Problemas de Selectividad de Matemáticas II
Comunidad de Madrid
(Resueltos)

Isaac Musat Hervás

22 de mayo de 2013

Capítulo 13

Año 2012

13.1. Modelo 2012 - Opción A

Problema 13.1.1 *(3 puntos)* Dados los puntos $A(1,-1,2)$, $B(2,0,-1)$, $C(0,1,3)$, se pide:

a) (2 puntos). Hallar todos los puntos que equidistan de A, B y C. ¿Cuales de ellos pertenecen al plano $\pi: 2x+2y+2z+1=0$?

b) (1 punto). Hallar la ecuacion del plano que pasa por A, B y C.

Solución:

a) El lugar geométrico de los puntos que equidistan de A, B y C será la recta en la que se cortan los planos mediadores definidos entre A y B, entre A y C y entre B y C. Calculando dos de ellos será suficiente.

Plano mediador entre A y B:

$$\sqrt{(x-1)^2+(y+1)^2+(z-2)^2}=\sqrt{(x-2)^2+y^2+(z+1)^2}\Longrightarrow 2x+2y-6z+1=0$$

Plano mediador entre A y C:

$$\sqrt{(x-1)^2+(y+1)^2+(z-2)^2}=\sqrt{x^2+(y-1)^2+(z-3)^2}\Longrightarrow x-2y-z+2=0$$

$$r:\left\{\begin{array}{l} 2x+2y-6z+1=0\\ x-2y-z+2=0 \end{array}\right. \Longrightarrow r:\left\{\begin{array}{l} \overrightarrow{u_r}=(7,2,3)\\ P_r\left(-1,\dfrac{1}{2},0\right) \end{array}\right. \Longrightarrow r:\left\{\begin{array}{l} x=-1+7\lambda\\ \\ y=\dfrac{1}{2}+2\lambda\\ \\ z=3\lambda \end{array}\right.$$

Sustituimos en el plano π:

$$2(-1+7\lambda)+2\left(\frac{1}{2}+2\lambda\right)+2(3\lambda)+1=0\Longrightarrow \lambda=0$$

El único punto es el $\left(-1, \frac{1}{2}, 0\right)$.

b) La ecuación del plano que contiene a los puntos A, B y C vendrá determinada por:

$$\pi' : \begin{cases} \overrightarrow{AB} = (1, 1, -3) \\ \overrightarrow{AC} = (-1, 2, 1) \\ A(1, -1, 2) \end{cases} \Longrightarrow \pi' : \begin{vmatrix} 1 & -1 & x-1 \\ 1 & 2 & y+1 \\ -3 & 1 & z-2 \end{vmatrix} = 0 \Longrightarrow 7x+2y+3z-11 = 0$$

Problema 13.1.2 *(3 puntos)* Dado el sistema lineal de ecuaciones:

$$\begin{cases} x+ & y+ & 2z = & 2 \\ -3x+ & 2y+ & 3z = & -2 \\ 2x+ & my- & 5z = & -4 \end{cases}$$

se pide:

a) (2 puntos). Discutir el sistema según los valores de m.

b) (1 punto) Resolverlo para $m = 1$.

Solución:

a)

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 2 & 2 \\ -3 & 2 & 3 & -2 \\ 2 & m & -5 & -4 \end{array} \right) \Longrightarrow |A| = -9m - 27 = 0 \Longrightarrow m = -3$$

Si $m \neq 3 \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow$Rango$(A) = 3 =$Rango$(\overline{A})$ = nº de incógnitas $\Longrightarrow$ Sistema compatible determinado.

Si $m = 3$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 2 & 2 \\ -3 & 2 & 3 & -2 \\ 2 & 3 & -5 & -4 \end{array} \right) \Longrightarrow |A| = 0, \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} = 5 \neq 0 \Longrightarrow$$

Rango$(A) = 2$.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -3 & 2 & -2 \\ 2 & 3 & -4 \end{vmatrix} = -44 \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(\overline{A}) = 3$$

Como Rango$(A) \neq$ Rango$(\overline{A}) \Longrightarrow$ el sistema es incompatible.

b) Para $m = 1$:

$$\left\{\begin{array}{rrrr} x+ & y+ & 2z = & 2 \\ -3x+ & 2y+ & 3z = & -2 \\ 2x+ & y- & 5z = & -4 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 1 \\ y = -1 \\ z = 1 \end{array}\right.$$

Problema 13.1.3 *(2 puntos)* Halla el valor de λ para que la función

$$f(x) = \left\{\begin{array}{lll} \dfrac{e^{\lambda x^2} - 1}{3x^2} & \text{si} & x > 0 \\ \\ \dfrac{\sin 2x}{x} & \text{si} & x \le 0 \end{array}\right.$$

sea continua. Razonar la respuesta.

Solución:

$$\lim_{x\longrightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x\longrightarrow 0^+} \frac{e^{\lambda x^2} - 1}{3x^2} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\longrightarrow 0^+} \frac{2\lambda x e^{\lambda x^2}}{6x} = \left[\frac{0}{0}\right] =$$

$$\lim_{x\longrightarrow 0^+} \frac{2\lambda(e^{\lambda x^2} + 2\lambda x^2 e^{\lambda x^2})}{6} = \frac{\lambda}{3}$$

$$\lim_{x\longrightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x\longrightarrow 0^-} \frac{\sin 2x}{x} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\longrightarrow 0^-} \frac{2\cos 2x}{1} = 2$$

Para que f sea continua en $x =$ se tiene que cumplir:

$$\lim_{x\longrightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x\longrightarrow 0^-} f(x) = f(0)$$

Luego

$$\frac{\lambda}{3} = 2 \Longrightarrow \lambda = 6$$

Problema 13.1.4 *(2 puntos)* Dado el polinomio $P(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$, obtener los valores de a, b y c de modo que se verifiquen las condiciones siguientes:

- El polinomio $P(x)$ tenga extremos relativos en los puntos de abscisas $x = -1/3$, $x = -1$.
- La recta tangente a la gráfica de $P(x)$ en el punto $(0, P(0))$ sea $y = x + 3$.

