

Problemas de Selectividad de Matemáticas II
Comunidad de Madrid
(Resueltos)

Isaac Musat Hervás

22 de mayo de 2013

Capítulo 11

Año 2010

11.1. Modelo 2010 - Opción A

Problema 11.1.1 (3 puntos) Dada la función:

$$f(x) = e^x + a e^{-x},$$

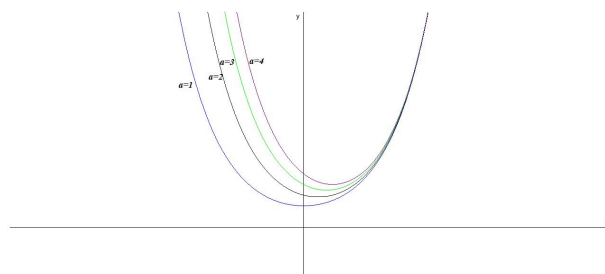
siendo a un número real, estudiar los siguientes apartados en función de a :

- (1,5 puntos) Hallar los extremos relativos y los intervalos de crecimiento y decrecimiento de f .
- (1 punto) Estudiar para que valor, o valores, de a la función f tiene alguna asíntota horizontal.
- (0,5 puntos) Para $a \geq 0$, hallar el área de la región acotada comprendida entre la gráfica de f , el eje OX y las rectas $x = 0$, $x = 2$.

Solución:

$$a) \quad f'(x) = e^x - a e^{-x} = 0 \implies x = \frac{\ln a}{2}$$

- Si $a > 0$:

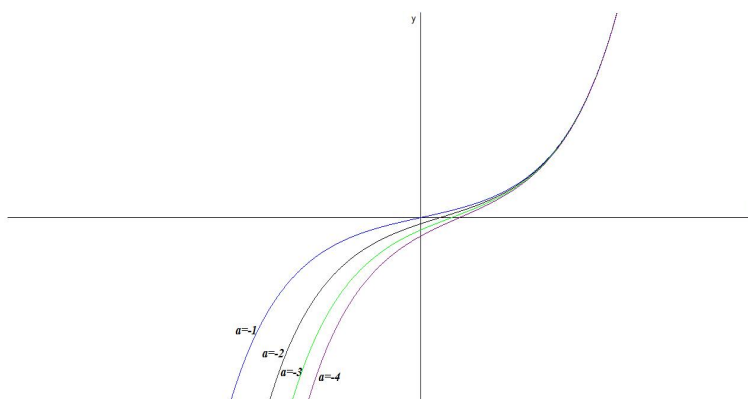


	$(-\infty, \ln a/2)$	$(\ln a, \infty)$
$f'(x)$	$-$	$+$
$f(x)$	Decreciente	Creciente

La función es decreciente en el intervalo $(-\infty, \ln a/2)$ y creciente en el $(\ln a/2, \infty)$.

La función tiene un mínimo en el punto $\left(\frac{\ln a}{2}, 2\sqrt{a}\right)$

- Si $a \leq 0 \implies \ln a$ no existe, luego no hay extremos. Por otro lado $f'(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R} \implies$ la función es siempre creciente.



$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^{2x} - a}{e^x} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2e^{2x}}{e^x} = \lim_{x \rightarrow \infty} 2e^x = \infty$$

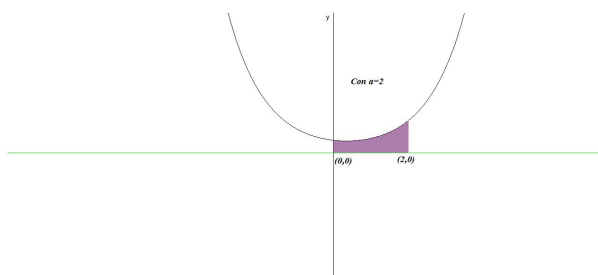
En este caso no hay asíntotas horizontales sea cual sea el valor de a .
Cuando $x \rightarrow -\infty$:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^{2x} - a}{e^x} = \left[\frac{\infty}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow -\infty} (e^{-x} + a e^x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1 + a e^{2x}}{e^x} = \infty \text{ si } a \neq 0$$

Es decir, no hay asíntotas horizontales en este caso siempre que $a \neq 0$.

Si $a = 0 \implies \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 + a e^{2x}}{e^x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{e^x} = 0$. En este caso hay una asíntota horizontal en $y = 0$.

b) Con $a > 0$:



$$S = \int_0^2 (e^x + a e^{-x}) dx = [e^x - a e^{-x}]_0^2 = a(1 - e^{-2}) + e^2 - 1$$

Problema 11.1.2 (3 puntos) Se consideran las rectas:

$$r \equiv \frac{x}{-1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-2}{-2}$$

$$s \equiv \frac{x-5}{6} = \frac{y}{2} = \frac{z+1}{2}$$

- a) (1,5 puntos) Determinar la ecuación de la recta t que corta a r y s , y que contiene al origen de coordenadas.
- b) (1,5 puntos) Determinar la mínima distancia entre las rectas r y s .

Solución:

$$r : \begin{cases} \vec{u}_r = (-1, 1, -2) \\ P_r(0, 1, 2) \end{cases} \quad s : \begin{cases} \vec{u}_s = (6, 2, 2) = 2(3, 1, 1) \\ P_s(5, 0, -1) \end{cases}$$

a)

$$\pi_1 : \begin{cases} \vec{u}_r = (-1, 1, -2) \\ \overrightarrow{OP_r} = (0, 1, 2) \\ O(0, 0, 0) \end{cases} \implies \begin{vmatrix} -1 & 0 & x \\ 1 & 1 & y \\ -2 & 2 & z \end{vmatrix} = 0 \implies 4x + 2y - z = 0$$

$$\pi_2 : \begin{cases} \vec{u}_s = (3, 1, 1) \\ \overrightarrow{OP_s} = (5, 0, -1) \\ O(0, 0, 0) \end{cases} \implies \begin{vmatrix} 3 & 5 & x \\ 1 & 0 & y \\ 1 & -1 & z \end{vmatrix} = 0 \implies -x + 8y - 5z = 0$$

$$t : \begin{cases} 4x + 2y - z = 0 \\ x - 8y + 5z = 0 \end{cases}$$

b) $\overrightarrow{P_r P_s} = (5, -1, -3)$

$$|[\vec{u}_r, \vec{u}_s, \overrightarrow{P_r P_s}]| = \left| \begin{vmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 6 & 2 & 2 \\ 5 & -1 & -3 \end{vmatrix} \right| = 64 \implies \text{se cruzan}$$

$$|\vec{u}_r \times \vec{u}_s| = \left| \begin{vmatrix} i & j & k \\ -1 & 1 & -2 \\ 6 & 2 & 2 \end{vmatrix} \right| = |(6, -10, -8)| = 2|(3, -5, -4)| = 10\sqrt{2}$$

$$d(r, s) = \frac{|[\vec{u}_r, \vec{u}_s, \overrightarrow{P_r P_s}]|}{|\vec{u}_r \times \vec{u}_s|} = \frac{64}{10\sqrt{2}} = \frac{16\sqrt{2}}{5}$$

Problema 11.1.3 (2 puntos) Obtener, para todo número natural n , el valor de:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^n + \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^n$$

Solución:

Si $n = 1$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Si $n = 2$

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Si $n = 3$

$$\begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 4 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & -4 \\ -4 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$$

Si $n = n$

$$\begin{pmatrix} 2^{n-1} & 2^{n-1} \\ 2^{n-1} & 2^{n-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2^{n-1} & -2^{n-1} \\ -2^{n-1} & 2^{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix}$$

Problema 11.1.4 (2 puntos) Discutir razonadamente, en función del parámetro k , el siguiente sistema:

$$\begin{cases} x + ky + z = k + 2 \\ kx + y + z = k \\ x + y + kz = -2(k + 1) \end{cases}$$

Solución:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & k & 1 & k+2 \\ k & 1 & 1 & k \\ 1 & 1 & k & -2(k+1) \end{array} \right) \quad |A| = -k^3 + 3k - 2 = 0 \implies k = 1 \quad k = -2$$

■ Si $k \neq 1$ y $k \neq -2 \implies |A| \neq 0 \implies \text{Rango}(A) = \text{Rango}(\overline{A}) = 3 = n^\circ$ de incógnitas, luego en este caso el sistema será compatible determinado.

■ Si $k = 1$

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -4 \end{array} \right) \implies \begin{cases} \text{Rango}(\overline{A}) = 3 \\ \text{Rango}(A) = 2 \end{cases} \implies$$

Sistema es Incompatible.

- Si $k = -2$

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -2 & 2 \end{array} \right)$$

Tenemos:

$$F_3 = -(F_1 + F_2) \implies \begin{cases} \text{Rango}(\overline{A}) = 2 \\ \text{Rango}(A) = 2 \end{cases} \implies$$

Sistema Compatible Indeterminado.

11.2. Modelo 2010 - Opción B

Problema 11.2.1 (3 puntos) Dada la función:

$$f(x) = x^3 - x$$

Se pide:

- (1 punto) Hallar la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto $(-1, f(-1))$.
- (1 punto) Determinar los puntos de intersección de la recta hallada en el apartado anterior con la gráfica de f .
- (1 punto) Calcular el área de la región acotada que está comprendida entre la gráfica de f y la recta obtenida en el apartado anterior.

