = 6$:

$$\left\{\begin{array}{l} 2x - y = 6 \\ 6x - 2y = 4 \\ 3x - y = 2 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = -4 \\ y = -14 \end{array}\right.$$

Problema 10.4.4 *(2 puntos)* Dada la matriz:

$$A = \left(\begin{array}{ccc} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{array}\right)$$

se pide:

a) (1 punto) Estudiar el rango de A según los distintos valores del parámetro a.

b) (1 punto) Obtener la matriz inversa de A para $a = -1$

Solución:

a) $A = a^3 - 3a + 2 = 0 \Longrightarrow a = 1, \ \ a = -2$

Si $a \neq 1$ y $a \neq -2 \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow$ Rango$(A) = 3$.

Si $a = 1$:

$$A = \left(\begin{array}{ccc} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 1$$

Si $a = -2$:

$$A = \left(\begin{array}{rrr} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{array}\right) \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 2$$

b) Si $a = -1$:

$$A = \left(\begin{array}{rrr} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{array}\right) \Longrightarrow A^{-1} = \left(\begin{array}{rrr} 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \end{array}\right)$$

10.5. Septiembre 2009 - Opción A

Problema 10.5.1 *(3 puntos)* Dada la matriz:

$$M = \left(\begin{array}{ccr} m & 1 & 2m \\ m & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{array}\right);$$

a) (1,25 puntos) Determinar los valores del prámetro m para los cuales la matriz M es invertible.

b) (0,5 puntos) Determinar los valores del parámetro m para los cuales la matriz M^{25} es invertible.

c) (1,25 puntos) Para $m = -1$ calcular, si es posible, la matriz inversa M^{-1} de M.

Solución:

a) $|M| = 2m(m-1) = 0 \Longrightarrow m = 0, \ \ m = 1.$

Si $m \neq 0$ y $m \neq 1 \Longrightarrow$ existe M^{-1}.

Si $m = 0$ o $m = 1 \Longrightarrow$ no existe M^{-1}.

b) M^{25} no es inversible si $|M^{25}| = 0 \Longrightarrow |M|^{25} = 0 \Longrightarrow |M| = 0$. Luego M^{25} es inversible si $m \neq 0$ y $m \neq 1$

c)

$$M = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow M^{-1} = \begin{pmatrix} -1/4 & -3/4 & 1 \\ 1/4 & -1/4 & 1 \\ -1/4 & 1/4 & 0 \end{pmatrix}$$

Problema 10.5.2 *(3 puntos)* Dada la función:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\ln(1+ax) - bx}{x^2} & \text{si} \quad 1 + ax > 0 \ \text{ y } \ x \neq 0 \\ \\ -\dfrac{1}{2} & \text{si} \qquad\qquad x = 0 \end{cases},$$

Se pide:

a) (1,5 puntos) Hallar los valores de los parámetros a, b para los cuales la función f es continua en $x = 0$.

b) (1,5 puntos) Para $a = b = 1$, estudiar si la función f es derivable en $x = 0$ aplicando la definición de derivada.

Solución:

a)

$$\lim_{x \longrightarrow 0} \frac{\ln(1+ax) - bx}{x^2} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x \longrightarrow 0} \frac{a - b - abx}{2x + 2ax^2}$$

Si $a \neq b$ este límite no tiene solución, por tanto continuamos con la condición de que $a = b$:

$$\lim_{x \longrightarrow 0} \frac{a - b - abx}{2x + 2ax^2} = \lim_{x \longrightarrow 0} \frac{-a^2 x}{2x + 2ax^2} = -\frac{a^2}{2} = -\frac{1}{2} \Longrightarrow a = b = \pm 1$$

b) Si $a = b = 1$

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\ln(1+x) - x}{x^2} & \text{si} \quad 1 + x > 0 \text{ y } x \neq 0 \\ \\ -\dfrac{1}{2} & \text{si} \qquad\qquad x = 0 \end{cases}$$

La definición de derivada en el punto 0 es

$$f'(0) = \lim_{h \longrightarrow 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h}$$

$$f(0+h) = \frac{\ln(1+h) - h}{h^2}, \quad f(0) = -\frac{1}{2}$$

$$f'(0) = \lim_{h \longrightarrow 0} \frac{\frac{\ln(1+h)-h}{h^2} + \frac{1}{2}}{h} = \lim_{h \longrightarrow 0} \frac{\ln(1+h) - h + h^2}{2h^3} = \left[\frac{0}{0}\right] =$$

$$\lim_{h \longrightarrow 0} \frac{\frac{1}{1+h} - 1 + 2h}{6h^2} = \lim_{h \longrightarrow 0} \frac{1 + 2h}{6h + 6h^2} = \left[\frac{1}{0}\right] = \pm\infty$$

Luego no es derivable en el punto $x = 0$.

