Problemas de Selectividad de Matemáticas II
Comunidad de Madrid
(Resueltos)

Isaac Musat Hervás

22 de mayo de 2013

Capítulo 12

Año 2011

12.1. Modelo 2011 - Opción A

Problema 12.1.1 *(3 puntos)* Dado el sistema:

$$\left\{\begin{array}{rrrr} \lambda x & + & \lambda z = & 2 \\ x+ & \lambda y- & z = & 1 \\ x+ & 3y+ & z = & 2\lambda \end{array}\right.$$

se pide:

a) (1,5 puntos). Discutir el sistema según los valores del parámetro λ

b) (1,5 puntos). Resolver el sistema para $\lambda = 1$.

Solución:

a)

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{rrr|r} \lambda & 0 & \lambda & 2 \\ 1 & \lambda & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 2\lambda \end{array}\right) \quad |A| = -6\lambda = 0 \Longrightarrow \lambda = 0$$

- Si $\lambda \neq 0 \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow$Rango$(A)$ =Rango$(\overline{A}) = 3$ =nº de incógnitas, luego en este caso el sistema será compatible determinado.

- Si $\lambda = 0$

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{rrr|r} 0 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} \text{Rango}(\overline{A}) = 3 \\ \text{Rango}(A) = 2 \end{array}\right. \Longrightarrow$$

Sistema es Incompatible.

b)

$$\left\{\begin{array}{rrrr} x & + & z = & 2 \\ x+ & y- & z = & 1 \\ x+ & 3y+ & z = & 2 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 3/2 \\ y = 0 \\ z = 1/2 \end{array}\right.$$

Problema 12.1.2 *(3 puntos)* Dada la función:

$$f(x) = \frac{x-1}{(x+1)^2}$$

se pide:

a) (1,5 puntos). Obtener, si existen, los máximos y mínimos relativos, y las asíntotas.

b) (1,5 puntos). Calcular el área del recinto acotado comprendido entre la gráfica de f, el eje OX y las rectas $x = 0$, $x = 3$.

Solución:

a)
- Máximos y Mínimos:

$$f'(x) = \frac{3-x}{(x+1)^3} = 0 \Longrightarrow x = 3$$

	$(-\infty, -1)$	$(-1, 3)$	$(3, \infty)$
$f'(x)$	$-$	$+$	$-$
$f(x)$	decreciente $\searrow$	creciente $\nearrow$	decreciente $\searrow$

La función presenta un Máximo en el punto $\left(3, \dfrac{1}{8}\right)$. En el punto $x = -1$ la función no es continua, en ese punto habrá una posible asíntota vertical.

- Asíntotas:
  - Verticales: $x = -1$

$$\lim_{x\longrightarrow -1} \frac{x-1}{(x+1)^2} = \left[\frac{-2}{0}\right] = \pm\infty$$

$$\lim_{x\longrightarrow -1^+} \frac{x-1}{(x+1)^2} = \left[\frac{-2}{0^+}\right] = +\infty$$

$$\lim_{x\longrightarrow -1^-} \frac{x-1}{(x+1)^2} = \left[\frac{-2}{0^+}\right] = +\infty$$

  - Horizontales: $y = 0$

$$\lim_{x\longrightarrow \infty} \frac{x-1}{(x+1)^2} = 0$$

- Oblicuas: No hay al haber horizontales

- Comprobamos si hay algún punto de corte de esta función con el eje de abcisas que esté dentro del intervalo $[0,3]$:

$$\frac{x-1}{(x+1)^2} = 0 \Longrightarrow x = 1$$

Los límites de integración serán de 0 a 1 y de 1 a 3. Calculamos la integral indefinida de la función por descomposición polinómica:

$$\frac{x-1}{(x+1)^2} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{(x+1)^2} = \frac{A(x+1)+B}{(x+1)^2}$$

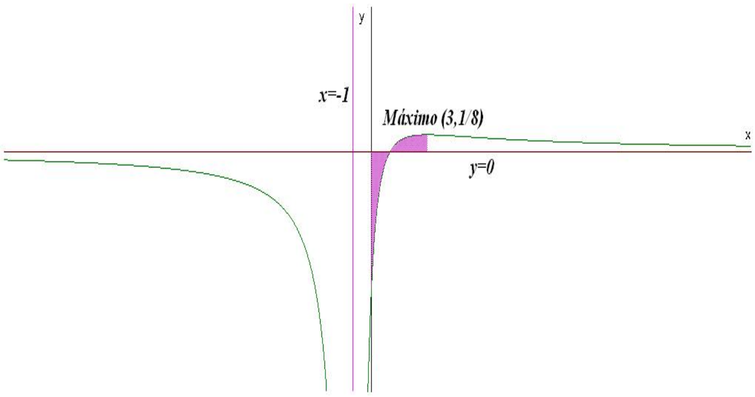
$$x-1 = A(x+1)+B \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x=-1 \Longrightarrow B=-2 \\ x=0 \Longrightarrow -1 = A+B \Longrightarrow A=1 \end{array} \right.$$

$$F(x) = \int \frac{x-1}{(x+1)^2}\,dx = \int \frac{1}{x+1}\,dx - 2\int \frac{1}{(x+1)^2}\,dx = \ln|x+1| + \frac{2}{x+1}$$

$$S_1 = \int_0^1 \frac{x-1}{(x+1)^2}\,dx = F(1) - F(0) = \ln 2 - 1$$

$$S_2 = \int_1^3 \frac{x-1}{(x+1)^2}\,dx = F(3) - F(1) = \ln 2 - \frac{1}{2}$$

$$S = |S_1| + |S_2| = 1 - \ln 2 + \ln 2 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\ u^2$$



Problema 12.1.3 *(2 puntos)* Dadas las rectas:

$$r \equiv \frac{x+1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z+1}{1}, \quad s \equiv \frac{x-5}{2} = \frac{y-4}{1} = \frac{z}{1}$$

se pide:

a) (1 punto). Estudiar la posición relativa de la rectas r y s.

b) (1 punto). Determinar la ecuación del plano π que contiene a las rectas r y s.