Solución:

- $f(-1) = 0$. El punto de tangencia es el $(-1, 0)$. $f'(x) = 3x^2 - 1 \implies m = f'(-1) = 2$. Luego la recta tangente es:

$$y = 2(x + 1) \implies 2x - y + 2 = 0$$

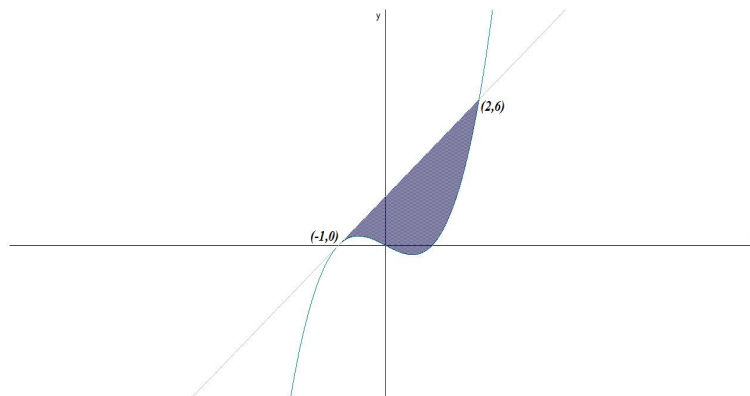
- Para encontrar los puntos de intersección lo hacemos por igualación:

$$x^3 - x = 2x + 2 \implies x = -1, \quad x = 2$$

Los puntos de intersección son: $(-1, 0)$ y $(2, 6)$.

-

$$S = \int_{-1}^2 (2x+2-x^3+x) dx = \int_{-1}^2 (-x^3+3x+2) dx = \left[-\frac{x^4}{4} + 3\frac{x^2}{2} + 2x \right]_{-1}^2 = \frac{27}{4}$$



Problema 11.2.2 (3 puntos) Dado el sistema:

$$\begin{cases} x + z = 2 \\ x + \lambda y - z = 4 \\ -\lambda x - y - z = -5 \end{cases}$$

- (1 punto) Discutirlo para los distintos valores del parámetro λ
- (1 punto) Resolverlo cuando el sistema sea compatible indeterminado.
- (1 punto) Resolverlo para $\lambda = -2$.

Solución:

a)

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & \lambda & -1 & 4 \\ -\lambda & -1 & -1 & -5 \end{array} \right) \quad |A| = \lambda^2 - \lambda - 2 = 0 \implies \lambda = -1 \quad \lambda = 2$$

- Si $\lambda \neq -1$ y $\lambda \neq 2 \implies |A| \neq 0 \implies \text{Rango}(A) = \text{Rango}(\overline{A}) = 3 = \text{n}^\circ$ de incógnitas, luego en este caso el sistema será compatible determinado.

- Si $\lambda = -1$

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & 4 \\ 1 & -1 & -1 & -5 \end{array} \right) \implies \begin{cases} \text{Rango}(\overline{A}) = 3 \\ \text{Rango}(A) = 2 \end{cases} \implies$$

Sistema es Incompatible.

- Si $\lambda = 2$

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 & 4 \\ -2 & -1 & -1 & -5 \end{array} \right) \Rightarrow \begin{cases} \text{Rango}(\overline{A}) = 2 \\ \text{Rango}(A) = 2 \end{cases} \Rightarrow$$

Sistema Compatible Indeterminado.

- b) El sistema es compatible indeterminado cuando $\lambda = 2$:

$$\begin{cases} x+ & z = 2 \\ x+ & 2y- & z = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 - \lambda \\ y = 1 + \lambda \\ z = \lambda \end{cases}$$

- c)

$$\begin{cases} x+ & z = 2 \\ x- & 2y- & z = 4 \\ 2x- & y- & z = -5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -3 \\ y = -6 \\ z = 5 \end{cases}$$

Problema 11.2.3 (2 puntos) Dados los puntos $A(2, 2, 3)$ y $B(0, -2, 1)$, hallar el punto, o los puntos, de la recta:

$$r \equiv \frac{x-2}{3} = \frac{y}{-1} = \frac{z-4}{2}$$

que equidistan de A y de B .

Solución:

$$r : \begin{cases} x = 2 + 3\lambda \\ y = -\lambda \\ z = 4 + 2\lambda \end{cases}$$

$$\overrightarrow{AP} = (3\lambda, -2 - \lambda, 1 + 2\lambda), \quad \overrightarrow{BP} = (2 - 3\lambda, 2 - \lambda, 3 + 2\lambda)$$

$$|\overrightarrow{AP}| = |\overrightarrow{BP}| \Rightarrow$$

$$\sqrt{(3\lambda)^2 + (-2 - \lambda)^2 + (1 + 2\lambda)^2} = \sqrt{(2 - 3\lambda)^2 + (2 - \lambda)^2 + (3 + 2\lambda)^2} \Rightarrow$$

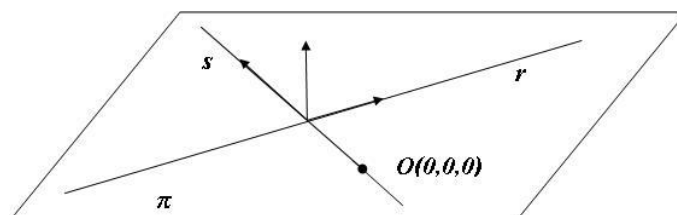
$$\lambda = 1 \Rightarrow (5, -1, 6)$$

Problema 11.2.4 (2 puntos) Dados el plano $\pi \equiv 5x - 4y + z = 0$ y la recta:

$$r \equiv \frac{x}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z}{3}$$

contenida en π , obtener la recta s contenida en π que es perpendicular a r , y que pasa por el origen de coordenada $O(0, 0, 0)$.

Solución:



$$s : \begin{cases} \vec{u}_s = \vec{u}_\pi \times \vec{u}_r = (1, 1, -1) \\ O(0, 0, 0) \end{cases}$$

$$\vec{u}_s = \vec{u}_\pi \times \vec{u}_r = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 5 & -4 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = -14(1, 1, -1)$$

$$s : \frac{x}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z}{-1}$$

11.3. General-Junio 2010 - Opción A

Problema 11.3.1 (3 puntos) Dada la función:

$$f(x) = \frac{x^2 + 2}{x^2 + 1}$$

se pide:

- (0,75 puntos) Estudiar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x)$.
- (0,75 puntos) Hallar los puntos de inflexión de la gráfica de $f(x)$.
- (0,75 puntos) Hallar las asíntotas y dibujar la gráfica de $f(x)$.
- (0,75 puntos) Hallar el área del recinto acotado que limitan la gráfica de $f(x)$, el eje de abscisas y las rectas $y = x + 2$, $x = 1$.

Solución:

$$a) f'(x) = -\frac{2x}{(x^2 + 1)^2} = 0 \implies x = 0$$

	$(-\infty, 0)$	$(0, \infty)$
$f'(x)$	+	-
$f(x)$	Creciente	Decreciente

La función es creciente en el intervalo $(-\infty, 0)$ y decreciente en el $(0, \infty)$.

La función tiene un máximo en el punto $(0, 2)$

$$b) f''(x) = \frac{2(3x^2 - 1)}{(x^2 + 1)^3} = 0 \implies x = \pm \frac{\sqrt{3}}{3}$$

	$(-\infty, -\frac{\sqrt{3}}{3})$	$(-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3})$	$(\frac{\sqrt{3}}{3}, \infty)$
$f''(x)$	+	-	+
$f(x)$	Cóncava	Convexa	Cóncava

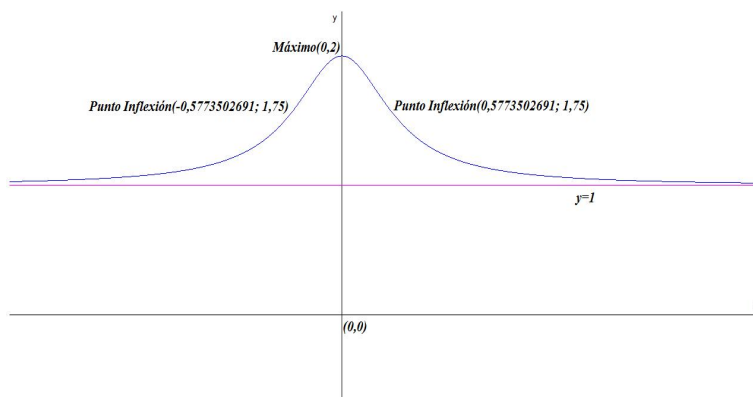
La función es cóncava en el intervalo $(-\infty, -\frac{\sqrt{3}}{3}) \cup (\frac{\sqrt{3}}{3}, \infty)$ y es convexa el intervalo $(-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3})$.