Solución:

$$P(x) = x^3 + ax^2 + bx + c \Longrightarrow P'(x) = 3x^2 + 2ax + b$$

$$\left\{\begin{array}{l} P'\left(-\dfrac{1}{3}\right) = 0 \Longrightarrow \dfrac{1}{3} - \dfrac{2a}{3} + b = 0 \\ \\ P'(-1) = 0 \Longrightarrow 3 - 2a + b = 0 \\ \\ P'(0) = 1 \text{ pendiente de } y = x + 3 \Longrightarrow b = 1 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} a = 2 \\ b = 1 \end{array}\right.$$

El punto $(0, P(0))$ también pertenece a la recta $y = x + 3$ luego para $x = 0 \Longrightarrow y = 3 \Longrightarrow P(0) = 3 \Longrightarrow c = 3$ El polinomio buscado es

$$P(x) = x^3 + 2x^2 + x + 3$$

.

13.2. Modelo 2012 - Opción B

Problema 13.2.1 *(3 puntos)* Sabiendo que la funcion $F(x)$ tiene derivada $f(x)$ continua en el intervalo cerrado $[2, 5]$, y, ademas, que:

$$F(2) = 1, \quad F(3) = 2, \quad F(4) = 6, \quad F(5) = 3, \quad f(3) = 3 \text{ y } f(4) = -1;$$

Hallar:

a) (0,5 puntos). $\displaystyle\int_2^5 f(x)\,dx$

b) (1 punto). $\displaystyle\int_2^3 (5f(x) - 7)\,dx$

c) (1,5 puntos). $\displaystyle\int_2^4 F(x)f(x)\,dx$.

Solución:

a) $\displaystyle\int_2^5 f(x)\,dx = F(5) - F(2) = 3 - 1 = 2$

b) $\displaystyle\int_2^3 (5f(x) - 7)\,dx = 5\int_2^3 f(x)\,dx - 7\int_2^3 dx =$

$= 5(F(3) - F(2)) - 7(3 - 2) = 5(2 - 1) - 7 = -2$

c) $\displaystyle\int_2^4 F(x)f(x)\,dx = \left.\frac{(F(x))^2}{2}\right]_2^4 = \frac{F(4)^2}{2} - \frac{F(2)^2}{2} = \frac{36}{2} - \frac{1}{2} = \frac{35}{2}.$

Problema 13.2.2 *(3 puntos)* Dado el sistema:

$$\left\{\begin{array}{rrr} x+ & 2y = & 1 \\ 3x+ & y = & -a \\ -3x+ & 2ay = & 7 \end{array}\right.$$

se pide:

a) (1,5 puntos). Discutir el sistema segun los valores del parámetro a.

b) (1,5 puntos). Resolver el sistema cuando sea compatible..

Solución:

a)

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{rr|r} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & -a \\ -3 & 2a & 7 \end{array}\right)\Longrightarrow |\overline{A}|=2a^2+12a-32=0\Longrightarrow a=2,\;\; a=-8$$

$$\left|\begin{array}{cc} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{array}\right|=-5\neq 0\Longrightarrow \text{Rango}(A)=2$$

Si $a\neq 2$ y $a\neq -8\Longrightarrow |\overline{A}|\neq 0\Longrightarrow$Rango$(\overline{A})=3\neq$Rango$(A)\Longrightarrow$ el sistema es incompatible.

Si $a=2\Longrightarrow$ Rango$(A)=2=$Rango$(\overline{A})=$ nº de incógnitas y el sistema es compatible determinado.

Si $a=-8\Longrightarrow$ Rango$(A)=2=$Rango$(\overline{A})=$ nº de incógnitas y el sistema es compatible determinado.

b) Si $a=2$:

$$\left\{\begin{array}{rrr} x+ & 2y= & 1 \\ 3x+ & y= & -2 \end{array}\right.\Longrightarrow\left\{\begin{array}{l} x=-1 \\ y=1 \end{array}\right.$$

Si $a=-8$:

$$\left\{\begin{array}{rrr} x+ & 2y= & 1 \\ 3x+ & y= & 8 \end{array}\right.\Longrightarrow\left\{\begin{array}{l} x=3 \\ y=-1 \end{array}\right.$$

Problema 13.2.3 *(3 puntos)* Dados los planos de ecuaciones:

$$\pi : x-2y+2z+4=0,\quad \pi'=2x+2y-z-2=0$$

se pide:

a) (1 punto). Obtener la ecuación en forma continua de la recta que determinan.

b) (1 punto). Hallar todos los puntos que equidistan de π y π'.