Problema 10.5.3 *(2 puntos)* Dadas las rectas:

$$r : \frac{x}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z}{a}, \quad s : \frac{x-3}{b} = \frac{y}{1} = \frac{z-3}{-1},$$

determinar los valores de los parámetros a, b para los cuales las rectas r, s se cortan perpendicularmente.

Solución:

$$r : \begin{cases} \overrightarrow{u_r} = (1, 2, a) \\ P_r(0, 0, 0) \end{cases}, \quad s : \begin{cases} \overrightarrow{u_s} = (b, 1, -1) \\ P_s(3, 0, 3) \end{cases}, \quad \overrightarrow{P_rP_s} = (3, 0, 3)$$

Si r y s son perpendiculares:

$\overrightarrow{u_r} \perp \overrightarrow{u_s} \Longrightarrow \overrightarrow{u_r} \cdot \overrightarrow{u_s} = 0 \Longrightarrow -a + b = -2$

Si r y s se cortan:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & a \\ b & 1 & -1 \\ 3 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 0 \Longrightarrow a + 2b = -1$$

$$\begin{cases} -a + b = -2 \\ a + 2b = -1 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ ab + 2b = -1 \end{cases}$$

Problema 10.5.4 *(2 puntos)* Dado el plano $\pi : 2x - y + 2z + 1 = 0$ hallar las ecuaciones de los planos paralelos a π que se encuentran a 3 unidades de π.

Solución:

La ecuación de un plano paralelo a π es $\pi' : 2x - y + 2z + \lambda = 0$ y un plano del plano π puede ser $P(0, 1, 0)$ y tendremos que $d(P, \pi') = 3$:

$$d(P, \pi') = \frac{|0 - 1 + 0 + \lambda|}{3} = \frac{|\lambda - 1|}{3} = 3 \Longrightarrow |\lambda - 1| = 9$$

$$\left\{ \begin{array}{l} -\lambda + 1 = 9 \Longrightarrow \lambda = -8 \Longrightarrow \pi' : 2x - y + 2z - 8 = 0 \\ \lambda - 1 = 9 \Longrightarrow \lambda = 10 \Longrightarrow \pi' : 2x - y + 2z + 10 = 0 \end{array} \right.$$

10.6. Septiembre 2009 - Opción B

Problema 10.6.1 *(3 puntos)*

a) (1 punto) Dada la función:

$$f(x) = \frac{x}{1 - x^2},$$

hallar el punto o los puntos de la gráfica de $f(x)$ en los que la pendiente de la recta tangente sea 1.

b) (0,5 puntos) Hallar la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en el punto $x = 0$.

c) (1,5 puntos) Sea g una función derivable con derivada continua en toda la recta real, y tal que $g(0) = 0$, $g(2) = 2$. Demostrar que existe al menos un punto c en el intervalo $(0, 2)$ tal que $g'(c) = 1$.

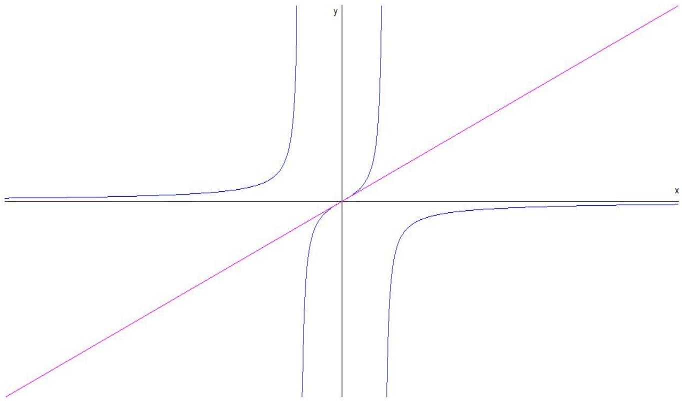
Solución:

a) La pendiente de la recta tangente es $m = 1$:

$$f'(x) = \frac{1 + x^2}{(1 - x^2)^2} = 1 \Longrightarrow x^4 - 3x^2 = 0 \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 0 \\ x = \pm\sqrt{3} \end{array} \right.$$