La función presenta puntos de inflexión en $\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{7}{4}\right)$ y $\left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{7}{4}\right)$

c) Como el denominador no se anula nunca no hay asíntotas verticales y, pasamos a estudiar las horizontales:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 2}{x^2 + 1} = 1 \implies y = 1$$

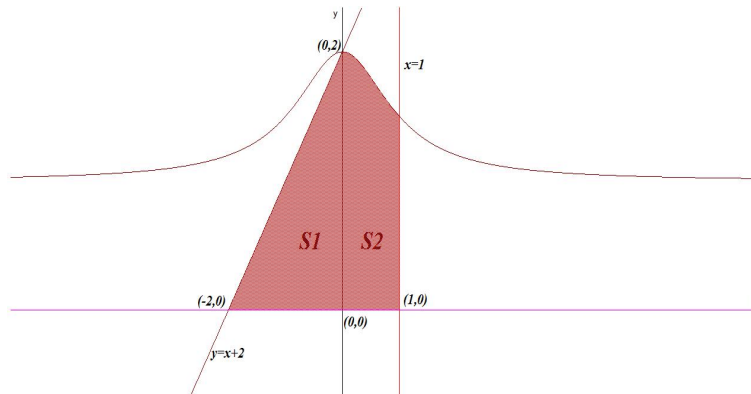
y, por tanto, no hay asíntotas oblicuas.



$$d) S1 = \frac{4}{2} = 2 \text{ y } S2 = \int_0^1 \frac{x^2 + 2}{x^2 + 1} dx:$$

$$\int_0^1 \frac{x^2 + 2}{x^2 + 1} dx = \arctan x + x \Big|_0^1 = 1 + \frac{\pi}{4} = \frac{4 + \pi}{4}$$

$$\text{Área} = |S1| + |S2| = 3 + \frac{\pi}{4} = \frac{12 + \pi}{4} u^2$$



Problema 11.3.2 (3 puntos) Dadas las rectas:

$$r \equiv \frac{x}{2} = \frac{y-1}{3} = \frac{z+4}{-1}, \quad s \equiv \frac{x}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z}{4}$$

se pide:

- (2 puntos) Determinar la ecuación de la recta perpendicular común a r y s
- (1 puntos) Calcular la mínima distancia entre las rectas r y s .

Solución:

a)

$$r : \begin{cases} \vec{u}_r = (2, 3, -1) \\ P_r(0, 1, -4) \end{cases} \quad s : \begin{cases} \vec{u}_s = (1, 1, 4) \\ P_s(0, 0, 0) \end{cases}$$

Calculamos el vector perpendicular a estas dos rectas:

$$\vec{u}_t = \vec{u}_r \times \vec{u}_s = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 4 \end{vmatrix} = (13, -9, -1)$$

Calculamos la recta t como intersección de dos planos:

$$\pi_1 : \begin{cases} \vec{u}_r = (2, 3, -1) \\ \vec{u}_t = (13, -9, -1) \\ P_r(0, 1, -4) \end{cases} \implies \begin{vmatrix} 2 & 13 & x \\ 3 & -9 & y-1 \\ -1 & -1 & z+4 \end{vmatrix} = 0 \implies 12x + 11y + 57z + 217 = 0$$

$$\pi_2 : \begin{cases} \vec{u}_s = (1, 1, 4) \\ \vec{u}_t = (13, -9, -1) \\ P_s(0, 0, 0) \end{cases} \implies \begin{vmatrix} 1 & 13 & x \\ 1 & -9 & y \\ 4 & -1 & z \end{vmatrix} = 0 \implies 35x + 53y - 22z = 0$$

$$t : \begin{cases} 12x + 11y + 57z + 217 = 0 \\ 35x + 53y - 22z = 0 \end{cases}$$

b) $\overrightarrow{P_s P_r} = (0, 1, -4)$

$$|[\overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_s}, \overrightarrow{P_r P_s}]| = \left| \begin{vmatrix} 0 & 1 & -4 \\ 2 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 4 \end{vmatrix} \right| = -5 \implies \text{se cruzan}$$

$$|\overrightarrow{u_r} \times \overrightarrow{u_s}| = |(13, -9, -1)| = \sqrt{251}$$

$$d(r, s) = \frac{|[\overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_s}, \overrightarrow{P_r P_s}]|}{|\overrightarrow{u_r} \times \overrightarrow{u_s}|} = \frac{5}{\sqrt{251}} = \frac{5\sqrt{251}}{251} u$$

Problema 11.3.3 (2 puntos) Dado el sistema homogéneo de ecuaciones:

$$\begin{cases} x + ky - z = 0 \\ 2x - y + 2z = 0 \\ x - 4y + kz = 0 \end{cases}$$

se pide:

- (1 punto) Determinar para qué valores del parámetro k el sistema tiene soluciones distintas de $x = y = z = 0$.
- (1 punto) Resolverlo para el caso de $k = 3$.

Solución:

a)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & k & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 1 & -4 & k \end{pmatrix} \quad |A| = -2k^2 + k + 15 = 0 \implies k = 3 \quad k = -5/2$$

- Si $k \neq 3$ y $k \neq -5/2 \implies |A| \neq 0 \implies \text{Rango}(A) = 3 = \text{n}^\circ$ de incógnitas, luego en este caso el sistema será compatible determinado y la única solución sería la trivial $x = y = z = 0$
- Si $k = 3$ o $k = -5/2 \implies |A| = 0 \implies$ sistema compatible indeterminado y tendría infinitas soluciones distintas de la trivial.

b) Si $k = 3$:

$$\begin{cases} x + 3y - z = 0 \\ 2x - y + 2z = 0 \\ x - 4y + 3z = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} x = -\frac{5}{7}\lambda \\ y = \frac{4}{7}\lambda \\ z = \lambda \end{cases}$$

Problema 11.3.4 (2 puntos) Dadas las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}, \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

se pide:

- a) (1 punto) Hallar dos constantes a y b , tales que $A^2 = aA + bI$.
- b) (1 punto) Sin calcular explícitamente A^3 y A^4 , y utilizando sólo la expresión anterior, obtener la matriz A^5 .

Solución:

a)

$$A^2 = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = 3 \end{cases}$$

$$A^2 = -A + 3I$$

$$b) \quad A^3 = A^2 \cdot A = (-A + 3I)A = -A^2 + 3A = A - 3I + 3A = 4A - 3I$$

$$A^3 = 4 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} - 3 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 4 & -11 \end{pmatrix}$$

$$A^4 = A^3 \cdot A = (4A - 3I)A = 4A^2 - 3A = 4(-A + 3I) - 3A = -7A + 12I$$

$$A^5 = A^4 \cdot A = (-7A + 12I)A = -7A^2 + 12A = -7(-A + 3I) + 12A = 19A - 21I$$

$$A^5 = 19 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} - 21 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 19 \\ 19 & -59 \end{pmatrix}$$

11.4. General-Junio 2010 - Opción B

Problema 11.4.1 (3 puntos) Dada la función:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x} \ln x}{2^x} & \text{si } x > 0 \\ x + k & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

donde $\ln x$ significa logaritmo neperiano de x , se pide:

- a) (1 punto) Determinar el valor de k para que la función sea continua en $\mathbf{R}$.
- b) (1 punto) Hallar los puntos de corte con los ejes de coordenadas.
- c) (1 punto) Obtener la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función en el punto de abscisa $x = 1$.

Solución:

a) Para que la función sea continua en $x = 0$ se tiene que cumplir:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (x + k) = k$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{x} \ln x}{2^x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{\frac{2^x}{\sqrt{x}}} = \left[\frac{-\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{2^x \ln 2 \sqrt{x} - 2^x \frac{1}{2\sqrt{x}}}{x}} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{x}}{2^x \cdot x \cdot \ln 2 - 2^{x-1}} = \frac{0}{-1/2} = 0$$

Luego $k = 0$

b) Si $x = 0 \Rightarrow f(0) = 0 \Rightarrow (0, 0)$. Si $f(x) = 0 \Rightarrow \frac{\sqrt{x} \ln x}{2^x} = 0 \Rightarrow x = 0, x = 1 \Rightarrow (0, 0)$ y $(1, 0)$, por la otra rama obtenemos el punto $(0, 0)$.

c) Se pide la tangente en la rama $x > 1$:

$$f(1) = 0$$

$$f'(x) = \frac{\left(\frac{1}{2\sqrt{x}} \ln x + \frac{\sqrt{x}}{x} \right) 2^x - \sqrt{x} \ln x \cdot 2^x \ln 2}{2^{2x}}$$

$$m = f'(1) = \frac{1}{2}$$

La recta tangente es $y = \frac{1}{2}(x - 1)$

Problema 11.4.2 (3 puntos) Dado el sistema:

$$\begin{cases} x + ay - z = a \\ ax + 2z = -2 \\ x + z = -2 \end{cases}$$

a) (2 puntos) Discutirlo según los valores del parámetro a .

b) (1 punto) Resolverlo en el caso de $a = 0$.

Solución:

a)

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & -1 & a \\ a & 0 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 & -2 \end{array} \right) \quad |A| = 2a - a^2 = 0 \Rightarrow a = 0 \quad a = 2$$

- Si $a \neq 0$ y $a \neq 2 \Rightarrow |A| \neq 0 \Rightarrow \text{Rango}(A) = \text{Rango}(\bar{A}) = 3 = n^\circ$ de incógnitas, luego en este caso el sistema será compatible determinado.

- Si $a = 0$

$$\bar{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 & -2 \end{array} \right) \Rightarrow \begin{cases} \text{Rango}(\bar{A}) = 2 \\ \text{Rango}(A) = 2 \end{cases} \Rightarrow$$

Sistema es Compatible Indeterminado.

- Si $a = 2$

$$\bar{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 & -2 \end{array} \right) \Rightarrow \begin{cases} \text{Rango}(\bar{A}) = 3 \\ \text{Rango}(A) = 2 \end{cases} \Rightarrow$$

Sistema Incompatible.

- b) El sistema es compatible indeterminado cuando $a = 0$:

$$\begin{cases} x - z = 0 \\ 2z = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \lambda \\ y = 0 \\ z = -\lambda \end{cases}$$

Problema 11.4.3 (2 puntos) Dadas las rectas:

$$r \equiv x = \frac{y-1}{2} = \frac{z+1}{-1}, \quad s \equiv \begin{cases} x+z=3 \\ 2x-y=2 \end{cases}$$

se pide:

- (1 punto) Hallar la ecuación del plano π determinado por r y s .
- (1 punto) Hallar la distancia desde el punto $A(0, 1, -1)$ a la recta s .