Solución:

$$r:\left\{\begin{array}{l}\overrightarrow{u_r}=(2,1,1)\\ P_r(-1,0,-1)\end{array}\right. \quad s:\left\{\begin{array}{l}\overrightarrow{u_s}=(2,1,1)\\ P_s(5,4,0)\end{array}\right. \quad \overrightarrow{P_rP_s}=(6,4,1)$$

a) $\left|\begin{array}{ccc}6&4&1\\2&1&1\\2&1&1\end{array}\right|=0$ y Rango$\left(\begin{array}{c}\overrightarrow{P_rP_s}\\ \overrightarrow{u_s}\end{array}\right)=2\Longrightarrow$ las rectas r y s son paralelas.

b)

$$\pi:\left\{\begin{array}{l}\overrightarrow{u_r}=(2,1,1)\\ \overrightarrow{P_rP_s}=(6,4,1)\\ P_r(-1,0,-1)\end{array}\right. \Longrightarrow \left|\begin{array}{ccc}2&6&x+1\\1&4&y\\1&1&z+1\end{array}\right|=0\Longrightarrow 3x-4y-2z+1=0$$

Problema 12.1.4 *(2 puntos)* Dados los planos $\alpha\equiv 2x+y+2z+1=0$ y $\beta\equiv x-2y+6z=0$, se pide:

a) (1 punto). Obtener las ecuaciones paramétricas de la recta r determinada por la intersección de α con β.

b) (1 punto). Determinar el plano γ que es paralelo al plano α y pasa por el punto $(\sqrt{2},1,0)$

Solución:

a)

$$r:\left\{\begin{array}{c}2x+y+2z+1=0\\ x-2y+6z=0\end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{rrr}x= & 0+ & 2\lambda\\ y= & -\dfrac{3}{5}- & 2\lambda\\ z= & -\dfrac{1}{5}- & \lambda\end{array}\right.$$

Un punto de r puede ser: $\left(0,-\dfrac{3}{5},-\dfrac{1}{5}\right)$ y

$$\overrightarrow{u_r}=\left|\begin{array}{ccc}i&j&k\\2&1&2\\1&-2&6\end{array}\right|=5(2,-2,-1)$$

b) $\gamma: 2x+y+2z+\lambda=0$ y contiene al punto $(\sqrt{2},1,0)$, luego:

$$2\sqrt{2}+1+\lambda=0\Longrightarrow\lambda=-(1+2\sqrt{2})\Longrightarrow$$

$$\gamma: 2x+y+2z-(1+2\sqrt{2})=0$$

12.2. Modelo 2011 - Opción B

Problema 12.2.1 *(3 puntos)* Dadas las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -2 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Se pide:

a) (1 punto). Calcular $A^2 - 4A + 3I$

b) (1 punto). Demostrar que la matriz inversa A^{-1} de A es $\dfrac{1}{3}(4I - A)$.

c) (1 punto). Hallar la matriz inversa de la matriz $A - 2I$.

Solución:

a)

$$A^2-4A+3I = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -2 & 2 & 3 \end{pmatrix}^2 - 4\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -2 & 2 & 3 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

b)

$$A^2-4A+3I = O \Longrightarrow A(A-4I) = -3I \Longrightarrow A\left(-\frac{1}{3}(A-4I)\right) = I \Longrightarrow$$

$$A^{-1} = \frac{1}{3}(4I - A)$$

c)

$$(A-2I)^2 = (A-2I)(A-2I) = A^2-2IA-2AI+4I^2 = A^2-4A+4I =$$

$$A^2 - 4A + 3I + I = O + I = I \Longrightarrow (A-2I)^{-1} = A - 2I$$

.

Problema 12.2.2 *(3 puntos)* Dados los puntos $A(1,-3,0)$, $B(3,1,-2)$,$C(7,2,3)$, $D(5,-2,5)$ y $E(1,0,2)$, se pide:

a) (1 punto). Demostrar que los puntos A, B, C y D son coplanarios.

b) (1 punto). Demostrar que el polígono $ABCD$ es un paralelogramo y calcular su área.

c) (1 punto). Hallar la distancia del punto E al plano π determinado por los puntos A, B, C y D

Solución:

a)

$$\overrightarrow{AB} = (2, 4, -2),\ \overrightarrow{AC} = (6, 5, 3),\ \overrightarrow{AD} = (4, 1, 5)$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 & -2 \\ 6 & 5 & 3 \\ 4 & 1 & 5 \end{vmatrix} = 0 \Longrightarrow \text{son coplanarios}$$

Los tres vectores construidos son linealmente dependientes y, por tanto, están en el mismo plano.

b)

$$\begin{array}{l} \overrightarrow{AB} = (2, 4, -2) = \sqrt{24} \\ \overrightarrow{BC} = (4, 1, 5) = \sqrt{42} \\ \overrightarrow{CD} = (-2, -4, 2) = \sqrt{24} \\ \overrightarrow{AD} = (4, 1, 5) = \sqrt{42} \end{array}$$

Los lados son iguales dos a dos, luego se trata de un paralelogramo.

$$S = |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD}| = |\begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 4 & -2 \\ 4 & 1 & 5 \end{vmatrix}| = |2(11, -9, -7)| = 2\sqrt{251}\, u^2$$

c)

$$\pi : \begin{cases} \overrightarrow{AB} = (2, 4, -2) \\ \overrightarrow{AD} = (4, 1, 5) \\ A(1, -3, 0) \end{cases} \Longrightarrow \begin{vmatrix} 2 & 4 & x-1 \\ 4 & 1 & y+3 \\ -2 & 5 & z \end{vmatrix} = 0 \Longrightarrow 11x - 9y - 7z - 38 = 0$$

$$d(E, \pi) = \frac{|11 - 14 - 38|}{\sqrt{251}} = \frac{41\sqrt{251}}{\sqrt{251}}\, u$$