Solución:

a)

$$r : \left\{ \begin{array}{l} x - 2y + 2z + 4 = 0 \\ 2x + 2y - z - 2 = 0 \end{array} \right. \Longrightarrow r : \left\{ \begin{array}{l} x = -2\lambda \\ y = 5\lambda \\ z = -2 + 6\lambda \end{array} \right.$$

En su forma continua:

$$r : \frac{x}{-2} = \frac{y}{5} = \frac{z+2}{6}$$

$$u_r = u_\pi \times u_{\pi'} = \left| \begin{array}{rrr} i & j & k \\ 1 & -2 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{array} \right| = (-2, 5, 6); \quad P_r(0, 0, -2)$$

b) Sea $P(x, y, z)$ un punto tal que $d(P, \pi) = d(P, \pi')$:

$$\frac{|x - 2y + 2z + 4|}{\sqrt{9}} = \frac{|2x + 2y - z - 2|}{\sqrt{9}} \Longrightarrow |x-2y+2z+4| = |2x+2y-z-2|$$

Luego tenemos las soluciones siguientes:

$$\left\{ \begin{array}{l} x - 2y + 2z + 4 = 2x + 2y - z - 2 \Longrightarrow x + 4y - 3z - 6 = 0 \\ x - 2y + 2z + 4 = -(2x + 2y - z - 2) \Longrightarrow 3x + z + 2 = 0 \end{array} \right.$$

Problema 13.2.4 *(2 puntos)* Dadas las rectas

$$r : \frac{x+3}{-6} = \frac{y-9}{4} = \frac{z-8}{4}, \quad s : \frac{x-3}{3} = \frac{y-9}{-2} = \frac{x-8}{-2}$$

se pide:

a) (1 punto). Hallar la posicion relativa de las rectas r y s.

b) (1 punto). Hallar la distancia mínima entre r y s.

Solución:

a)

$$r : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_r} = (-6, 4, 4) \\ P_r(-3, 9, 8) \end{array} \right. ; \quad s : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_s} = (3, -2, -2) \\ P_s(3, 9, 8) \end{array} \right. ; \quad \overrightarrow{P_rP_s} = (6, 0, 0)$$

$$\left| \begin{array}{rrr} 6 & 0 & 0 \\ -6 & 4 & 4 \\ 3 & -2 & -2 \end{array} \right| = 0; \quad \overrightarrow{u_r} = -2\overrightarrow{u_s} \text{ y } \left| \begin{array}{rr} 6 & 0 \\ -6 & 4 \end{array} \right| = 24 \neq 0$$

Las dos rectas son paralelas.

b) Como las dos rectas son paralelas se coge un punto al azar de una de las rectas y se calcula la distancia desde este punto a la otra recta:

$$d(r,s) = d(P_s, r) = \frac{|\overrightarrow{P_rP_s} \times \overrightarrow{u_r}|}{|\overrightarrow{u_r}|} = 12\sqrt{\frac{2}{17}}\ u$$

$$|\overrightarrow{P_rP_s} \times \overrightarrow{u_r}| = |\begin{vmatrix} i & j & k \\ 6 & 0 & 0 \\ -6 & 4 & 4 \end{vmatrix}| = |24(0,-1,1)| = 24\sqrt{2}; \quad |\overrightarrow{u_r}| = 2\sqrt{17}$$

13.3. Junio 2012 - Opción A

Problema 13.3.1 *(3 puntos)* Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} k & k & k^2 \\ 1 & -1 & k \\ 2k & -2 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 12 \\ 6 \\ 8 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

se pide:

a) (1,5 puntos) Hallar el rango de A en función de los valores de k.

b) (0,75 puntos) Para $k = 2$, hallar, si existe, la solución del sistema $AX = B$.

c) (0,75 puntos) Para $k = 1$, hallar, si existe, la solución del sistema $AX = C$.

Solución:

a)

$$|A| = 4k(k^2 - 1) = 0 \Longrightarrow k = 0, \ \ k = \pm 1$$

- Si $k \neq 0$ o $k \neq \pm 1 \Longrightarrow$ Rango$(A) = 3$
- Si $k = 0$:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix} \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 2$$

- Si $k = 1$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix} \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 2$$

- Si $k = -1$:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ -2 & -2 & 2 \end{pmatrix} \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 2$$

b) Si $k = 2$:

$$AX = B \Longrightarrow X = A^{-1}B = \begin{pmatrix} 1/12 & -1/2 & 1/3 \\ 1/4 & -1/2 & 0 \\ 1/12 & 1/2 & -1/6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 12 \\ 6 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/3 \\ 0 \\ 8/3 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 1 & -1 & 2 \\ 4 & -2 & 2 \end{pmatrix} \Longrightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/12 & -1/2 & 1/3 \\ 1/4 & -1/2 & 0 \\ 1/12 & 1/2 & -1/6 \end{pmatrix}$$

c) Si $k = 1$ el sistema $AX = C$ tiene como matriz asociada:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 1 & 3 \\ 2 & -2 & 2 & 3 \end{array}\right), \ \text{Rango}(A) = 2$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 3 \\ 2 & -2 & 3 \end{vmatrix} = 20 \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(\overline{A}) = 3$$

Como Rango$(A) \neq$Rango$(\overline{A}) \Longrightarrow$ el sistema es incompatible y no tiene solución.

Problema 13.3.2 *(3 puntos)* Dados los puntos $P_1(1, 3, -1)$, $P_2(a, 2, 0)$, $P_3(1, 5, 4)$ y $P_4(2, 0, 2)$, se pide:

a) (1 punto). Hallar el valor de a para que los cuatro puntos estén en el mismo plano.

b) (1 punto). Hallar los valores de a para que el tetraedro con vértices en P_1, P_2, P_3, P_4 tenga volumen igual a 7.

c) (1 punto). Hallar la ecuación del plano cuyos puntos equidistan de P_1 y de P_3.

Solución:

a) Tenemos $\overrightarrow{P_1P_2} = (a - 1, -1, 1)$, $\overrightarrow{P_1P_3} = (0, 2, 5)$, $\overrightarrow{P_1P_4} = (3, -3, 3)$:

$$\begin{vmatrix} a-1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 5 \\ 1 & -3 & 3 \end{vmatrix} = 7(3a - 4) = 0 \Longrightarrow a = \frac{4}{3}$$

b)

$$7=\frac{1}{6}|\begin{vmatrix} a-1 & -1 & 1\\ 0 & 2 & 5\\ 1 & -3 & 3\end{vmatrix}| \Longrightarrow |3a-4|=6 \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} a=10/3\\ a=-2/3\end{array}\right.$$

c)

$$\sqrt{(x-1)^2+(y-3)^2+(z+1)^2}=\sqrt{(x-1)^2+(y-5)^2+(z-4)^2} \Longrightarrow$$
$$4y+10z-31=0$$

Problema 13.3.3 *(2 puntos)* Hallar a, b, c de modo que la función $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ alcance en $x=1$ un máximo relativo de valor 2, y tenga en $x=3$ un punto de inflexión.