Solución:

- a)

$$r : \begin{cases} \vec{u}_r = (1, 2, -1) \\ P_r(0, 1, -1) \end{cases} \quad s : \begin{cases} \vec{u}_s = (-1, -2, 1) \\ P_s(3, 4, 0) \end{cases}$$

$$\vec{u}_s = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix} = (-1, -2, 1)$$

$\overrightarrow{P_r P_s} = (3, 3, 1) \implies$ las dos rectas son paralelas, el plano que determinan es:

$$\pi : \begin{cases} \overrightarrow{u_r} = (1, 2, -1) \\ \overrightarrow{P_r P_s} = (3, 3, 1) \\ P_r(0, 1, -1) \end{cases} \implies \begin{vmatrix} 1 & 3 & x \\ 2 & 3 & y-1 \\ -1 & 1 & z+1 \end{vmatrix} = 0 \implies 5x-4y-3z+1=0$$

b)

$$\overrightarrow{P_s A} = (-3, -3, -1)$$

$$|\overrightarrow{u_s} \times \overrightarrow{P_s A}| = \left| \begin{vmatrix} i & j & k \\ -1 & -2 & 1 \\ -3 & -3 & -1 \end{vmatrix} \right| = |(5, -4, -3)| = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$$

$$|\overrightarrow{u_s}| = |(-1, -2, 1)| = \sqrt{6}$$

$$d(A, s) = \frac{|\overrightarrow{u_s} \times \overrightarrow{P_s A}|}{|\overrightarrow{u_s}|} = \frac{5\sqrt{3}}{3} u$$

Problema 11.4.4 (2 puntos) Sea el plano π que contiene a los puntos $P(1, 0, 0)$, $Q(0, 2, 0)$ y $R(0, 0, 3)$. Se pide:

- (1 punto) Hallar el volumen del tetraedro determinado por el origen de coordenadas y los puntos P , Q y R .
- (1 punto) Calcular las coordenadas del punto simétrico del origen de coordenadas respecto del plano π .

Solución:

a)

$$\begin{cases} \overrightarrow{OP} = (1, 0, 0) \\ \overrightarrow{OQ} = (0, 2, 0) \\ \overrightarrow{OR} = (0, 0, 3) \end{cases} \implies V = \frac{1}{6} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 1 u^3$$

b) Calculamos el plano π :

$$\pi : \begin{cases} \overrightarrow{PQ} = (-1, 2, 0) \\ \overrightarrow{PR} = (-1, 0, 3) \\ P(1, 0, 0) \end{cases} \implies \begin{vmatrix} -1 & -1 & x-1 \\ 2 & 0 & y \\ 0 & 3 & z \end{vmatrix} = 0 \implies 6x+3y+2z-6=0$$

Para encontrar el punto simétrico del origen respecto a este plano seguimos el siguiente procedimiento:

- Calculamos una recta r que pasa por $O(0, 0, 0)$ y es perpendicular a π :

$$r : \begin{cases} \overrightarrow{u_\pi} = (6, 3, 2) \\ O(0, 0, 0) \end{cases} \implies r : \begin{cases} x = 6\lambda \\ y = 3\lambda \\ z = 2\lambda \end{cases}$$

- Calculamos el punto de corte O' de r con π :

$$6(6\lambda) + 3(3\lambda) + 2(2\lambda) - 6 = 0 \implies \lambda = \frac{6}{49}$$

Luego el punto de corte es:

$$O' \left(\frac{36}{49}, \frac{18}{49}, \frac{12}{49} \right)$$

- El punto O' es el punto medio entre los puntos O y el que buscamos O'' :

$$\frac{O + O''}{2} = O' \implies O'' = 2O' - O = \left(\frac{72}{49}, \frac{36}{49}, \frac{24}{49} \right)$$

11.5. Específica-Junio 2010 - Opción A

Problema 11.5.1 (3 puntos) Sabiendo que $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 6 & 0 & 3 \\ \alpha & \beta & \gamma \end{vmatrix} = 3$, y utilizando las propiedades de los determinantes, calcular:

a) (1 punto) El determinante de la matriz $\begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 6 & 0 & 3 \\ \alpha & \beta & \gamma \end{pmatrix}^4$

b) (1 punto) $\begin{vmatrix} 10 & 20 & 30 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3\alpha & 3\beta & 3\gamma \end{vmatrix}$

c) (1 punto) $\begin{vmatrix} 3\alpha + 2 & 3\beta + 4 & 3\gamma + 6 \\ 2\alpha & 2\beta & 2\gamma \\ \alpha + 6 & \beta & \gamma + 3 \end{vmatrix}$

Solución:

a) $\left| \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 6 & 0 & 3 \\ \alpha & \beta & \gamma \end{pmatrix} \right|^4 = \left| \begin{vmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 6 & 0 & 3 \\ \alpha & \beta & \gamma \end{vmatrix} \right|^4 = 2^4 \left| \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 6 & 0 & 3 \\ \alpha & \beta & \gamma \end{vmatrix} \right|^4 = 6^4$

b) $\begin{vmatrix} 10 & 20 & 30 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3\alpha & 3\beta & 3\gamma \end{vmatrix} = 3 \cdot 10 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \\ \alpha & \beta & \gamma \end{vmatrix} = 10 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 6 & 0 & 3 \\ \alpha & \beta & \gamma \end{vmatrix} = 30$

c) $\begin{vmatrix} 3\alpha + 2 & 3\beta + 4 & 3\gamma + 6 \\ 2\alpha & 2\beta & 2\gamma \\ \alpha + 6 & \beta & \gamma + 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3\alpha & 3\beta & 3\gamma \\ 2\alpha & 2\beta & 2\gamma \\ \alpha + 6 & \beta & \gamma + 3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 2\alpha & 2\beta & 2\gamma \\ \alpha + 6 & \beta & \gamma + 3 \end{vmatrix} =$

$$= \begin{vmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 2\alpha & 2\beta & 2\gamma \\ \alpha+6 & \beta & \gamma+3 \end{vmatrix} = 4 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha+6 & \beta & \gamma+3 \end{vmatrix} = 4 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha & \beta & \gamma \end{vmatrix} +$$

$$4 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \alpha & \beta & \gamma \\ 6 & 0 & 3 \end{vmatrix} = -4 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 6 & 0 & 3 \\ \alpha & \beta & \gamma \end{vmatrix} = -12$$

Problema 11.5.2 (3 puntos) Dadas la recta:

$$r \equiv \frac{x+1}{-2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z+1}{3}$$

y el punto $P(2, 0, -1)$, se pide:

- (1 punto) Hallar la distancia del punto P a la recta r .
- (2 puntos) Hallar las coordenadas del punto P' simétrico de P respecto de la recta r .

Solución:

a)

$$r : \begin{cases} \vec{u}_r = (-2, 1, 3) \\ P_r(-1, 2, -1) \end{cases} \quad \overrightarrow{P_r P} = (3, -2, 0) \quad r : \begin{cases} x = -1 - 2\lambda \\ y = 2 + \lambda \\ z = -1 + 3\lambda \end{cases}$$

$$|\vec{u}_r \times \overrightarrow{P_r P}| = \left| \begin{vmatrix} i & j & k \\ -2 & 1 & 3 \\ 3 & -2 & 0 \end{vmatrix} \right| = |(6, 9, 1)| = \sqrt{118}$$

$$d(P, r) = \frac{|\vec{u}_r \times \overrightarrow{P_r P}|}{|\vec{u}_r|} = \frac{\sqrt{118}}{\sqrt{14}} = \sqrt{\frac{59}{7}} u$$

b) Para calcular el punto simétrico seguimos los siguientes pasos:

- Calculo un plano π perpendicular a r que contenga a P :

$$\pi : \begin{cases} \vec{u}_\pi = (-2, 1, 3) \\ P(2, 0, -1) \end{cases} \implies -2x + y + 3z + \lambda = 0$$

$$\implies -4 - 3 + \lambda = 0 \implies \lambda = 7 \implies 2x - y - 3z - 7 = 0$$

- Calculo el punto de corte P'' de este plano π con r :

$$2(-1 - 2\lambda) - (2 + \lambda) - 3(-1 + 3\lambda) - 7 = 0 \implies \lambda = -\frac{4}{7}$$

$$P'' \left(\frac{1}{7}, \frac{10}{7}, -\frac{19}{7} \right)$$

- El punto P'' es el punto medio entre P y P' :

$$\frac{P + P'}{2} = P'' \implies P' = 2P'' - P = \left(\frac{2}{7}, \frac{20}{7}, -\frac{38}{7}\right) - (2, 0, -1)$$

$$P'' \left(-\frac{12}{7}, \frac{20}{7}, -\frac{31}{7}\right)$$

Problema 11.5.3 (2 puntos) Hallar:

a) (1 punto) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left[\frac{\sqrt[3]{3 + 5x - 8x^3}}{1 + 2x} \right]^{25}$

b) (1 punto) $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + 4x^3)^{2/x^3}$

Solución:

a)

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left[\frac{\sqrt[3]{3 + 5x - 8x^3}}{1 + 2x} \right]^{25} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\frac{\sqrt[3]{-8x^3}}{2x} \right]^{25} = (-1)^{25} = -1$$

b)

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1 + 4x^3)^{2/x^3} = \lambda \implies \ln \lambda = \lim_{x \rightarrow 0} \ln(1 + 4x^3)^{2/x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \ln(1 + 4x^3)}{x^3} =$$

$$\left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{24}{3(1 + 4x^3)} = 8 \implies \lambda = e^8$$

Problema 11.5.4 (2 puntos) Dada la función $f(x) = \ln(x^2 + 4x - 5)$, donde $\ln$ significa logaritmo neperiano, se pide:

- (1 punto) Determinar el dominio de definición de $f(x)$ y las asíntotas verticales de su gráfica.
- (1 punto) Estudiar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x)$.