Problema 12.2.3 *(2 puntos)* Calcular los siguientes límites:

a) (1 punto). $\lim\limits_{x \longrightarrow 0^+} xe^{1/x}$

b) (1 punto). $\lim\limits_{x \longrightarrow 0} \dfrac{\sqrt{1 + \tan x} - \sqrt{1 - \tan x}}{x}$

Solución:

a)

$$\lim_{x\longrightarrow 0^+} xe^{1/x} = [0\cdot\infty] = \lim_{x\longrightarrow 0^+} \frac{e^{1/x}}{1/x} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x\longrightarrow 0^+} \frac{(-1/x^2)e^{1/x}}{(-1/x^2)} =$$

$$\lim_{x\longrightarrow 0^+} e^{1/x} = +\infty$$

b)

$$\lim_{x\longrightarrow 0} \frac{\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1-\tan x}}{x} = \left[\frac{0}{0}\right] =$$

$$\lim_{x\longrightarrow 0} \left(\frac{1/\cos^2 x}{2\sqrt{1+\tan x}} - \frac{-1/\cos^2 x}{2\sqrt{1-\tan x}}\right) = 1$$

Problema 12.2.4 *(2 puntos)* Dada la función $f(x) = \frac{1}{2} - \sin x$, calcular el área del recinto acotado comprendido entre la gráfica de f, el eje OX y las rectas $x = 0$, $x = \frac{\pi}{2}$.

Solución:

Comprobamos si hay algún punto de corte de esta función con el eje de abcisas que esté dentro del intervalo $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$:

$$\frac{1}{2} - \sin x = 0 \Longrightarrow x = \frac{\pi}{6}$$

Los límites de integración serán de 0 a $\pi/6$ y de $\pi/6$ a $\pi/2$. Calculamos la integral indefinida:

$$F(x) = \int \left(\frac{1}{2} - \sin x\right)\, dx = \frac{x}{2} + \cos x$$

$$S_1 = \int_0^{\pi/6} \left(\frac{1}{2} - \sin x\right)\, dx = F(\pi/6) - F(0) = \frac{\pi}{12} + \frac{\sqrt{3}}{2} - 1$$

$$S_2 = \int_{\pi/6}^{\pi/2} \left(\frac{1}{2} - \sin x\right)\, dx = F(\pi/2) - F(\pi/6) = \frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$S = |S_1| + |S_2| = \frac{\pi}{12} + \frac{\sqrt{3}}{2} - 1 + \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{6} = \sqrt{3} - 1 - \frac{\pi}{12} = 0,47$$

12.3. Junio 2011 - Opción A

Problema 12.3.1 *(3 puntos)* Dada la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 2a & -2 & a^2 \\ -1 & a & -1 \\ 2 & 1 & a \end{pmatrix}$$

Se pide:

a) (1 punto). Calcular el rango de A en función de los valores de a.

b) (1 punto). En el caso de $a = 2$, discutir el sistema $A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ b \end{pmatrix}$ en función de los valores de b, y resolverlo cuando sea posible.

c) (1 punto). En el caso de $a = 1$, resolver el sistema $A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$

Solución:

a) $|A| = 4 - a^2 = 0 \Longrightarrow a = \pm 2$, por tanto, si $a \neq \pm 2 \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow$ Rango$(A) = 3$.

Si $a = 2$:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 4 \\ -1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \Longrightarrow |A| = 0 \text{ y } \begin{vmatrix} 4 & -2 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 6 \neq 0$$

Luego en este caso Rango$(A) = 2$.

Si $a = -2$:

$$A = \begin{pmatrix} -4 & -2 & 4 \\ -1 & -2 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix} \Longrightarrow |A| = 0 \text{ y } \begin{vmatrix} -4 & -2 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} = 6 \neq 0$$

Luego en este caso Rango$(A) = 2$

b) Si $a = 2$:

$$\begin{pmatrix} 4 & -2 & 4 \\ -1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ b \end{pmatrix}$$

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{rrrr} 4 & -2 & 4 & 2 \\ -1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & b \end{array}\right) \Longrightarrow |A| = 0 \quad \left|\begin{array}{rr} 4 & -2 \\ -1 & 2 \end{array}\right| = 6 \neq 0$$

Luego el Rango$(A) = 2$ independientemente del valor de b. Tal y como se había estudiado en el apartado anterior.

$$\left|\begin{array}{rrr} -2 & 4 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & b \end{array}\right| = 6(b-3) = 0 \Longrightarrow b = 3$$

Si $b \neq 3 \Longrightarrow$ Rango$(\overline{A}) = 3$ y el sistema sería Incompatible, por el contrario, si $b = 3$ el Rango$(\overline{A}) = 2$, y en este caso sería Compatible Indeterminado. En este último caso:

$$\left\{\begin{array}{l} -x + 2y - z = 1 \\ 2x + y + 2z = 3 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 1 - \lambda \\ y = 1 \\ z = \lambda \end{array}\right.$$

c)

$$\left(\begin{array}{rrr} 2 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{array}\right)\left(\begin{array}{c} x \\ y \\ z \end{array}\right) = \left(\begin{array}{r} -1 \\ 2 \\ 2 \end{array}\right) \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 2 \\ y = 1 \\ z = -3 \end{array}\right.$$