Solución:

$$f'(x)=3x^2+2ax+b,\ \ f''(x)=6x+2a$$

$$\left\{\begin{array}{l} f(1)=0\Longrightarrow a+b+c=1\\ f'(1)=0\Longrightarrow 2a+b=-3\\ f''(3)=0\Longrightarrow a=-9\end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} a=-9\\ b=15\\ c=-5\end{array}\right.$$

$$f(x)=x^3-9x^2+15x-5$$

Problema 13.3.4 *(2 puntos)* Calcular razonadamente las siguientes integrales definidas:

- (1 punto). $\displaystyle\int_0^{\pi} e^{2x}\cos x\,dx$
- (1 punto). $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\sin 2x}{1+\cos^2 2x}\,dx$

Solución:

- (1 punto). $\displaystyle\int_0^{\pi} e^{2x}\cos x\,dx=-\frac{2}{5}(e^{2\pi}+1)$

$$I=\int e^{2x}\cos x\,dx=\left[\begin{array}{c} u=\cos x\Longrightarrow du=-\sin x\\ dv=e^{2x}\,dx\Longrightarrow v=\frac{1}{2}e^{2x}\end{array}\right]=\frac{\cos xe^{2x}}{2}+\frac{1}{2}\int e^{2x}\sin x\,dx=$$

$$\left[\begin{array}{c} u=\sin x\Longrightarrow du=\cos x\\ dv=e^{2x}\,dx\Longrightarrow v=\frac{1}{2}e^{2x}\end{array}\right]=\frac{\cos xe^{2x}}{2}+\frac{1}{2}\left(\frac{\sin xe^{2x}}{2}-\frac{1}{2}\int e^{2x}\cos x\,dx\right)$$

$$I=\frac{\cos xe^{2x}}{2}+\frac{1}{2}\frac{\sin xe^{2x}}{2}-\frac{1}{4}I\Longrightarrow I+\frac{1}{4}I=\frac{(2\cos x+\sin x)e^{2x}}{4}\Longrightarrow$$

$$\int e^{2x}\cos x\,dx=\frac{(2\cos x+\sin x)e^{2x}}{5}$$

- $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\sin 2x}{1+\cos^2 2x}\,dx=-\frac{1}{2}\arctan(\cos 2x)\Big]_0^{\pi/2}=\frac{\pi}{4}$

13.4. Junio 2012 - Opción B

Problema 13.4.1 *(3 puntos)* Dadas las funciones

$$f(x) = \frac{3x + \ln(x+1)}{\sqrt{x^2 - 3}}, \;\; g(x) = (lnx)^x, \;\; h(x) = sen(\pi - x)$$

se pide:

a) (1 punto). Hallar el dominio de $f(x)$ y el $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} f(x)$.

b) (1 punto). Calcular $g'(e)$.

c) (1 punto). Calcular, en el intervalo $(0, 2\pi)$, las coordenadas de los puntos de corte con el eje de abscisas y las coordenadas de los extremos relativos de $h(x)$.

Solución:

a) $Dom(f) = (\sqrt{3}, \infty)$

$$\lim_{x \longrightarrow +\infty} \frac{3x + \ln(x+1)}{\sqrt{x^2 - 3}} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x \longrightarrow +\infty} \frac{3 + \frac{1}{x+1}}{\frac{2x}{2\sqrt{x^2-3}}} = 3$$

b)

$$g'(x) = (\ln x)^x \left(\ln(\ln(x) + \frac{1}{\ln x}\right) \Longrightarrow g'(e) = 1$$

c) $h(x)sen(\pi - x) = 0 \Longrightarrow \pi - x = k\pi \Longrightarrow x = (1 - k)\pi$,, el único punto de corte en este intervalo es en $x = \pi$.

$$h'(x) = -\cos(\pi - x) = 0 \Longrightarrow \pi - x = \frac{\pi}{2} + k\pi \Longrightarrow x = \pi\left(\frac{1}{2} - k\right)$$

Luego $x = \dfrac{\pi}{2}$, $x = \dfrac{3\pi}{2}$.

Problema 13.4.2 *(3 puntos)* Dadas las rectas

$$r_1 \equiv \frac{x-2}{3} = \frac{y-1}{-5} = \frac{z}{2}, \quad r_1 \equiv \left\{ \begin{array}{c} x = -1 - \lambda \\ y = 3 + \lambda \\ z = 5 \end{array} \right.$$

se pide:

a) (1 punto). Estudiar su posición relativa.

b) (2 puntos). Hallar la mínima distancia de r_1 a r_2.