Solución:

- Hay que estudiar la inecuación: $x^2 + 4x - 5 > 0$.

$$x^2 + 4x - 5 = 0 \implies x = -5, \quad x = 1$$

	$(-\infty, -5)$	$(-5, 1)$	$(1, \infty)$
$f(x)$	+	-	+

Luego $\text{Dom}(f) = (-\infty, -5) \cup (1, \infty)$. Las asíntotas verticales son:

■ $x = -5$:

$$\lim_{x \rightarrow -5^-} \ln(x^2 + 4x - 5) = -\infty; \quad \lim_{x \rightarrow -5^+} \ln(x^2 + 4x - 5) \text{ no existe}$$

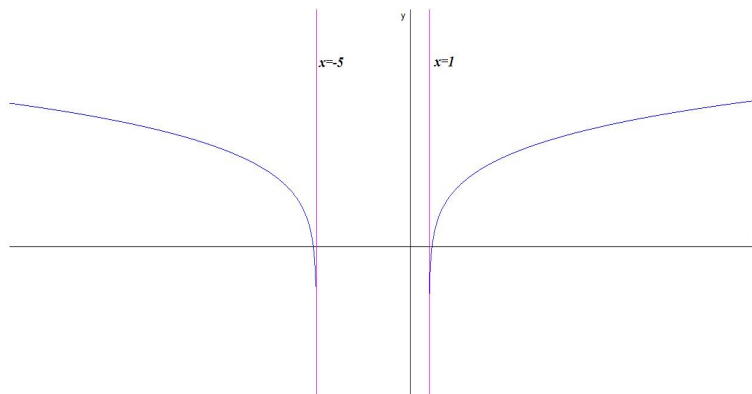
■ $x = 1$:

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \ln(x^2 + 4x - 5) \text{ no existe}, \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} \ln(x^2 + 4x - 5) = -\infty$$

b) $f'(x) = \frac{2x+4}{x^2+4x-5} = 0 \Rightarrow x = -2$ Estudio la derivada sin tener en cuenta que procede de un logaritmo y luego restringiré la conclusiones al dominio de esta función:

	$(-\infty, -5)$	$(-5, -2)$	$(-2, 1)$	$(1, \infty)$
$f'(x)$	—	+	—	+
$f(x)$	Decreciente	Creciente	Decreciente	Creciente

La función es decreciente en el intervalo $(-\infty, -5)$ y creciente en el $(1, \infty)$.



11.6. Específica-Junio 2010 - Opción B

Problema 11.6.1 (3 puntos) Dadas las funciones:

$$y = 9 - x^2, \quad y = 2x + 1$$

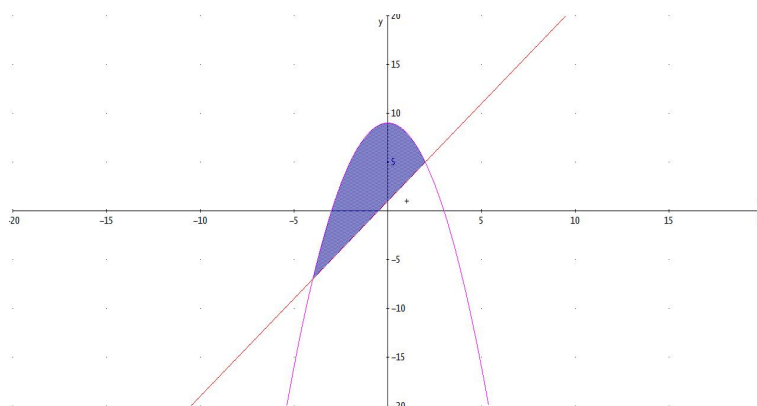
se pide:

- (1 punto) Dibujar las gráficas de las dos funciones identificando el recinto acotado por ellas.
- (1 punto) Calcular el área de dicho recinto acotado.

- c) (1 punto) Hallar el volumen de un cuerpo de revolución obtenido al hacer girar alrededor del eje OX el recinto acotado por la gráfica de $y = 9 - x^2$ y el eje OX .

Solución:

- a) La función $f(x) = 9 - x^2$ tiene los puntos de corte con los ejes: $(0, 9)$, $(3, 0)$ y $(-3, 0)$, presenta un máximo en $(0, 9)$ y es una función par (simétrica respecto a OY). La función $g(x) = 2x + 1$ es una recta que pasa por los puntos: $(0, 1)$ y $(-1/2, 0)$

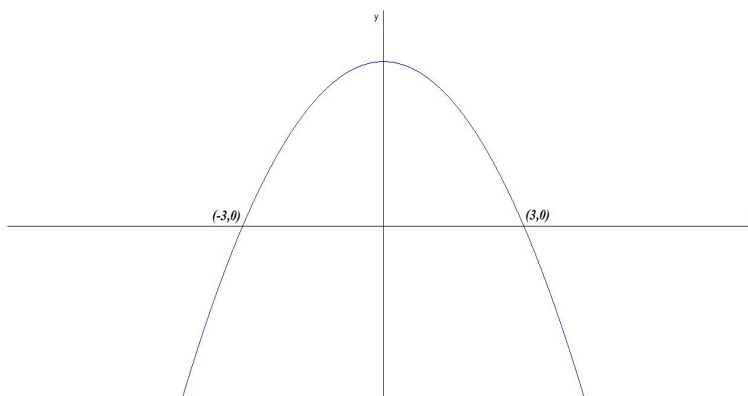


- b) Calculamos los puntos de corte de estas dos gráficas:

$$9 - x^2 = 2x + 1 \implies x = -4, \quad x = 2$$

$$S = \int_{-4}^2 (9 - x^2 - 2x - 1) dx = \int_{-4}^2 (-x^2 - 2x + 8) dx = \left[-\frac{x^3}{3} - x^2 + 8x \right]_{-4}^2 = 36 \text{ u}^2$$

- c) Dibujamos $y = 9 - x^2$ y por simetría podemos hacer:



$$V = 2\pi \int_{-3}^3 (9-x^2)^2 dx = 2\pi \int_0^3 (81+x^4-18x^2) dx = 81x + \frac{x^5}{5} - 6x^3 \Big|_0^3 = \frac{1296\pi}{5} u^3$$

Problema 11.6.2 (3 puntos) Dados el plano $\pi \equiv 2x + ay + 4z + 25 = 0$ y la recta:

$$r \equiv x + 1 = \frac{y-1}{2} = \frac{z+3}{5}$$

se pide:

- (1 punto) Calcular los valores de a para los que la recta r está contenida en el plano π .
- (1 punto) Para el valor de $a = -2$, hallar el punto (o los puntos) que pertenecen a la recta perpendicular a π que pasa por $P(-3/2, 0, -11/2)$, y que dista (o distan) $\sqrt{6}$ unidades de π .
- (1 punto) Para $a = -2$, halla el seno del ángulo que forman r y π .

Solución:

$$r : \begin{cases} \vec{u}_r = (1, 2, 5) \\ P_r(-1, 1, -3) \end{cases} \quad \vec{u}_\pi = (2, a, 4)$$

- a) Si r está contenida en el plano $\pi \implies \vec{u}_r \perp \vec{u}_\pi \implies \vec{u}_r \cdot \vec{u}_\pi = 0$:

$$2 + 2a + 20 = 0 \implies a = -11$$

- b) Si $a = -2 \implies \pi : 2x - 2y + 4z + 25 = 0$ y sea s la recta perpendicular a π que pasa por $P(-3/2, 0, -11/2)$:

$$s : \begin{cases} \vec{u}_s = \vec{u}_\pi = 2(1, -1, 2) \\ P_s(-3/2, 0, -11/2) \end{cases} \implies s : \begin{cases} x = -3/2 + \lambda \\ y = -\lambda \\ z = -11/2 + 2\lambda \end{cases}$$

Un punto genérico de esta recta sería $P(-3/2 + \lambda, -\lambda, -11/2 + 2\lambda)$

$$d(P, \pi) = \frac{|-3 + 2\lambda + 2\lambda - 22 + 8\lambda + 25|}{\sqrt{4 + 4 + 16}} = \sqrt{6} \implies |\lambda| = 1 \implies \lambda = 1, \quad \lambda = -1$$

$$\text{Si } \lambda = 1 \implies \left(-\frac{1}{2}, -1, -\frac{7}{2}\right)$$

$$\text{Si } \lambda = -1 \implies \left(-\frac{5}{2}, 1, -\frac{15}{2}\right)$$

- c) El ángulo α que forma r y π es $90^\circ - \widehat{\vec{u}_r \vec{u}_\pi} \implies \sin \alpha = \cos(\widehat{\vec{u}_r \vec{u}_\pi})$

$$\sin \alpha = \cos(\widehat{\vec{u}_r \vec{u}_\pi}) = \frac{1 - 2 + 10}{\sqrt{30}\sqrt{6}} = \frac{3\sqrt{5}}{10}$$

Problema 11.6.3 (2 puntos) Se considera el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} 2x + my + 3z = 3 \\ x + y - 2z = 0 \\ 5x + (m+1)y + z = 9 \end{cases}$$

- a) (1,5 puntos) Discutir el sistema según los valores del parámetro m .
 b) (0,5 puntos) Resolver el sistema para el caso de $m = 0$.