Problema 12.3.2 *(3 puntos)*

a) (1,5 puntos). Hallar el volumen del tetraedro que tiene un vértice en el origen y los otros tres vértices en las intersecciones de las rectas

$$r_1 \equiv \; x = y = z, \;\; r_2 \equiv \left\{\begin{array}{l} y = 0 \\ z = 0 \end{array}\right., \;\; r_3 \equiv \left\{\begin{array}{l} x = 0 \\ z = 0 \end{array}\right.$$

con el plano $\pi \equiv 2x + 3y + 7z = 24$.

b) (1,5 puntos). Hallar la recta s que corta perpendicularmente a las rectas

$$r_4 \equiv \frac{x+1}{1} = \frac{y-5}{2} = \frac{z+1}{-2}, \;\; r_5 \equiv \frac{x}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-1}{-1}$$

Solución:

a) LLamamos A al punto intersección de π con r_1:

$$2x + 3x + 7x = 24 \Longrightarrow x = 2 \Longrightarrow A(2, 2, 2)$$

LLamamos B al punto intersección de π con r_2:

$$2x = 24 \Longrightarrow x = 12 \Longrightarrow B(12, 0, 0)$$

LLamamos C al punto intersección de π con r_3:

$$3y = 24 \Longrightarrow y = 8 \Longrightarrow B(0,8,0)$$

Tendremos con el origen los siguientes vectores:

$$\overrightarrow{OA} = (2,2,2)\ \ \overrightarrow{OB} = (12,0,0)\ \ \overrightarrow{OC} = (0,8,0)$$

$$V = \frac{1}{6}|\begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 12 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \end{vmatrix}| = 32\,u^3$$

b) Calculamos un vector perpendicular a las dos rectas:

$$\overrightarrow{u_t} = \overrightarrow{u_{r_4}} \times \overrightarrow{u_{r_5}} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 2 & -2 \\ 2 & 3 & -1 \end{vmatrix} = (4,-3,-1)$$

Calculamos la recta perpendicular a estas rectas como intersección de dos planos:

$$\pi_1 : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_t} = (4,-3,-1) \\ \overrightarrow{u_{r_4}} = (1,2,-2) \\ P_{r_4}(-1,5,-1) \end{array} \right. \Longrightarrow \pi_1 : \begin{vmatrix} 4 & 1 & x+1 \\ -3 & 2 & y-5 \\ -1 & -2 & z+1 \end{vmatrix} = 0 \Longrightarrow \pi_1 : 8x+7y+11z-16 = 0$$

$$\pi_2 : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_t} = (4,-3,-1) \\ \overrightarrow{u_{r_5}} = (2,3,-1) \\ P_{r_4}(0,-1,1) \end{array} \right. \Longrightarrow \pi_1 : \begin{vmatrix} 4 & 2 & x \\ -3 & 3 & y+1 \\ -1 & -1 & z-1 \end{vmatrix} = 0 \Longrightarrow \pi_1 : 3x+y+9z-8 = 0$$

La recta buscada será:

$$t : \left\{ \begin{array}{l} 8x + 7y + 11z - 16 = 0 \\ 3x + y + 9z - 8 = 0 \end{array} \right.$$

Problema 12.3.3 *(2 puntos)* Se pide:

a) (1 punto). Calcular la integral $\displaystyle\int_1^3 x\sqrt{4+5x^2}\,dx$.

b) (1 punto). Hallar los valores mínimo y máximo absolutos de la función $f(x) = \sqrt{12-3x^2}$.

Solución:

a)

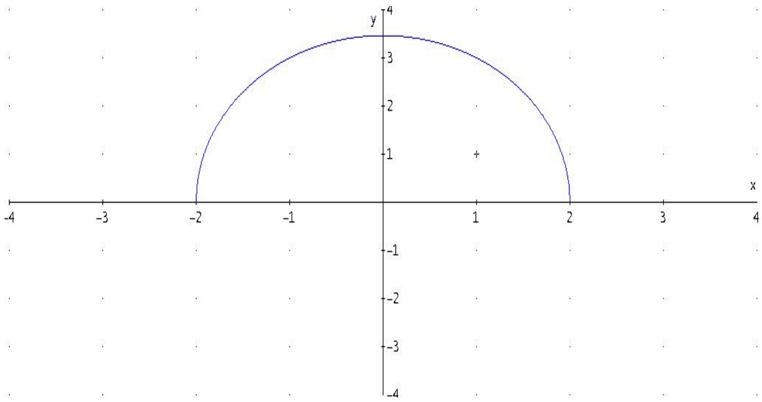
$$\int_1^3 x\sqrt{4+5x^2}\,dx = \left.\frac{\sqrt{(4+5x^2)^3}}{15}\right]_1^3 = \frac{316}{15}$$

b) El dominio de la función viene dado por la inecuación $12-3x^2 \geq 0 \Longrightarrow$ $Dom(f) = [-2, 2]$ y su signo es siempre positivo, la función siempre está por encima del eje de abcisas; como en $x = \pm 2$ la función vale cero en estos dos puntos que serán mínimos relativos. Por otra parte:

$$f'(x) = -\frac{\sqrt{3}x}{\sqrt{4-x^2}} = 0 \Longrightarrow x = 0$$

	$(-2, 0)$	$(0, 2)$
$f'(x)$	$+$	$-$
$f(x)$	creciente $\nearrow$	decreciente $\searrow$

Luego hay un máximo en el punto $(0, 2\sqrt{3})$ que, por ser el único, será un máximo absoluto. Alcanzará Un mínimo absoluto en los puntos en los que $f(x) = 0 \Longrightarrow (-2, 0)$ y $(2, 0)$.



Problema 12.3.4 *(2 puntos)* Se pide:

a) (1 punto). Calcular el siguiente límite:

$$\lim_{x\longrightarrow\infty} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+\sqrt{x}}}$$

b) (1 punto). Demostrar que la ecuación $4x^5 + 3x + m = 0$ sólo tiene una raiz real, cualquiera que sea el número m. Justificar la respuesta indicando qué teoremas se usan.