Los puntos serán: $(0, 0)$, $(\sqrt{3}, -\sqrt{3}/8)$ y $(-\sqrt{3}, \sqrt{3}/8)$

b) En $x = 0$ la recta tangente es $y = x$



c) Se cumplen las condiciones del Teorema del Valor Medio en el intervalo $[0,2]$ y por tanto $\exists c \in [0,2]$ que cumple

$$g'(c) = \frac{g(2) - g(0)}{2 - 0} = \frac{1}{1} = 1$$

Problema 10.6.2 *(3 puntos)* Dada la recta:

$$r : \frac{x-1}{1} = \frac{y}{-1} = \frac{z}{1}$$

y el plano $\pi : x + y - 2z + 1 = 0$, hallar la ecuación de la recta s simétrica de la recta r respecto del plano π.

Solución:

Calculamos el punto de corte de la recta r y el plano π, para ello calculamos la ecuación paramétrica de la recta y sustituimos en el plano:

$$r; \left\{ \begin{array}{l} x = 1 + \lambda \\ y = -\lambda \\ z = \lambda \end{array} \right. \Longrightarrow (1+\lambda) - \lambda - 2\lambda + 1 = 0 \Longrightarrow$$

$$\lambda = 1 \Longrightarrow P(2, -1, 1)$$

Ahora calculamos el punto simétrico de $P_r(1,0,0)$ respecto al plano π:

- Calculamos una recta t perpendicular π que pase por P_r:

$$t : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_t} = (1,1,-2) \\ P_t(1,0,0) \end{array} \right. \Longrightarrow t : \left\{ \begin{array}{l} x = 1 + \lambda \\ y = \lambda \\ z = -2\lambda \end{array} \right.$$

- Encontramos el punto de corte de t y π:

$$(1+\lambda) + \lambda - 2(-2\lambda) + 1 = 0 \Longrightarrow \lambda = -\frac{1}{3} \Longrightarrow P''\left(\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$$

- Calculamos el punto simétrico P' de P_r respecto de P'':

$$\frac{P_r + P'}{2} = P'' \Longrightarrow P' = 2P'' - P_r =$$

$$2\left(\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right) - (1,0,0) = \left(\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{4}{3}\right)$$

La recta s simétrica de r respecto de π pasa por los puntos P y P':

$$s : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{P'P} = (2,-1,1) - \left(\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{4}{3}\right) = \left(\frac{5}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3}(5,-1,-1) \\ \\ P(2,-1,1) \end{array} \right. \Longrightarrow$$

$$t : \left\{ \begin{array}{l} x = 2 + 5\lambda \\ y = -1 - \lambda \\ z = 1 - \lambda \end{array} \right.$$

Problema 10.6.3 *(2 puntos)* Dado el sistema:

$$\left\{ \begin{array}{l} \lambda x + 2y + z = 0 \\ \lambda x - y + 2z = 0 \\ x - \lambda y + 2z = 0 \end{array} \right. ,$$

se pide:

a) (1 punto) Obtener los valores de parámetro λ para los cuales el sistema tiene soluciones distintas de:

$$x = y = z = 0$$

b) (1 punto) Resolver el sistema para $\lambda = 5$.

Solución:

Se trata de un sistema homogéneo

a)

$$A = \left(\begin{array}{ccc} \lambda & 2 & 1 \\ \lambda & -1 & 2 \\ 1 & -\lambda & 2 \end{array} \right) \quad |A| = \lambda^2 - 6\lambda + 5 = 0 \Longrightarrow \lambda = 1 \;\; \lambda = 5$$

- Si $\lambda \neq 1$ y $\lambda \neq 5 \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow$Rango$(A) = 3 =n^{\text{o}}$ incógnitas luego en este caso el sistema será Compatible Determinado y la única solución es la trivial.

$$x = y = z = 0$$

- Si $\lambda = 1$ o $\lambda = 5 \Longrightarrow |A| = 0 \Longrightarrow$Rango$(A) = 2 <$nº incógnitas luego en este caso el sistema será Compatible Indeterminado y tendrá infinitas soluciones.

b) Cuando $\lambda = 5$:

$$\left\{\begin{array}{l} 5x + 2y + z = 0 \\ 5x - y + 2z = 0 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} 5x + 2y = -\lambda \\ 5x - y = -2\lambda \\ z = \lambda \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = -\dfrac{1}{3}\lambda \\ \\ y = \dfrac{1}{3}\lambda \\ \\ z = \lambda \end{array}\right.$$