Solución:

a)

$$\bar{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & m & 3 & 3 \\ 1 & 1 & -2 & 0 \\ 5 & m+1 & 1 & 9 \end{array} \right) \quad |A| = -2(2m+3) = 0 \implies m = -\frac{3}{2}$$

- Si $m \neq -3/2 \implies |A| \neq 0 \implies \text{Rango}(A) = \text{Rango}(\bar{A}) = 3 = n^\circ$ de incógnitas, luego en este caso el sistema será compatible determinado.

- Si $m = -3/2$

$$\bar{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3/2 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & -2 & 0 \\ 5 & -1/2 & 1 & 9 \end{array} \right) \implies \begin{cases} \text{Rango}(\bar{A}) = 3 \\ \text{Rango}(A) = 2 \end{cases} \implies$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 1 & -2 & 0 \\ 5 & 1 & 9 \end{vmatrix} = -30 \neq 0$$

Sistema Incompatible.

b) Si $m = 0$:

$$\begin{cases} 2x + 3z = 3 \\ x + y - 2z = 0 \\ 5x + y + z = 9 \end{cases} \implies \begin{cases} x = 3 \\ y = -5 \\ z = -1 \end{cases}$$

Problema 11.6.4 (2 puntos) Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & a \end{pmatrix}$ estudiar para que valores de a tiene inversa y calcularla siempre que sea posible.

Solución:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & a \end{pmatrix} \Rightarrow |A| = a$$

Si $a = 0 \Rightarrow |A| = 0 \Rightarrow$ la matriz no tiene inversa.

Si $a \neq 0 \Rightarrow |A| \neq 0 \Rightarrow$ la matriz si tiene inversa:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1/a - a & -1/a \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1/a & 1/a \end{pmatrix}$$

11.7. General-Septiembre 2010 - Opción A

Problema 11.7.1 (3 puntos) Dada la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} m-1 & 1 & m & 1 \\ 1 & m-1 & m & 1 \\ 1 & 1 & 2 & m-1 \end{pmatrix}$$

se pide:

- a) (2 puntos). Estudiar el rango de A según los valores del parámetro m
- b) (1 punto). En el caso de $m = 0$, resolver el sistema

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Solución

a)

$$|A_1| = \begin{vmatrix} m-1 & 1 & m \\ 1 & m-1 & m \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

$$|A_2| = \begin{vmatrix} m-1 & 1 & 1 \\ 1 & m-1 & 1 \\ 1 & 1 & m-1 \end{vmatrix} = m^3 - 3m^2 + 4 = 0 \Rightarrow m = -1, m = 2$$

$$|A_1| = \begin{vmatrix} m-1 & 1 & m \\ 1 & m-1 & m \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

$$|A_3| = \begin{vmatrix} m-1 & m & 1 \\ 1 & m & 1 \\ 1 & 2 & m-1 \end{vmatrix} = m^3 - 3m^2 + 4 = 0 \implies m = -1, m = 2$$

$$|A_4| = \begin{vmatrix} 1 & m & 1 \\ m-1 & m & 1 \\ 1 & 2 & m-1 \end{vmatrix} = -m^3 + 3m^2 - 4 = 0 \implies m = -1, m = 2$$

Si $m = -1$:

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & -2 \end{pmatrix} \implies \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 3 \neq 0 \implies \text{Rango}(A) = 2$$

Si $m = 2$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \implies \text{Rango}(A) = 1$$

Si $m \neq -1$ y $m \neq 2 \implies \text{Rango}(A) = 3$.

b) (1 punto). Si $m = 0$:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \implies$$

$$\begin{cases} -x+ & y+ & & t = & 0 \\ & x- & y+ & & t = & 0 \\ & x+ & y+ & 2z- & t = & 0 \end{cases} \implies \begin{cases} x = & -\lambda \\ y = & -\lambda \\ z = & \lambda \\ t = & 0 \end{cases}$$

Problema 11.7.2 (3 puntos) Dadas las rectas:

$$r_1 \equiv \begin{cases} y = 1 \\ z = 3 \end{cases} \quad r_2 \equiv \begin{cases} x = 0 \\ y - z = 0 \end{cases}$$

se pide:

- (2 puntos). Hallar la ecuación de la recta t que corta a r_1 y r_2 y es perpendicular a ambas.
- (1 punto). Hallar la mínima distancia entre las rectas r_1 y r_2 .

Solución:

$$r_1 \equiv \begin{cases} x = \lambda \\ y = 1 \\ z = 3 \end{cases} \implies \begin{cases} \overrightarrow{u_{r_1}} = (1, 0, 0) \\ P_{r_1}(0, 1, 3) \end{cases}$$

$$r_2 \equiv \begin{cases} x = 0 \\ y = \lambda \\ z = \lambda \end{cases} \implies \begin{cases} \overrightarrow{u_{r_2}} = (0, 1, 1) \\ P_{r_2}(0, 0, 0) \end{cases}$$

a)

$$\overrightarrow{u_t} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (0, -1, 1)$$

Se obtiene la recta t perpendicular a ambas, y que las corta, como intersección de dos planos:

$$\pi_1 : \begin{cases} \overrightarrow{u_t} = (0, -1, 1) \\ \overrightarrow{u_{r_1}} = (1, 0, 0) \\ P_{r_1}(0, 1, 3) \end{cases} \implies \begin{vmatrix} 0 & 1 & x \\ -1 & 0 & y-1 \\ 1 & 0 & z-3 \end{vmatrix} = 0 \implies y + z - 4 = 0$$

$$\pi_2 : \begin{cases} \overrightarrow{u_t} = (0, -1, 1) \\ \overrightarrow{u_{r_2}} = (0, 1, 1) \\ P_{r_2}(0, 0, 0) \end{cases} \implies \begin{vmatrix} 0 & 0 & x \\ -1 & 1 & y \\ 1 & 1 & z \end{vmatrix} = 0 \implies x = 0$$

$$t \equiv \begin{cases} y + z - 4 = 0 \\ x = 0 \end{cases}$$

b)

$$d(\overrightarrow{u_{r_1}}, \overrightarrow{u_{r_2}}) = \frac{[\overrightarrow{P_{r_2}P_{r_1}}, \overrightarrow{u_{r_1}}, \overrightarrow{u_{r_2}}]}{|\overrightarrow{u_{r_1}} \times \overrightarrow{u_{r_2}}|} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} u$$

$$\overrightarrow{P_{r_2}P_{r_1}} = (0, 1, 3), \quad |\overrightarrow{u_{r_1}} \times \overrightarrow{u_{r_2}}| = |(0, -1, 1)| = \sqrt{2}$$

$$[\overrightarrow{P_{r_2}P_{r_1}}, \overrightarrow{u_{r_1}}, \overrightarrow{u_{r_2}}] = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2$$

Problema 11.7.3 (2 puntos) Calcular los límites:

a) (1 punto). $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + \arctan x)^{a/x}$

b) (1 punto). $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x + 2e^x}{7x + 5e^x}$.

Solución:

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow 0} (1 + \arctan x)^{a/x} = \lambda \implies \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a \ln(1 + \arctan x)}{x} = \ln \lambda$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a \ln(1 + \arctan x)}{x} = \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{a}{1+x^2}}{1 + \arctan x} = a = \ln \lambda \implies \lambda = e^a$$

b)

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x + 2e^x}{7x + 5e^x} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3 + 2e^x}{7 + 5e^x} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2e^x}{5e^x} = \frac{2}{5}$$

Problema 11.7.4 (2 puntos) Calcular:

a) (1 punto). $\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{4-x^2}} dx$

b) (1 punto). $\int_0^\pi x \cos x dx$

Solución:

a)

$$\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{4-x^2}} dx = -\frac{1}{2} \int_0^1 (-2x)(4-x^2)^{-1/2} dx = -\sqrt{4-x^2} \Big|_0^1 = 2 - \sqrt{3}$$

b) $\int_0^\pi x \cos x dx$ se resuelve por partes $u = x$ y $dv = \cos x dx \implies du = dx$
y $v = \sin x$:

$$\int x \cos x dx = x \sin x - \int \sin x dx = x \sin x + \cos x + C$$

$$\int_0^\pi x \cos x dx = x \sin x + \cos x \Big|_0^\pi = -2$$

11.8. General-Septiembre 2010 - Opción B

Problema 11.8.1 (3 puntos) Dados el plano

$$\pi_1 \equiv 2x - 3y + z = a$$

y el plano π_2 determinado por el punto $P(0, 2, 4)$ y los vectores $v_1 = (0, 2, 6)$ y $v_2 = (1, 0, b)$, se pide:

a) (1 punto). Calcular los valores de a y b para que π_1 y π_2 sean paralelos.

b) (1 punto). Para $a = 1$ y $b = 0$ determinar las ecuaciones paramétricas de la recta intersección de π_1 y π_2 .

- c) (1 punto). Para $a = 4$ y $b = -2$ determinar los puntos que están a igual distancia de π_1 y π_2 .