Solución:

$$r_1:\left\{\begin{array}{l}\overrightarrow{u_{r_1}}=(3,-5,2)\\ P_{r_1}(2,1,0)\end{array}\right. \quad r_2:\left\{\begin{array}{l}\overrightarrow{u_{r_2}}=(-1,1,0)\\ P_{r_2}(-1,3,5)\end{array}\right. \quad \overrightarrow{P_{r_1}P_{r_2}}=(-3,2,5)$$

a)

$$\left|\begin{array}{rrr}-3 & 2 & 5\\ 3 & -5 & 2\\ -1 & 1 & 0\end{array}\right| = -8\neq 0 \Longrightarrow r_1 \text{ y } r_2 \text{ se cruzan}$$

b)

$$d(r_1,r_2)=\frac{|[\overrightarrow{P_{r_1}P_{r_2}},\overrightarrow{u_{r_1}},\overrightarrow{u_{r_2}}]|}{|\overrightarrow{u_{r_1}}\times\overrightarrow{u_{r_2}}|}=\frac{|-8|}{2\sqrt{3}}=\frac{4\sqrt{3}}{3}\ u$$

$$|\overrightarrow{u_{r_1}}\times\overrightarrow{u_{r_2}}|=|\left|\begin{array}{rrr}i & j & k\\ 3 & -5 & 2\\ -1 & 1 & 0\end{array}\right||=|(-2,-2,-2)|=2\sqrt{3}$$

Problema 13.4.3 *(3 puntos)* Dadas las matrices

$$A=\left(\begin{array}{rrr}0 & 1 & 2\\ -2 & -1 & 0\\ 1 & a & 1\end{array}\right), \quad B=\left(\begin{array}{rrrr}4 & -1 & 1 & -2\\ -2 & -3 & -7 & -8\\ 3 & 2-a & 3+a & 3\end{array}\right)$$

se pide:

a) (1 punto). Estudiar el rango de la matriz B en función de a.

b) (1 punto). Para $a=0$, calcular la matriz X que verifica $AX=B$.

Solución:

a)

$$|B_1|=\left|\begin{array}{rrr}4 & -1 & 1\\ -2 & -3 & -7\\ 3 & 2-a & 3+a\end{array}\right|=40(1-a)=0\Longrightarrow a=1$$

Luego si $a\neq 1\Longrightarrow$ Rango$(B)=3$. Si $a=1$:

$$B=\left(\begin{array}{rrrr}4 & -1 & 1 & -2\\ -2 & -3 & -7 & -8\\ 3 & 1 & 4 & 3\end{array}\right)$$

$$|B_1|=|B_2|=|B_3|=|B_4|=0\Longrightarrow \text{Rango}(B)=2$$

b) Si $a = 0$:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 1 & -2 \\ -2 & -3 & -7 & -8 \\ 3 & 2 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

$$AX = B \Longrightarrow X = A^{-1}B :$$

$$X = \begin{pmatrix} -1/4 & -1/4 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 & -1 \\ 1/4 & 1/4 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & -1 & 1 & -2 \\ -2 & -3 & -7 & -8 \\ 3 & 2 & 3 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Problema 13.4.4 *(2 puntos)* Calcular el valor del determinante

$$\begin{vmatrix} x & 1 & 1 & 1 \\ 1 & y & 1 & 1 \\ 1 & 1 & z & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

Solución:

$$\begin{vmatrix} x & 1 & 1 & 1 \\ 1 & y & 1 & 1 \\ 1 & 1 & z & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} F_1 - F_4 \\ F_2 - F_4 \\ F_3 - F_4 \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} x-1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & y-1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & z-1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (x-1)(y-1)(z-1)$$

13.5. Junio 2012 (coincidente)- Opción A

Problema 13.5.1 *(3 puntos)* Dada la función $f(x) = \cos^2 x$, se pide:

a) (1 punto). Calcular los extremos relativos de f en el intervalo $(-\pi, \pi)$

b) (1 punto). Calcular los puntos de inflexion de f en el intervalo $(-\pi, \pi)$

c) (1 punto). Hallar la primitiva $g(x)$ de $f(x)$ tal que $g(\pi/4) = 0$.

Solución:

$$f'(x) = -2\sin x \cos x = -\sin 2x = 0 \Longrightarrow x = \frac{k\pi}{2}, \ k \in Z$$

a) En el intervalo $(-\pi, \pi)$ sólo hay tres soluciones: $x = \pm\pi/2$ y $x = 0$. Analizamos estos extremos por el criterio de la segunda derivada. $f''(x) = -2\cos 2x$:

$$f''(0) = -2 < 0 \Longrightarrow \text{en } x = 0 \text{ hay un Máximo}$$

$$f''\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2 > 0 \Longrightarrow \text{en } x = 0 \text{ hay un Mínimo}$$

$$f''\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 2 > 0 \Longrightarrow \text{en } x = 0 \text{ hay un Mínimo}$$

b)
$$f''(x) = -2\cos 2x = 0 \Longrightarrow x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}, \ \ k \in Z$$

En el intervalo $(-\pi, \pi)$ las soluciones serán: $x = \pm\pi/4$ y $x = \pm 3\pi/4$. Analizamos estos puntos por el criterio de la tercera derivada. $f'''(x) = 4\sin 2x$:

$$f'''(\pm\pi/4) = \pm 4 \neq 0 \Longrightarrow \text{ en } x = \pm\pi/4 \text{ hay un punto de Inflexión}$$

$$f'''(\pm 3\pi/4) = \pm 4 \neq 0 \Longrightarrow \text{ en } x = \pm 3\pi/4 \text{ hay un punto de Inflexión}$$

c)
$$g(x) = \int \cos^2 x\, dx = \int \frac{1+\cos 2x}{2}\, dx = \frac{2x+\sin 2x}{4} + C$$

$$g(\pi/4) = \frac{\pi/2 + \sin \pi/2}{4} + C = \frac{\pi+2}{8} + C = 0 \Longrightarrow C = -\frac{\pi+2}{8}$$

$$g(x) = \frac{2x+\sin 2x}{4} - \frac{\pi+2}{8}$$

Problema 13.5.2 *(3 puntos)* Dado el sistema de ecuaciones lineales

$$\left\{\begin{array}{rrrl} 3x+ & 2y+ & (a-1)z = & 1 \\ -x+ & ay+ & z = & 0 \\ 2x+ & y- & 2z = & 3 \end{array}\right.$$

se pide:

a) (2 puntos). Discutir sus soluciones según los valores de a.

b) (1 punto). Hallar la solución del sistema para $a = 1$.