Solución:

a)
$$\lim_{x\longrightarrow\infty} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+\sqrt{x}}} = \lim_{x\longrightarrow\infty} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}} = 1$$

b) Sea cual sea el valor de m, la función $f(x) = 4x^5 + 3x + m$ es una función polinómica y, por tanto, continua y derivable en R.

$$\lim_{x\longrightarrow\infty}(x^5 + 3x + m) = \infty \;\text{ y }\; \lim_{x\longrightarrow-\infty}(x^5 + 3x + m) = -\infty$$

Luego la función cambia de signo en el intervalo $(-\infty, \infty)$ y, por el teorema de Bolzano, necesariamente tiene cortar al eje de abcisas.

$$f'(x) = 20x^4 + 3 \geq 0 \quad \forall x \in R$$

Luego la función es siempre creciente, en consecuencia sólo puede haber un punto de corte (Teorema de Rolle).

12.4. Junio 2011 - Opción B

Problema 12.4.1 *(3 puntos)* Dada la función:

$$f(x) = \frac{ax^4 + 1}{x^3}$$

Se pide:

a) (1 punto). Determinar el valor de a para el que la función posee un mínimo relativo en $x = 1$. Para este valor de a obtener los otros puntos en que f tiene un extremo relativo.

b) (1 punto). Obtener las asíntotas de de la gráfica de $y = f(x)$ para $a = 1$.

c) (1 punto). Esbozar la gráfica de la función para $a = 1$.

Solución:

a)

$$f'(x) = \frac{ax^4 - 3}{x^4} = 0 \text{ y } f'(1) = 0 \Longrightarrow a = 3$$

$$f''(x) = \frac{12}{x^5} \Longrightarrow f''(1) = 12 > 0$$

Luego en $x = 1$ la función tiene un mínimo relativo.

$$f'(x) = \frac{3x^4 - 3}{x^4} = 0 \Longrightarrow 3x^4 = 3 \Longrightarrow x = \pm 1$$

En $x = -1$:

$$f''(x) = \frac{12}{x^5} \Longrightarrow f''(-1) = -12 < 0$$

Luego en $x = -1$ la función tiene un máximo relativo.

b) Si $a = 1$:

$$f(x) = \frac{x^4 + 1}{x^3}$$

Asíntotas:

- Verticales: $x = 0$

$$\lim_{x \longrightarrow 0} \frac{x^4 + 1}{x^3} = \left[\frac{1}{0}\right] = \pm\infty$$

$$\lim_{x \longrightarrow 0^+} \frac{x^4 + 1}{x^3} = \left[\frac{1}{0^+}\right] = +\infty$$

$$\lim_{x \longrightarrow 0^-} \frac{x^4 + 1}{x^3} = \left[\frac{1}{0^+}\right] = -\infty$$

- Horizontales: No hay

$$\lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{x^4 + 1}{x^3} = \infty$$

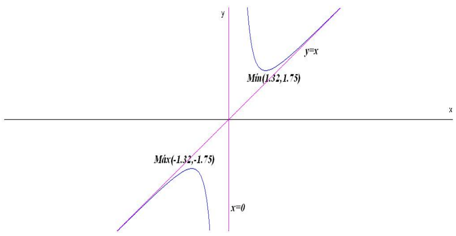
- Oblicuas: $y = mx + n$

$$m = \lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{x^4 + 1}{x^4} = 1$$

$$n = \lim_{x \longrightarrow \infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \longrightarrow \infty} \left(\frac{x^4 + 1}{x^3} - x\right) = 0$$

$$y = x$$

c) La gráfica para $a = 1$:



Se trata de una función IMPAR, bastaría con calcular sus extremos

$$f'(x) = \frac{x^4 - 3}{x^4} = 0 \Longrightarrow x = -1,32, \quad x = 1,32$$

	$(-\infty; -1,32)$	$(-1,32; 1,32)$	$(1,32; \infty)$
$f'(x)$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	creciente $\nearrow$	decreciente $\searrow$	creciente $\nearrow$

La función tiene un máximo relativo en el punto $(-1,32; -1,75)$ y un mínimo relativo en el punto $(1,32; 1,75)$

Problema 12.4.2 *(3 puntos)*

a) (1,5 puntos). Discutir el sistema de ecuaciones $AX = B$, donde

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & (m-1) \\ 0 & m-1 & 1 \\ m-2 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} m \\ m \\ m+2 \end{pmatrix}$$

según los valores de m.

b) (1,5 puntos). Resolver el sistema en los casos $m = 0$ y $m = 1$.

Solución:

a)

$$\left\{ \begin{array}{rrrr} & y+ & (m-1)z = & m \\ & (m-1)y+ & z = & m \\ (m-2)x+ & & = & m+2 \end{array} \right.$$

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & (m-1) & m \\ 0 & m-1 & 1 & m \\ m-2 & 0 & 0 & m+2 \end{array} \right) \quad |A| = -m(m-2)^2 = 0 \Longrightarrow m = 0, \ \ m = 2$$

- Si $m \neq 0$ y $m \neq 2 \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow$Rango$(A)$ =Rango$(\overline{A})$ = 3 =n$^{\text{o}}$ de incógnitas, luego en este caso el sistema será compatible determinado.

- Si $m = 0$

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 2 \end{array} \right) \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Rango}(\overline{A}) = 2 \\ \text{Rango}(A) = 2 \end{array} \right. \Longrightarrow$$

  Sistema es Compatible Indeterminado.