Solución:

$$\pi_1 : 2x - 3y + z = a; \quad \pi_2 : \begin{vmatrix} 0 & 1 & x \\ 2 & 0 & y - 2 \\ 6 & b & z - 4 \end{vmatrix} = 0 \implies \pi_2 : bx + 3y - z - 2 = 0$$

- a) π_1 y π_2 son paralelos si:

$$\frac{2}{b} = \frac{-3}{3} = \frac{1}{-1} \neq \frac{a}{-2} \implies b = -2 \text{ y } a \neq 2$$

- b)

$$t : \begin{cases} 2x - 3y + z = 1 \\ 3y - z - 2 = 0 \end{cases} \implies t : \begin{cases} x = 3/2 \\ y = \lambda \\ z = -2 + 3\lambda \end{cases}$$

- c) $d(P, \pi_1) = d(P, \pi_2)$ donde $P(x, y, z)$:

$$\frac{|2x - 3y + z - 4|}{\sqrt{14}} = \frac{|-2x + 3y - z - 2|}{\sqrt{14}} \implies \begin{cases} 2x - 3y + z - 4 = -2x + 3y - z - 2 \implies \pi' : 2x - 3y + z - 1 = 0 \\ 2x - 3y + z - 4 = -(-2x + 3y - z - 2) \implies \text{no tiene solución} \end{cases}$$

Problema 11.8.2 (3 puntos) Los puntos $P(1, 2, 1)$, $Q(2, 1, 1)$ y $A(a, 0, 0)$ con $a > 3$, determinan un plano π que corta a los semiejes positivos de OY y OZ en los puntos B y C respectivamente. Calcular el valor de a para que el tetraedro determinado por los puntos A , B , C y el origen de coordenadas tenga volumen mínimo.

Solución:

$\overrightarrow{AP} = (1 - a, 2, 1)$ y $\overrightarrow{AQ} = (2 - a, 1, 1)$ y como punto elijo el $A(a, 0, 0)$:

$$\pi : \begin{vmatrix} 1 - a & 2 - a & x - a \\ 2 & 1 & y \\ 1 & 1 & z \end{vmatrix} = 0 \implies \pi : x + y + (a - 3)z - a = 0$$

Punto de corte de π con OY : hacemos $x = 0$ e $z = 0 \implies B(0, a, 0)$.

Punto de corte de π con OZ : hacemos $x = 0$ e $y = 0 \implies C(0, 0, a/(a - 3))$.

Tendremos los vectores:

$$\overrightarrow{OA} = (a, 0, 0), \quad \overrightarrow{OB} = (0, a, 0), \quad \overrightarrow{OC} = (0, 0, a/(a-3))$$

El volumen del tetraedro será:

$$V(a) = \frac{1}{6} \left| \begin{vmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a/(a-3) \end{vmatrix} \right| = \frac{a^3}{6a-18}$$

Para calcular el mínimo hacemos su derivada e igualamos a cero:

$$V'(a) = \frac{a^2(2a-9)}{6(a-3)^2} = 0 \implies a = 0, \quad a = \frac{9}{2}$$

El único punto a estudiar será el $a = 9/2$:

	$(-\infty, 9/2)$	$(9/2, \infty)$	$\implies$ Mínimo $\left(\frac{9}{2}, \frac{81}{8}\right)$
$V'(a)$	-	+	
$V(a)$	decrece	crece	

Luego los puntos pedidos son:

$$A\left(\frac{9}{2}, 0, 0\right), \quad B\left(0, \frac{9}{2}, 0\right), \quad C(0, 0, 3)$$

Problema 11.8.3 (2 puntos) Dado el sistema:

$$\begin{cases} x + 2y - z = 0 \\ 2x - y + z = 3 \end{cases}$$

se pide:

- (1 punto). Estudiar la compatibilidad del sistema
- (0,5 puntos). Añadir una ecuación para que el sistema sea compatible determinado. Razonar la respuesta.
- (0,5 puntos). Añadir una ecuación para que el sistema sea incompatible. Razonar la respuesta.

Solución:

a)

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 3 \end{array} \right) \implies$$

$\text{Rango } \overline{A} = \text{Rango}(A) = 2 < n^\circ \text{ de incógnitas}$, luego el sistema es compatible indeterminado.

- b) Se elige una ecuación linealmente independiente de las otras dos por ejemplo $x + z = 1$ (Los tres planos se tienen que cortar en un sólo punto)

$$\begin{cases} x + 2y - z = 0 \\ 2x - y + z = 3 \\ x + z = 1 \end{cases} \Rightarrow \overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right) \Rightarrow$$

$\text{Rango} \overline{A} = \text{Rango}(A) = 3 = \text{n}^\circ$ de incógnitas, luego el sistema es compatible determinado.

- c) Se elige una ecuación de forma que los términos en x , y y z dependan de las otras dos pero el término independiente no. (Los planos se cortarían dos a dos sin coincidir los tres en una recta). Por ejemplo: $3x + y = 1$

$$\begin{cases} x + 2y - z = 0 \\ 2x - y + z = 3 \\ 3x + y = 1 \end{cases} \Rightarrow \overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right) \Rightarrow$$

$\text{Rango} \overline{A} = 3 \neq \text{Rango}(A) = 2 =$ luego el sistema es incompatible.

Problema 11.8.4 (2 puntos) Dada la matriz:

$$\begin{pmatrix} -a & 0 & a \\ a & a-1 & 0 \\ 0 & a & a+2 \end{pmatrix}$$

Se pide:

- a) (1 punto). Estudiar el rango de A según los valores del parámetro a .
b) (1 punto). ¿Para qué valores de a existe la matriz inversa A^{-1} ? Calcular A^{-1} para $a = 1$.

Solución:

a)

$$\begin{vmatrix} -a & 0 & a \\ a & a-1 & 0 \\ 0 & a & a+2 \end{vmatrix} = a(2-a) = 0 \Rightarrow a = 0, a = 2$$

Si $a = 0$:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = -2 \Rightarrow \text{Rango}(A) = 2$$

Si $a = 2$:

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -2 \Rightarrow \text{Rango}(A) = 2$$

En conclusión, Si $a \neq 0$ y $a \neq 2 \Rightarrow \text{Rango}(A) = 3$. Por el contrario, si $a = 0$ o $a = 2 \Rightarrow \text{Rango}(A) = 2$.

b) Si $a \neq 0$ y $a \neq 2 \Rightarrow$ existe inversa.

Si $a = 0$ o $a = 2 \Rightarrow$ no existe inversa. Si $a = 1$:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -3 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

11.9. Específica-Septiembre 2010 - Opción A

Problema 11.9.1 (3 puntos) Se consideran las rectas:

$$r : \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 2 \\ z = 3 - \lambda \end{cases} \quad s : \begin{cases} x + 2y - z = -1 \\ x + y = -2 \end{cases}$$

Determinar la ecuación de la recta t que pasa por el punto $P(0, 1, -2)$ y corta a las rectas r y s .

Solución:

$$\vec{u}_s = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (1, -1, -1), \quad P_s(0, -2, -3)$$

$$r : \begin{cases} \vec{u}_r = (1, 0, -1) \\ P_r(1, 2, 3) \end{cases}$$

Vamos a encontrar la recta t como intersección de dos planos:

$$\pi_1 : \begin{cases} \overrightarrow{PP_r} = (1, 1, 5) \\ \vec{u}_r = (1, 0, -1) \\ P(0, 1, -2) \end{cases} \Rightarrow \pi_1 : \begin{vmatrix} 1 & 1 & x \\ 1 & 0 & y-1 \\ 5 & -1 & z+2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \pi_1 : x - 6y + z + 8 = 0$$

$$\pi_2 : \begin{cases} \overrightarrow{PP_s} = (0, -3, -1) \\ \vec{u}_s = (1, -1, -1) \\ P(0, 1, -2) \end{cases} \Rightarrow \pi_2 : \begin{vmatrix} 0 & 1 & x \\ -3 & -1 & y-1 \\ -1 & -1 & z+2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \pi_2 : 2x - y + 3z + 7 = 0$$

$$t : \begin{cases} x - 6y + z + 8 = 0 \\ 2x - y + 3z + 7 = 0 \end{cases}$$

Problema 11.9.2 (3 puntos) El sistema $AX = B$, donde

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ a & 5 & a \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix},$$

tiene diferentes soluciones según sea la matriz B

a) (1 punto). Determinar, si existen, el valor o valores de a para los que el sistema es compatible determinado (independientemente del valor de B).

b) (0,5 puntos). Si $a = 4$, y $B = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ b \end{pmatrix}$, determinar, si existen, el valor o los valores de b para los que el sistema es incompatible.

c) (1,5 puntos). Si $a = 4$, y $B = \begin{pmatrix} 0 \\ c \\ 10 \end{pmatrix}$, determinar, si existen, el valor o los valores de c para los que el sistema es compatible indeterminado. Resolver el sistema.