Problema 10.6.4 *(2 puntos)* Dadas las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix},$$

obtener una matriz cuadrada X de orden 2 que verifique la ecuación matricial $AXB = A + B$

Solución:

$$AXB = A + B \Longrightarrow X = A^{-1}(A + B)B^{-1}$$

$$A + B = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & -4 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/6 & 1/3 \\ -1/6 & 2/3 \end{pmatrix}, \quad B^{-1} = \begin{pmatrix} -1/2 & -1 \\ -3/2 & -2 \end{pmatrix}$$

$$X = A^{-1}(A + B)B^{-1} = \begin{pmatrix} 1/6 & 1/3 \\ -1/6 & 2/3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 8 & -4 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1/2 & -1 \\ -3/2 & -2 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} -1/3 & -2/3 \\ -5/3 & -4/3 \end{pmatrix}$$

10.7. Septiembre 2009 - Opción A (Reserva)

Problema 10.7.1 *(3 puntos)* Dadas las rectas:

$$r : \frac{x - 1}{2} = \frac{y + 2}{3} = \frac{z - 2}{1}, \quad s : \frac{x + 2}{1} = \frac{y - 1}{2} = \frac{z - \lambda}{2}$$

se pide:

a) (1 punto) Determinar para qué valor, o valores, del parámetro λ las rectas r, s se cortan en un punto.

b) (1 punto) Para $\lambda = 23$ calcular las coordenadas del punto P intersección de las rectas r, s.

c) (1 punto) Para $\lambda = 23$ hallar la ecuación general del plano π determinado por las rectas r y s.

Solución:

a)

$$\left\{\begin{array}{rrcrr} 1+ & 2\alpha = & -2+ & \mu \\ -2+ & 3\alpha = & 1+ & 2\mu \\ 2+ & \alpha = & \lambda+ & 2\mu \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} \alpha = -9 \\ \mu = -15 \\ \lambda = 23 \end{array}\right. \Longrightarrow \lambda = 23$$

b) Sustituyendo los valores de λ, α y $\mu \Longrightarrow P(-17, -29, -7)$

c)

$$\pi : \left\{\begin{array}{l} \overrightarrow{u_r} = (2, 3, 1) \\ \overrightarrow{u_s} = (1, 2, 2) \\ P_r(1, -2, 2) \end{array}\right. \Longrightarrow \left|\begin{array}{ccc} 2 & 1 & x-1 \\ 3 & 2 & y+2 \\ 1 & 2 & z-2 \end{array}\right| = 0 \Longrightarrow \pi : 4x - 3y + z - 12 = 0$$

Problema 10.7.2 *(3 puntos)* Calcular las derivadas de las siguientes funciones:

a) (1 punto) $f(x) = (2x)^{3x}$.

b) (1 punto) $g(x) = \cos\dfrac{\pi}{8}$.

c) (1 punto) $h(x) = \displaystyle\int_{5\pi}^{6\pi} e^{\cos t}\, dt$.

Solución:

a) $f'(x) = 3(2x)^{3x}(1 + \ln(2x))$

b) $g'(x) = 0$

c)

$$s(x) = \int_{5\pi}^{x} e^{\cos t}\, dt \Longrightarrow s'(x) = e^{\cos x}$$

$$h(x) = s(6x) \Longrightarrow h'(x) = 6e^{\cos x}$$

Problema 10.7.3 *(2 puntos)* Dado el sistema:

$$\left\{\begin{array}{l} 2x - y = \sqrt{3} \\ 3x + 2z = 2\sqrt{5} \end{array}\right.$$

se pide:

a) (1 punto) Añadir, de forma razonada, una tercera ecuación para que el sistema resultante sea compatible determinado.

b) (1 punto) Añadir, de forma razonada, una tercera ecuación para que el sistema resultante sea compatible indeterminado.