- Si $m = 2$

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{array} \right) \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Rango}(\overline{A}) = 2 \\ \text{Rango}(A) = 1 \end{array} \right. \Longrightarrow$$

  Sistema es Incompatible.

b) Si $m = 0$

$$\left\{\begin{array}{rrrr} & y- & z = & 0 \\ -2x & & = & 2 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = -1 \\ y = \lambda \\ z = \lambda \end{array}\right.$$

Si $m = 1$

$$\left\{\begin{array}{rrrr} & y & = & 1 \\ & & z = & 1 \\ -x & & = & 3 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = -3 \\ y = 1 \\ z = 1 \end{array}\right.$$

Problema 12.4.3 *(3 puntos)* Dados los planos

$$\pi_1 \equiv 2x + y - 2z = 1, \quad \pi_2 \equiv x - y + 2z = 1$$

se pide:

a) (0,5 puntos). Estudiar su posición relativa.

b) (1,5 puntos). En caso de que los planos sean paralelos hallar la distancia entre ellos, en caso de que se corten, hallar un punto y un vector de dirección de la recta que determinan.

Solución:

a)

$$\frac{2}{1} \neq \frac{1}{-1} \Longrightarrow \text{se cortan}$$

b)

$$t : \left\{\begin{array}{c} 2x + y - 2z = 1 \\ x - y + 2z = 1 \end{array}\right. \quad \left\{\begin{array}{c} x = 2/3 \\ y = -1/3 + 2\lambda \\ z = \lambda \end{array}\right.$$

La recta intersección viene determinada por el punto $P_t\left(\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, 0\right)$ y el vector director $\overrightarrow{u_t} = (0, 2, 1)$.

Otra manera de calcular estos datos sería $\overrightarrow{u_t} = \overrightarrow{u_{\pi_1}} \times \overrightarrow{u_{\pi_2}}$, y el punto P_t, dando un valor cualquiera (mismamente $z = 0$) y resolviendo el sistema que queda.

Problema 12.4.4 *(2 puntos)* Se pide:

a) (0,75 puntos). Hallar la ecuación del plano π_1 que pasa por los puntos $A(1, 0, 0)$, $B(0, 2, 0)$ y $C(0, 0, 1)$.

b) (0,75 puntos). Hallar la ecuación del plano π_2 que contiene al punto $P(1, 2, 3)$ y es perpendicular al vector $\overrightarrow{v} = (-2, 1, 1)$.

c) (0,5 puntos). Hallar el volumen del tetraedro de vértices A, B, C y P.

Solución:

a)

$$\pi_1 : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{AB} = (-1,2,0) \\ \overrightarrow{AC} = (-1,0,1) \\ \text{A(1,0,0)} \end{array} \right. \Longrightarrow \pi_1 : \left| \begin{array}{ccc} -1 & -1 & x-1 \\ 2 & 0 & y \\ 0 & 1 & z \end{array} \right| = 0 \Longrightarrow 2x+y+2z-2 = 0$$

b) $-2x + y + z + \lambda = 0 \Longrightarrow -2 + 2 + 3 + \lambda = 0 \Longrightarrow \lambda = -3$:

$$\pi_2 : 2x - y - z + 3 = 0$$

c) $\overrightarrow{AP} = (0,2,3)$:

$$V = \frac{1}{6}|\left| \begin{array}{ccc} -1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \end{array} \right|| = \frac{1}{6}|-8| = \frac{4}{3}\, u^3$$

12.5. Septiembre 2011 - Opción A

Problema 12.5.1 *(3 puntos).*

a) (1 punto) Calcular los límites:

$$\lim_{x\longrightarrow -\infty} \frac{2}{4 + e^{-(x+1)}} \quad \lim_{x\longrightarrow +\infty} \frac{2}{4 + e^{-(x+1)}}$$

b) (1 punto) Calcular la integral: $\displaystyle\int_0^1 \frac{x}{1+3x^2}\, dx$

c) (1 punto) Hallar el dominio de definición de la función $f(x) = \sqrt{x^2 + 9x + 14}$. Hallar el conjunto de puntos en los que la función f tiene derivada.

Solución:

a)

$$\lim_{x\longrightarrow +\infty} \frac{2}{4 + e^{-(x+1)}} = \frac{2}{4+0} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\longrightarrow -\infty} \frac{2}{4 + e^{-(x+1)}} = \frac{2}{\infty} = 0$$

b)

$$\int_0^1 \frac{x}{1+3x^2}\, dx = \frac{1}{6} \ln|1 + 3x^2|\Big]_0^1 = \frac{1}{3} \ln 2$$

c) $x^2 + 9x + 14 \geq 0 \Longrightarrow Dom(f) = (-\infty, -7] \cup [-2, \infty)$.

$$f'(x) = \frac{2x - 9}{2\sqrt{x^2 + 9x + 14}}$$

La función tiene derivada en $(-\infty, -7) \cup (-2, \infty)$.

Problema 12.5.2 *(3 puntos).* Dados los planos

$$\pi_1 : 2x + 3y + z - 1 = 0; \quad \pi_2 : 2x + y - 3z - 1 = 0,$$

y la recta

$$r : \frac{x-1}{2} = y + 1 = \frac{z+2}{2};$$

se pide:

a) (1 punto). El punto o puntos de r que equidistan de π_1 y π_2.

b) (1 punto). El volumen del tetraedro que π_1 forma con los planos coordenados XY, XZ e YZ.

c) (1 punto). La proyección ortogonal de r sobre el plano π_2.