Solución:

a) $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ a & 5 & a \end{vmatrix} = 0$ sea cual sea el valor de a , luego el sistema no compatible determinado en ningún caso.

b)

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 4 & 5 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ b \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \\ 4 & 5 & 4 & b \end{array} \right)$$

$$|A_1| = |C_1 C_2 C_3| = 0, \quad |A_2| = |C_1 C_2 C_4| = 2b + 5 = 0 \Rightarrow b = -\frac{5}{2}$$

$$|A_3| = |C_1 C_3 C_4| = 0, \quad |A_2| = |C_2 C_3 C_4| = -2b - 5 = 0 \Rightarrow b = -\frac{5}{2}$$

El sistema es incompatible para cualquier valor distinto de $-5/2$.

c)

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 4 & 5 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ c \\ 10 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & c \\ 4 & 5 & 4 & 10 \end{array} \right)$$

Sabemos que $\text{Rango}(A) = 2$, luego tenemos que encontrar c de forma que la segunda fila sea combinación lineal de las otras dos, de esa forma $\text{Rango}(A) = \text{Rango}(\overline{A}) = 2 < n^\circ$ de incógnitas. Tendremos $F_2 = mF_1 + nF_3$:

$$(0, 2, 0, c) = m(1, 0, 1, 0) + n(4, 5, 4, 10) \Rightarrow \begin{cases} 0 = m + 4n \\ 2 = 5n \\ 0 = m + 4n \\ c = 10n \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} m = -4n \\ n = 2/5 \\ c = 10n \end{cases} \Rightarrow c = 4$$

Es decir cuando $c = 4$ tenemos que $F_2 = -8/5F_1 + 2/5F_3$ y, por tanto, el sistema es compatible indeterminado.

$$\begin{cases} x + z = 0 \\ 2y = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -\lambda \\ y = 2 \\ z = \lambda \end{cases}$$

Problema 11.9.3 (2 puntos) Obtener el valor de a para que

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 - 3}{x^2 + 3} \right)^{ax^2} = 4$$

Solución:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 - 3}{x^2 + 3} \right)^{ax^2} = [1^\infty] = e^\lambda$$

$$\lambda = \lim_{x \rightarrow \infty} (ax^2) \left(\frac{x^2 - 3}{x^2 + 3} - 1 \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-6ax^2}{x^2 + 3} = -6a$$

$$e^{-6a} = 4 \Rightarrow \ln e^{-6a} = \ln 4 \Rightarrow -6a = \ln 4 \Rightarrow a = -\frac{\ln 4}{6}$$

Problema 11.9.4 (2 puntos) Hallar:

a) (0,5 puntos). $\int_{14}^{16} (x-15)^8 dx$

b) (1,5 puntos). $\int_9^{11} (x-10)^{19}(x-9) dx$

Solución:

a) $\int_{14}^{16} (x-15)^8 dx = \left. \frac{(x-15)^9}{9} \right]_{14}^{16} = \frac{2}{9}$

b) $\int_9^{11} (x-10)^{19}(x-9) dx$ se resuelve por partes: $u = x-9 \implies du = dx$
y $dv = (x-10)^{19}dx \implies v = \frac{(x-10)^{20}}{20}$

$$\begin{aligned} \int (x-10)^{19}(x-9) dx &= \frac{(x-9)(x-10)^{20}}{20} - \int (x-10)^{20} dx = \\ &= \frac{(x-9)(x-10)^{20}}{20} - \frac{(x-10)^{21}}{21} + C \\ \int_9^{11} (x-10)^{19}(x-9) dx &= \left. \frac{(x-9)(x-10)^{20}}{20} - \frac{(x-10)^{21}}{21} \right]_9^{11} = \frac{2}{21} \end{aligned}$$

11.10. Específica-Septiembre 2010 - Opción B

Problema 11.10.1 (3 puntos) Dado el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x + y + kz = k \\ x + ky + z = k^2 \\ kx + y + z = 1 \end{cases}$$

se pide:

a) (2 puntos). Discutirlo según los valores del parámetro k .

b) (1 punto). Resolverlo para $k = 0$.

Solución:

a)

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & k & k \\ 1 & k & 1 & k^2 \\ k & 1 & 1 & 1 \end{array} \right); \quad |A| = -k^3 + 3k - 2 = 0 \implies k = 1, k = -2$$

- Si $k \neq 1$ y $k \neq -2 \implies |A| \neq 0 \implies \text{Rango}(A) = 3 = \text{Rango}(\overline{A}) = n^\circ$ de incógnitas, luego el sistema sería compatible determinado.

- Si $k = -2$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & -2 \\ 1 & -2 & 1 & 4 \\ -2 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right); \text{ y } \left| \begin{array}{ccc} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \end{array} \right| = -9 \neq 0$$

En este caso tenemos $|A| = 0$ y $\left| \begin{array}{cc} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{array} \right| = -3 \neq 0 \Rightarrow$
 $\text{Rango}(A) = 2$. Por tanto, $\text{Rango}(A) \neq \text{Rango}(\overline{A})$ y el sistema es incompatible.

- Si $k = -2$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right)$$

Claramente $\text{Rango}(A) = \text{Rango}(\overline{A}) = 1 < n^\circ$ de incógnitas y se trata de un sistema compatible indeterminado.

- b) Si $k = 0$:

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x + z = 0 \\ y + z = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -1/2 \\ y = 1/2 \\ z = 1/2 \end{cases}$$

Problema 11.10.2 (3 puntos) Dada la función:

$$f(x) = \frac{3x^2 + 5x - 20}{x + 5}$$

se pide:

- (1,5 puntos). Estudiar y obtener las asíntotas.
- (1 punto). Estudiar los intervalos de concavidad y convexidad.
- (0,5 puntos). Representar gráficamente la función.

Solución:

- a) Asíntotas:

- Verticales: $x = -5$

$$\lim_{x \rightarrow -5^+} \frac{3x^2 + 5x - 20}{x + 5} = \left[\frac{30}{0^+} \right] = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -5^-} \frac{3x^2 + 5x - 20}{x + 5} = \left[\frac{30}{0^-} \right] = -\infty$$

- Horizontales: No hay

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 + 5x - 20}{x + 5} = +\infty$$

- Oblicuas: $y = mx + n \implies y = 3x - 10$

$$m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 + 5x - 20}{x^2 + 5x} = 3$$

$$n = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x^2 + 5x - 20}{x + 5} - 3x \right) = -10$$

b) Estudio completo:

- Monotonía:

$$f'(x) = \frac{3(x^2 + 10x + 15)}{(x + 5)^2} = 0 \implies x = -5 + \sqrt{10}, \quad x = -5 - \sqrt{10}$$

	$(-\infty, -5 - \sqrt{10})$	$(-5 - \sqrt{10}, -5 + \sqrt{10})$	$(-5 + \sqrt{10}, \infty)$
$f'(x)$	+	-	+
$f(x)$	creciente	decreciente	creciente

Luego la función tiene un Máximo en el punto $(-8, 16; -43, 97)$ y un Mínimo en el punto $(-1, 84; -6, 03)$.

- Curvatura: $f''(x) = \frac{60}{(x + 5)^3} \neq 0$ Luego la función no tiene puntos de Inflexión.

	$(-\infty, -5)$	$(-5, \infty)$
$f''(x)$	-	+
$f(x)$	convexa $\cap$	cóncava $\cup$

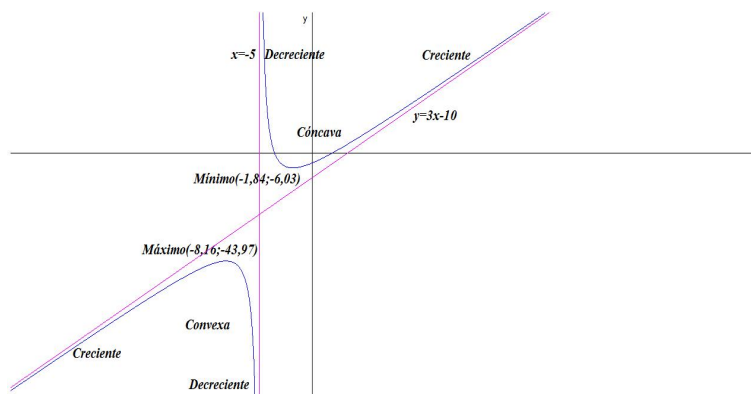
c) Representación gráfica:

Problema 11.10.3 (2 puntos) Dadas las rectas:

$$r : \begin{cases} 2x + y - z = -2 \\ x - 2y = -1 \end{cases} \quad s : \frac{x + 1}{1} = \frac{y}{-3} = \frac{z - 1}{2}$$

Se pide:

- (1 punto). Dados los puntos $A(1, 0, -1)$ y $B(a, 3, -3)$, determinar el valor de a para que la recta t que pasa por los puntos A y B , sea paralela a s .
- (1 punto). Hallar la ecuación del plano que contiene a r y es paralelo a s .



Solución:

$$r : \begin{cases} \vec{u}_r = (2, 1, 5) \\ P_r(1, 1, 5) \end{cases} \quad s : \begin{cases} \vec{u}_s = (1, -3, 2) \\ P_s(-1, 0, 1) \end{cases}$$

a)

$$t : \begin{cases} \vec{u}_t = (a - 1, 3, -2) \\ P_t(1, 0, -1) \end{cases} \quad y \quad t \parallel s \implies \lambda \vec{u}_t = \vec{u}_s$$

$$\lambda(a - 1, 3, -2) = (1, -3, 2) \implies a = 0, \quad \lambda = -1$$

b)

$$\pi : \begin{cases} \vec{u}_r = (2, 1, 5) \\ \vec{u}_s = (1, -3, 2) \\ P_r(1, 1, 5) \end{cases} \implies \pi : \begin{vmatrix} 2 & 1 & x - 1 \\ 1 & -3 & y - 1 \\ 5 & 2 & z - 1 \end{vmatrix} = 0 \implies$$

$$\pi : 17x + y - 7z + 17 = 0$$

Problema 11.10.4 (2 puntos) Hallar la ecuación del plano que pasa por el origen de coordenadas y es perpendicular a los planos:

$$\pi_1 : 5x - y - 7z = 1, \quad \pi_2 : 2x + 3y + z = 5$$

Solución:

$$\vec{u}_\pi \perp \vec{u}_{\pi_1}, \quad \vec{u}_\pi \perp \vec{u}_{\pi_2} \implies \vec{u}_\pi = \vec{u}_{\pi_1} \times \vec{u}_{\pi_2}$$

$$\vec{u}_\pi = \vec{u}_{\pi_1} \times \vec{u}_{\pi_2} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 5 & -1 & -7 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = (20, -19, 17)$$

El plano buscado tiene de ecuación $\pi : 20x - 19y + 17z + \lambda = 0$ y como pasa por el punto $(0, 0, 0) \implies \lambda = 0$. Luego el plano buscado es:

$$\pi : 20x - 19y + 17z = 0$$