Solución:

a)

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{rrr|r} 3 & 2 & (a-1) & 1 \\ -1 & a & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -2 & 3 \end{array}\right); \ \ |A| = -2\left(a + \frac{1}{2}\right)(a+2) = 0 \Longrightarrow$$

$$a = -\frac{1}{2}, \ \ a = -2$$

- Si $a = -\dfrac{1}{2}$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{rrr|r} 3 & 2 & -1/2 & 1 \\ -1 & 1/2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -2 & 3 \end{array}\right) \Longrightarrow |A| = 0 \text{ y } \left|\begin{array}{rr} 3 & 2 \\ -1 & 1/2 \end{array}\right| \neq 0 \Longrightarrow$$

$$\text{Rango}(A) = 2$$

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -1 & 1/2 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(\overline{A}) = 3$$

Luego en este caso el sistema es Incompatible.

- Si $a = --2$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & -3 & 1 \\ -1 & -2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -2 & 3 \end{array} \right) \Longrightarrow |A| = 0 \text{ y } \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} \neq 0 \Longrightarrow$$

$$\text{Rango}(A) = 2$$

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(\overline{A}) = 3$$

Luego en este caso el sistema es Incompatible.

b)

$$\left\{ \begin{array}{rrrcr} 3x+ & 2y & & = & 1 \\ -x+ & y+ & z & = & 0 \\ 2x+ & y- & 2z & = & 3 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = -1/3 \\ y = 1 \\ z = -4/3 \end{array} \right.$$

Problema 13.5.3 *(2 puntos)*

a) (1 punto). Dados los puntos $P(2, 1, -1)$, $Q(1, 0, 2)$ y la recta

$$r \equiv \left\{ \begin{array}{l} x = 2 + 2\lambda \\ y = 1 - \lambda \\ z = 3 \end{array} \right.$$

determinar los puntos de r que equidistan de P y Q.

b) (1 punto). Determinar la ecuación del plano π que pasa por el punto Q y es perpendicular a r.

Solución:

a)

$$(2+2\lambda-2)^2+(1-\lambda-1)^2+(3-(-1))^2 = (2+2\lambda-1)^2+(1-\lambda)^2+(3-2)^2 \Longrightarrow$$

$$\lambda = \frac{13}{2} \Longrightarrow \left(15, -\frac{11}{2}, 3\right)$$

b)

$$2x - y + \lambda = 0,\ \ 2\cdot 1 - 1\cdot 0 + \lambda = 0 \Longrightarrow \lambda = -2$$

$$\pi : 2x - y - 2 = 0$$

Problema 13.5.4 *(2 puntos)* Una de las caras del paralelepípedo H tiene vertices en los puntos $A(4,2,8)$, $B(6,4,12)$, $C(6,0,10)$ y $D(8,2,14)$.

a) (1 punto). Si el punto $E(6,8,28)$ es otro de los vertices, hallar el volumen de H.

b) (1 punto). Hallar el punto E' simétrico de E respecto del plano que contiene a la cara $ABCD$.

Solución:

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} = (2,2,4);\quad \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD} = (2,-2,2)$$

a)

$$\overrightarrow{AE} = (2,6,20) \Longrightarrow V = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 2 & -2 & 2 \\ 2 & 6 & 20 \end{vmatrix} = 112\ u^3$$

b) Seguimos los siguientes pasos:

- Cálculo del plano que contiene la cara $ABCD$:

$$\pi \equiv \begin{vmatrix} 2 & 2 & x-4 \\ -2 & 2 & y-2 \\ 2 & 4 & z-8 \end{vmatrix} = 0 \Longrightarrow \pi \equiv 3x + y - 2z + 2 = 0$$

- Calculamos las ecuación de la recta $r \perp \pi$ que pasa por E:

$$r \equiv \left\{ \begin{array}{l} x = 6 + 3\lambda \\ y = 8 + \lambda \\ z = 28 - 2\lambda \end{array} \right.$$

- Calculamos el punto de corte E'' de r con π:

$$3(6+3\lambda)+(8+\lambda)-2(28-2\lambda)+2 = 0 \Longrightarrow \lambda = 2 \Longrightarrow E''(12,10,24)$$

- $$\frac{E+E'}{2} = E'' \Longrightarrow E' = 2E''-E = (24,20,48)-(6,8,28) = (18,12,20)$$

13.6. Junio 2012 (coincidente)- Opción B

Problema 13.6.1 *(3 puntos)* Dadas la recta r y la familia de rectas s, mediante

$$r \equiv \left\{ \begin{array}{c} x + 2y = -3 \\ z = 1 \end{array} \right. \qquad s \equiv \left\{ \begin{array}{c} 2x + 2y + z = a \\ x + z = 0 \end{array} \right. ,$$

se pide:

a) (1,5 puntos). Hallar el valor de a para que ambas rectas se corten. Calcular el punto de corte.

b) (1,5 puntos). Hallar la ecuación del plano determinado por ambas rectas cuando estas se cortan.