Solución:

$$r : \frac{x-1}{2} = y + 1 = \frac{z+2}{2} \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 1 + 2\lambda \\ y = -1 + \lambda \\ z = -2 + 2\lambda \end{array} \right.$$

a) $d(P_r, \pi_1) = d(P_r, \pi_2)$:

$$\frac{|2(1+2\lambda) + 3(-1+\lambda) + (-2+2\lambda) - 1|}{\sqrt{4+9+1}} = \frac{|2(1+2\lambda) + (-1+\lambda) - 3(-2+2\lambda) - 1|}{\sqrt{4+1+9}}$$

$$|-4+9\lambda| = |6-\lambda| \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} -4 + 9\lambda = 6 - \lambda \Longrightarrow \lambda = 1 \Longrightarrow P'_r(3, 0, 0) \\ -4 + 9\lambda = -6 + \lambda \Longrightarrow \lambda = -1/4 \Longrightarrow P'_r(1/2, -5/4, -5/2) \end{array} \right.$$

b) Corte de π_1 con el eje OX: hacemos $y = 0$ y $z = 0 \Longrightarrow A(1/2, 0, 0)$.

Corte de π_1 con el eje OY: hacemos $x = 0$ y $z = 0 \Longrightarrow B(0, 1/3, 0)$.

Corte de π_1 con el eje OZ: hacemos $x = 0$ e $y = 0 \Longrightarrow C(0, 0, 1)$.

Los vectores que forman estos puntos con el origen son los siguientes:

$$\overrightarrow{OA} = (1/2, 0, 0); \quad \overrightarrow{OB} = (0, 1/3, 0); \quad \overrightarrow{OC} = (0, 0, 1)$$

$$V = \frac{1}{6} \left| \begin{array}{ccc} 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right| = \frac{1}{36} \ u^2$$

c) Obtenemos esta recta como intesección de dos planos, uno de ellos será π_2 y el otro será un plano π perpendicular a π_2 y que contiene a r:

$$\pi : \begin{cases} \overrightarrow{u_{\pi_2}} = (2,1,-3) \\ \overrightarrow{u_r} = (2,1,2) \\ P_r(1,-1,-2) \end{cases} \Longrightarrow \pi : \begin{vmatrix} 2 & 2 & x-1 \\ 1 & 1 & y+1 \\ -3 & 2 & z+2 \end{vmatrix} = 0 \Longrightarrow \pi : x-2y-3=0$$

$$\text{Proyección} : \begin{cases} x-2y-3=0 \\ 2x+y-3z-1=0 \end{cases}$$

Problema 12.5.3 *(2 puntos).* Calcular el rango de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -1 & 1 & a \\ 2 & 0 & -a \\ a+2 & 0 & a \end{pmatrix}$$

según los valores del parámetro a.

Solución:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -1 & 1 & a \\ 2 & 0 & -a \end{vmatrix} = 2(a+2) = 0 \Longrightarrow a = -2$$

Si $a = -2$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -1 & 1 & -2 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \text{ y } |A_2| = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -2 \end{vmatrix} = -8 \neq 0$$

Luego Rango$(A) = 3, \ \forall a \in \Re$

Problema 12.5.4 *(2 puntos).* Dada la matriz

$$M = \begin{pmatrix} \sin x & \cos x & 0 \\ \cos x & -\sin x & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

se pide:

a) (0,5 puntos). Calcular el determinante de la matriz M.

b) (1 punto). Hallar la matriz M^2.

c) (0,5 puntos). Hallar la matriz M^{25}.

Solución:

a)

$$|M| = \begin{vmatrix} \sin x & \cos x & 0 \\ \cos x & -\sin x & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sin x & \cos x \\ \cos x & -\sin x \end{vmatrix} = -(\sin^2 x + \cos^2 x) = -1$$

b)

$$M^2 = \begin{pmatrix} \sin x & \cos x & 0 \\ \cos x & -\sin x & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sin x & \cos x & 0 \\ \cos x & -\sin x & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

c)

$$M^n = \left\{ \begin{array}{ccc} M & \text{si} & n \text{ impar} \\ I & \text{si} & n \text{ par} \end{array} \right. \Longrightarrow M^{25} = M$$

12.6. Septiembre 2011 - Opción B

Problema 12.6.1 *(3 puntos).* Dado el punto $P(0,1,1)$ y las rectas:

$$r : \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z}{-1}, \quad s : \left\{ \begin{array}{l} x = 0 \\ y = 0 \end{array} \right.$$

se pide:

a) (1'5 puntos). Determinar las coordenadas del punto simétrico de P respecto a r.

b) (1'5 puntos). Determinar la recta que pasa por el punto P, tiene dirección perpendicular a la recta r y corta a la recta s.

Solución:

a) Lo calculamos siguiendo los tres pasos siguientes:

- Calculamos un plano π perpendicular a r que contenga a P:

$$2x + y - z + \lambda = 0 \Longrightarrow \lambda = 0 \Longrightarrow \pi : 2x + y - z = 0$$

- Calculamos el punto de corte P' de π con r:

$$r : \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z}{-1} \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 1 + 2\lambda \\ y = -1 + \lambda \\ z = -\lambda \end{array} \right. \Longrightarrow$$

$$2(1+2\lambda) + (-1+\lambda) - (-\lambda) = 0 \Longrightarrow \lambda = -\frac{1}{6} \Longrightarrow P'\left(\frac{2}{3}, -\frac{7}{6}, \frac{1}{6}\right)$$

- El punto que buscamos P'' tiene que cumplir:

$$\frac{P+P''}{2} = P' \Longrightarrow P'' = 2P' - P = \left(\frac{4}{3}, -\frac{10}{3}, -\frac{2}{3}\right)$$

b) Calculo un plano $\pi \perp r$, que contenga a P, calculado en el apartado anterior $\pi : 2x + y - z = 0$, y el punto de corte P_1 de este plano con la recta s

$$s : \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = \lambda \end{cases} \Longrightarrow 2 \cdot 0 + 0 + \lambda = 0 \Longrightarrow \lambda = 0 \Longrightarrow P_1 = O(0,0,0)$$

La recta t que buscamos pasa por los puntos O y P:

$$t : \begin{cases} \overrightarrow{OP} = (0,1,1) \\ O(0,0,0) \end{cases} \Longrightarrow t : \begin{cases} x = 0 \\ y = \lambda \\ z = \lambda \end{cases}$$

Problema 12.6.2 *(3 puntos).* Dado el sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} 2x + & 4y & & = & 4k \\ -k^3x + & k^2y + & kz = & & 0 \\ x + & ky & & = & k^2 \end{cases}$$

se pide:

a) (2 puntos). Discutirlo en función del valor del parámetro k.

b) (0'5 puntos). Resolver el sistema para $k = 1$.

c) (0'5 puntos). Resolver el sistema para $k = 2$.