Solución:

Añadimos una tercera ecuación:

$$\begin{cases} 2x - y = \sqrt{3} \\ 3x + 2z = 2\sqrt{5} \\ ax + by + cz = d \end{cases} \Longrightarrow \overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 0 & \sqrt{3} \\ 3 & 0 & 2 & 2\sqrt{5} \\ a & b & c & d \end{array} \right) \Longrightarrow |A| = -2a - 4b + 3c$$

a) Para que sea compatible determinado $|A| \neq 0$ y una solución posible puede ser $a = 2$, $b = 0$ y $c = 0$.

b) Para que sea compatible indeterminado $|A| = 0$, es decir, la fila $F_3 = \alpha F_1 + \beta F_2$:

$$\begin{cases} a = 2\alpha + 3\beta \\ b = -\alpha \\ c = 2\beta \\ d = \alpha\sqrt{3} + \beta 2\sqrt{5} \end{cases}$$

Bastaría tomar cualquier $\alpha \neq 0$ o cualquier $\beta \neq 0$, por ejemplo, si $\alpha \neq 0$ y $\beta = 1$ tenemos:

$$a = 3, b = 0, c = 2 \text{ y } d = 2\sqrt{5}$$

Problema 10.7.4 *(2 puntos)* Dadas las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Hallar una matriz X que verifique la ecuación matricial $XB = A + B$

Solución:

$$XB = A + B \Longrightarrow X = (A + B)B^{-1}$$

$$X = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 3 \\ 2 & 0 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -4 & -2 & -5 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 & -3 & 9 \\ -1 & 1 & 2 \\ 6 & 3 & -4 \end{pmatrix}$$

10.8. Septiembre 2009 - Opción B (Reserva)

Problema 10.8.1 *(3 puntos)* Se pide:

a) (1 punto) Demostrar que si tres vectores v_1, v_2 y v_3 son perpendiculares entre sí entonces se verifica que:

$$|\overrightarrow{v_1} + \overrightarrow{v_2} + \overrightarrow{v_3}|^2 = |\overrightarrow{v_1}|^2 + |\overrightarrow{v_2}|^2 + |\overrightarrow{v_3}|^2,$$

donde $|w|$ denota módulo del vector $\overrightarrow{w}$

b) (1 punto) Dados los vectores $\overrightarrow{v_1}(1,1,-1)$, $\overrightarrow{v_2} = (1,0,1)$ hallar un vector $\overrightarrow{v_3}$ tal que:

$$|\overrightarrow{v_1} + \overrightarrow{v_2} + \overrightarrow{v_3}|^2 = |\overrightarrow{v_1}|^2 + |\overrightarrow{v_2}|^2 + |\overrightarrow{v_3}|^2.$$

c) (1 punto) Dado el vector $\overrightarrow{v}(1,2,3)$, hallar los vectores $\overrightarrow{v_1}$ y $\overrightarrow{v_2}$ que cumplan las tres condiciones siguientes:

a) $\overrightarrow{v_1}$ tiene sus tres coordenadas iguales y no nulas;

b) $\overrightarrow{v_1}$ es perpendicular a $\overrightarrow{v_2}$;

c) $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{v_1} + \overrightarrow{v_2}$

Solución:

a)
$$|\overrightarrow{v_1} + \overrightarrow{v_2} + \overrightarrow{v_3}|^2 = (\overrightarrow{v_1} + \overrightarrow{v_2} + \overrightarrow{v_3})(\overrightarrow{v_1} + \overrightarrow{v_2} + \overrightarrow{v_3}) =$$
$$\overrightarrow{v_1}\overrightarrow{v_1}+\overrightarrow{v_1}\overrightarrow{v_2}+\overrightarrow{v_1}\overrightarrow{v_3}+\overrightarrow{v_2}\overrightarrow{v_1}+\overrightarrow{v_2}\overrightarrow{v_2}+\overrightarrow{v_2}\overrightarrow{v_3}+\overrightarrow{v_3}\overrightarrow{v_1}+\overrightarrow{v_3}\overrightarrow{v_2}+\overrightarrow{v_3}\overrightarrow{v_3} = |\overrightarrow{v_1}|^2+|\overrightarrow{v_2}|^2+|\overrightarrow{v_3}|^2$$

b) $\overrightarrow{v_1}\overrightarrow{v_2} = 0 \Longrightarrow \overrightarrow{v_1} \perp \overrightarrow{v_2}$ y llamamos $\overrightarrow{v_3} = (a,b,c)$:

$$\left\{\begin{array}{l} \overrightarrow{v_3}\overrightarrow{v_1} = a+b-c = 0 \\ \overrightarrow{v_3}\overrightarrow{v_2} = a+c = 0 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} b = -2a \\ c = -a \end{array}\right.$$

$\overrightarrow{v_3} = a(1,-2,-1)$ donde a es cualquier valor real.