Solución:

a)

$$r \equiv \left\{ \begin{array}{l} x = -3 - 2\lambda \\ y = \lambda \\ z = 1 \end{array} \right. \qquad s \equiv \left\{ \begin{array}{l} x = \mu \\ y = \dfrac{a-\mu}{2} \\ z = -\mu \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} -3 - 2\lambda = \mu \\ \lambda = \dfrac{a-\mu}{2} \\ 1 = -\mu \end{array} \right. \Longrightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \lambda = -1 \\ \mu = -1 \\ a = -3 \end{array} \right. \Longrightarrow a = -3, \text{ y el punto de corte es } P(-1,-1,1)$$

b)

$$r \equiv \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_r} = (-2,1,0) \\ P_r(-3,0,1) \end{array} \right. \qquad s \equiv \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_s} = (1,-1/2,-1) = 1/2(2,-1,-2) \\ P_s(0,-3/2,-1) \end{array} \right. \Longrightarrow$$

$$\pi \equiv \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_r} = (-2,1,0) \\ \overrightarrow{u_s} = (2,-1,-2) \\ P_r(-3,0,1) \end{array} \right. \Longrightarrow \pi \equiv \left| \begin{array}{ccc} -2 & 2 & x+3 \\ 1 & -1 & y \\ 0 & -2 & z-1 \end{array} \right| = 0 \Longrightarrow$$

$$\pi \equiv x + 2y + 3 = 0$$

Problema 13.6.2 *(3 puntos)* . Sabiendo que $\left| \begin{array}{ccc} x & y & z \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 5 \end{array} \right| = 1$, calcular los siguientes determinantes:

$$a)\ (1,5 \text{ puntos}) \left| \begin{array}{ccc} 3 & 1 & 0 \\ 3x & y & 2z \\ 6 & 3 & 10 \end{array} \right|, \quad b)\ (1,5 \text{ puntos}) \left| \begin{array}{ccc} x+1 & y+1 & z \\ 2-x & 2-y & -z \\ 3 & 4 & 5 \end{array} \right|$$

Solución:

$$a)\quad \begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 3x & y & 2z \\ 6 & 3 & 10 \end{vmatrix} = -6\begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 5 \end{vmatrix} = -6$$

$$b)\quad \begin{vmatrix} x+1 & y+1 & z \\ 2-x & 2-y & -z \\ 3 & 4 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x+1 & y+1 & z \\ 2 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 5 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} x+1 & y+1 & z \\ x & y & z \\ 3 & 4 & 5 \end{vmatrix} =$$

$$2\begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 5 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 5 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} x & y & z \\ x & y & z \\ 3 & 4 & 5 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 5 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 5 \end{vmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 - F_2 \end{bmatrix} = 3\begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 5 \end{vmatrix} = 3$$

Problema 13.6.3 *(2 puntos)* Dada la función

$$f(x) = \frac{x-3}{\sqrt{x^2-9}}$$

se pide:

a) (1 punto) Hallar $\lim\limits_{x\longrightarrow 3^+} f(x)$, $\lim\limits_{x\longrightarrow -3^-} f(x)$

b) (1 punto) Hallar $\lim\limits_{x\longrightarrow +\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\longrightarrow -\infty} f(x)$

Solución:

a)

$$\lim_{x\longrightarrow 3^+} \frac{x-3}{\sqrt{x^2-9}} = \lim_{x\longrightarrow 3^+} \frac{x-3}{\sqrt{x+3}\sqrt{x-3}} = \lim_{x\longrightarrow 3^+} \frac{\sqrt{x-3}}{\sqrt{x+3}} = 0$$

$$\lim_{x\longrightarrow -3^-} \frac{x-3}{\sqrt{x^2-9}} = -\infty$$

b)

$$\lim_{x\longrightarrow +\infty} \frac{x-3}{\sqrt{x^2-9}} = 1$$

$$\lim_{x\longrightarrow -\infty} \frac{x-3}{\sqrt{x^2-9}} = -1$$

Problema 13.6.4 *(2 puntos)*

a) (1 punto) Sea $f(x)$ una función continua tal que $\displaystyle\int_1^8 f(u)\,du = 3$. Hallar

$$\int_1^2 f(x^3)x^2\,dx$$

b) (1 punto) Hallar el dominio de definición y las abscisas de los puntos donde la función

$$F(x) = \sqrt{(x-3)(9-x)^2}$$

alcanza sus máximos y mínimos relativos.

Solución:

a)

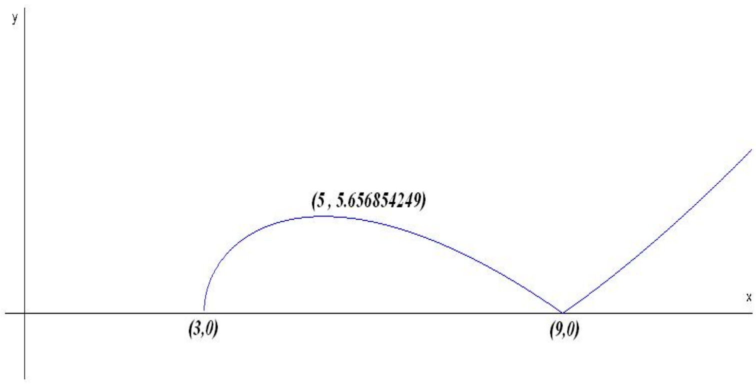
$$\int_1^2 f(x^3)x^2\,dx = [u = x^3] = \frac{1}{3}\int_1^8 f(u)\,du = 1$$

b) $\text{Dom}(F(x)) = [3, +\infty)$

$$F'(x) = \frac{3(x-5)(x-9)}{2\sqrt{(x-3)(9-x)^2}} = 0 \Longrightarrow x = 5,\ x = 9$$

	$(3,5)$	$(5,9)$	$(9,\infty)$
$F'(x)$	$+$	$-$	$+$
$F(x)$	creciente	decreciente	creciente

En el punto $(5, 4\sqrt{2})$ hay un máximo relativo y en el punto $(9,0)$ hay un mínimo relativo. En el punto $(3,0)$ hay un mínimo global.