Solución:

a)

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{rrr|r} 2 & 4 & 0 & 4k \\ -k^3 & k^2 & k & 0 \\ 1 & k & 0 & k^2 \end{array}\right); \quad |A| = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 0 \\ -k^3 & k^2 & k \\ 1 & k & 0 \end{vmatrix} = 2k(2-k) = 0 \Longrightarrow k = 0, \ \ k = 2$$

- Si $k \neq 0$ y $k \neq 2 \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow$ Rango$(A) = 3 =$Rango$(\overline{A}) =$ nº de incógnitas $\Longrightarrow SCD$ Sistema compatible determinado.
- Si $k = 0$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right); \quad \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -4 \neq 0 \Longrightarrow$$

Rango$(A) = 2 =$Rango$(\overline{A}) <$ nº de ncógnitas $\Longrightarrow SCI$ Sistema compatible indeterminado.

- Si $k = 2$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 0 & 8 \\ -8 & 4 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 4 \end{array} \right); \quad 2F_3 = F_1 \text{ y } \left| \begin{array}{cc} 2 & 4 \\ -8 & 4 \end{array} \right| = 40 \neq 0 \Longrightarrow$$

Rango$(A) = 2 =$Rango$(\overline{A}) <$ nº de ncógnitas $\Longrightarrow$ SCI Sistema compatible indeterminado.

b)

$$\left\{ \begin{array}{rrrrr} 2x+ & 4y & & = & 4 \\ -x+ & y+ & z & = & 0 \\ x+ & y & & = & 1 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 0 \\ y = 1 \\ z = -1 \end{array} \right.$$

c)

$$\left\{ \begin{array}{rrrrr} 2x+ & 4y & & = & 8 \\ -8x+ & 4y+ & 2z & = & 0 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 4/5 + 1/5\lambda \\ y = 8/5 - 1/10\lambda \\ z = \lambda \end{array} \right.$$

Problema 12.6.3 *(2 puntos).* Dada la funcion

$$f(x) = \left\{ \begin{array}{ccc} e^{1/x} & \text{si} & x < 0 \\ k & \text{si} & x = 0 \\ \dfrac{\cos x - 1}{\sin x} & \text{si} & x > 0 \end{array} \right.$$

hallar el valor de k para que f sea continua en $x = 0$. Justificar la respuesta.
Solución: f es continua en $x = 0$ si

$$\lim_{x \longrightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \longrightarrow 0^-} f(x) = f(0)$$

$$\lim_{x \longrightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \longrightarrow 0^-} e^{-1/x} = 0$$

$$\lim_{x \longrightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \longrightarrow 0^+} \frac{\cos x - 1}{\sin x} = \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \longrightarrow 0^+} \frac{-\sin x}{\cos x} = 0$$

Como $f(0) = k \Longrightarrow k = 0$

Problema 12.6.4 *(2 puntos).*

a) (1 punto). Hallar el área del recinto limitado por la gráfica de $f(x) = -\sin x$ y el eje OX entre las abscisas $x = 0$ y $x = 2\pi$.

b) (1 punto). Hallar el volumen del sólido de revolución que se obtiene al hacer girar la gráfica de $f(x) = -\sin x$ alrededor del eje OX entre las abscisas $x = 0$ y $x = 2\pi$.

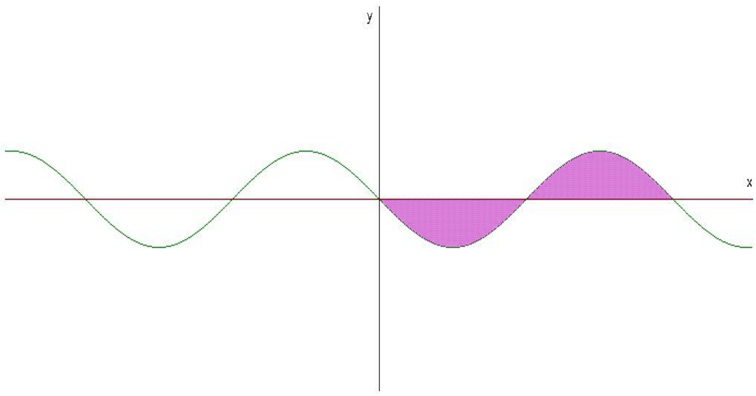
Solución:

a) $f(x) = -\sin x = 0 \Longrightarrow x = 0$ y $x = \pi$. En el intervalo $[0, 2\pi]$ hay dos recitos de integración $S_1 \equiv [0, \pi]$ y $S_2 \equiv [\pi, 2\pi]$

$$S_1 = \int_0^{\pi} (-\sin x)\, dx = \cos x]_0^{\pi} = -2$$

$$S_2 = \int_{\pi}^{2\pi} (-\sin x)\, dx = \cos x]_{\pi}^{2\pi} = 2$$

$$S = |S_1| + |S_2| = 4\ u^2$$



b)

$$V = 2\pi \int_0^{\pi} (-\sin x)^2\, dx = \pi \int_0^{\pi} (1 - \cos 2x)\, dx = \pi \left(x - \frac{1}{2} \sin 2x \right) \Big]_0^{\pi} = \pi^2\ u^3$$