c) Sea $\overrightarrow{v_1} = (a,a,a)$ y $\overrightarrow{v_2} = (b,c,d)$:

$$\left\{\begin{array}{l} \overrightarrow{v_1}\overrightarrow{v_2} = a(b+c+d) = 0 \Longrightarrow b+c+d = 0 \\ \overrightarrow{v} = (1,2,3) = \overrightarrow{v_1} + \overrightarrow{v_1} = (a+b, a+c, a+d) \end{array}\right. \Longrightarrow$$

$$\left\{\begin{array}{l} b+c+d = 0 \\ a+b = 1 \\ a+c = 2 \\ a+d = 3 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} a = 2 \\ b = -1 \\ c = 0 \\ d = 1 \end{array}\right.$$

Luego:

$$\overrightarrow{v_1} = (2,2,2) \;\text{ y }\; \overrightarrow{v_2} = (-1,0,1)$$

Problema 10.8.2 *(3 puntos)* Dado el sistema:

$$\left\{\begin{array}{rrrr} (m+1)x+ & y+ & z= & 0\\ x+ & (m+1)y+ & z= & m\\ x+ & y+ & (m+1)z= & m^2 \end{array}\right.$$

se pide:

a) (2 puntos) Discutir el sistema según los valores del parámetro m.

b) (1 punto) Resolver el sistema para $m = 0$.

Solución:

a)

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} (m+1) & 1 & 1 & 0\\ 1 & (m+1) & 1 & m\\ 1 & 1 & (m+1) & m^2 \end{array}\right)$$

$$|A| = m^2(m+3) = 0 \Longrightarrow m = 0 \;\; m = -3$$

- Si $m \neq 0$ y $\lambda \neq -3 \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow$Rango$(A) = 3 =$n^o incógnitas luego en este caso el sistema será Compatible Determinado.
- Si $m = 0$:
$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right)$$
Rango(A) =Rango$(\overline{A}) = 1 <$ n^o de incógnitas, y el sistema es compatible indeterminado.
- Si $m = -3$:
$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 1 & 0\\ 1 & -2 & 1 & -3\\ 1 & 1 & -2 & 9 \end{array}\right)$$
En este caso Rango$(A) = 2 \neq$Rango$(\overline{A}) = 3$, y el sistema es incompatible. Los determinantes:
$$\left|\begin{array}{ccc} 1 & 1 & 0\\ -2 & 1 & -3\\ 1 & -2 & 9 \end{array}\right| = 18 \neq 0, \quad \left|\begin{array}{cc} 1 & 1\\ -2 & 1 \end{array}\right| = 3 \neq 0$$

b) Cuando $m = 0 \Longrightarrow x + y + z = 0$:

$$\left\{\begin{array}{l} x = -\lambda - \mu\\ y = \lambda\\ z = \mu \end{array}\right.$$

Problema 10.8.3 *(2 puntos)* Sabiendo que el volumen de un cubo de lado a es $V(a) = a^3$ centímetros cúbicos, calcular el valor mínimo de $V(x)+V(y)$ si $x + y = 5$.

Solución:

$$f(x) = V(x) + V(y) = x^3 + y^3, \quad y = 5 - x \Longrightarrow f(x) = x^3 + (5 - x)^3 \Longrightarrow$$

$$f'(x) = 3x^2 - 3(5 - x)^2 = 30x - 75 = 0 \Longrightarrow x = \frac{5}{2}$$

$$f''(x) = 30 \Longrightarrow f''\left(\frac{5}{2}\right) = 30 > 0 \Longrightarrow \text{Mínimo}$$

Sustituyendo en $f(x)$:

$$f\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{125}{4} = 31,25\ cm^3$$

Problema 10.8.4 *(2 puntos)* Calcular las siguientes integrales:

a) (1 punto) $\displaystyle\int (2x+1)^3\,dx, \int x^3 e^{x^4}\,dx$

b) (1 punto) $\displaystyle\int 2^x\,dx, \int \frac{1 + x + x^4}{x^3}\,dx$

Solución:

a) $\displaystyle\int (2x+1)^3\,dx = \frac{1}{2}\int 2(2x+1)^3\,dx = \frac{(2x+1)^4}{8} + C$

$\displaystyle\int x^3 e^{x^4}\,dx = \frac{1}{4}\int 4x^3 e^{x^4}\,dx = \frac{e^{x^4}}{4} + C$

b) $\displaystyle\int 2^x\,dx = \frac{1}{\ln 2}\int \ln 2 \cdot 2^x\,dx = \frac{2^x}{\ln 2} + C$

$\displaystyle\int \frac{1 + x + x^4}{x^3}\,dx = -\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x} + \frac{x^2}{2} + C$