13.7. Septiembre 2012 - Opción A

Problema 13.7.1 *(3 puntos)* Dada la función

$$f(x) = \begin{cases} 3x + A & \text{si} \quad x \leq 3 \\ -4 + 10x - x^2 & \text{si} \quad x > 3 \end{cases}$$

se pide:

a) (1 punto). Hallar el valor de A para que $f(x)$ sea continua. ¿Es derivable para ese valor de A?

b) (1 punto). Hallar los puntos en los que $f'(x) = 0$.

c) (1 punto). Hallar el máximo absoluto y el mínimo absoluto de $f(x)$ en el intervalo $[4, 8]$.

Solución:

a)

$$\lim_{x \longrightarrow 3^-} f(x) = 6 + A; \quad \lim_{x \longrightarrow 3^+} f(x) = 17$$

$$9 + A = 17 \Longrightarrow A = 8$$

$$f(x) = \begin{cases} 3x + 8 & \text{si} \quad x \leq 3 \\ -4 + 10x - x^2 & \text{si} \quad x > 3 \end{cases} \Longrightarrow f'(x) = \begin{cases} 3 & \text{si} \quad x \leq 3 \\ 10 - 2x & \text{si} \quad x > 3 \end{cases}$$

$$f'(3^-) = 3 \neq f'(3^+) = 4 \Longrightarrow \text{no es derivable en } x = 3$$

b) $f'(x) = 0$ sólo en el intervalo $(3, \infty)$ y será: $10 - 2x = 0 \Longrightarrow x = 5$

c) $f(4) = 20$, $f(8) = 12$, $f(5) = 21$, luego tendríamos un máximo absoluto en el punto $(5, 21)$ y un mínimo absoluto en el punto $(8, 12)$.

Problema 13.7.2 *(3 puntos)* Dado el sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} 3x + & ay + & 4z = & 6 \\ x + & (a+1)y + & z = & 3 \\ (a-1)x - & ay - & 3z = & -3 \end{cases}$$

se pide:

a) (2 punto). Discutir el sistema según los valores de a.

b) (1 punto). Resolverlo para $a = -1$.

Solución:

a)

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & a & 4 & 6\\ 1 & (a+1) & 1 & 3\\ (a-1) & -a & -3 & -3 \end{array}\right) \quad |A|=-3a^2-8a-5=0 \Longrightarrow a=-1,\ \ a=-5/3$$

- Si $k\neq -1$ o $k\neq -5/3 \Longrightarrow$ Rango(A) = 3 =Rango$(\overline{A})$ = n$^{\text{o}}$ de incógnitas, y el sistema es compatible determinado (solución única).
- Si $k=-5/3$:

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -5/3 & 4 & 6\\ 1 & -2/3 & 1 & 3\\ -8/3 & 5/3 & -3 & -3 \end{array}\right) \Longrightarrow \left|\begin{array}{cc} 4 & 6\\ 1 & 3 \end{array}\right| = 6\neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A)=2$$

$$\left|\begin{array}{ccc} 3 & 4 & 6\\ 1 & 1 & 3\\ -8/3 & -3 & -3 \end{array}\right| = -4\neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(\overline{A})=3$$

Luego Rango(A) $\neq$Rango$(\overline{A})$ y el sistema es incompatible (no tiene solución).

- Si $a=-1$:

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -1 & 4 & 6\\ 1 & 0 & 1 & 3\\ -2 & 1 & -3 & -3 \end{array}\right); \ F_3=F_2-F_1$$

Luego en este caso el sistema es compatible indeterminado (infinitas soluciones).

b) Si $a=-1$:

$$\left\{\begin{array}{rrrr} 3x- & y+ & 4z= & 6\\ x+ & & z= & 3 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=3-\lambda\\ y=3+\lambda\\ z=\lambda \end{array}\right.$$

Problema 13.7.3 *(2 puntos)* Se dan la recta r y el plano π, mediante

$$r\equiv \frac{x-4}{2}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z-2}{3},\quad \pi\equiv 2x+y-2z-7=0$$

Obtener los puntos de la recta cuya distancia al plano es igual a uno.

Solución:

$$r\equiv\left\{\begin{array}{l} x=4+2\lambda\\ y=1-\lambda\\ z=2+3\lambda \end{array}\right. \Longrightarrow r\equiv\left\{\begin{array}{l} \overrightarrow{u_r}=(2,-1,3)\\ P_r(4,1,2) \end{array}\right.$$

$$1 = d(P,\pi) = \frac{|2(4+2\lambda)+(1-\lambda)-2(2+3\lambda)-7|}{\sqrt{4+1+4}}$$

$$|3\lambda+2| = 3 \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 3\lambda+2=3 \Longrightarrow \lambda=1/3 \Longrightarrow P_1(14/3,2/3,3) \\ -3\lambda-2=3 \Longrightarrow \lambda=-5/3 \Longrightarrow P_1(2/3,8/3,-3) \end{array} \right.$$

Problema 13.7.4 *(2 puntos)* Dadas las rectas

$$r \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{2} = \frac{z}{-2}, \quad s \equiv \left\{ \begin{array}{l} x+y=4 \\ 2x+z=4 \end{array} \right.$$

se pide:

a) (1,5 puntos). Hallar la ecuación del plano que pasa por $A(2,3,4)$ y es paralelo a las rectas r y s.

b) (0,5 puntos). Determinar la ecuación de la recta que pasa por $B(4,-1,2)$ y es perpendicular al plano hallado anteriormente.

Solución:

a)

$$\overrightarrow{u_s} = \left| \begin{array}{ccc} i & j & k \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{array} \right| = (1,-1,-2)$$

$$\pi : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_r} = (2,2,-2) \\ \overrightarrow{u_s} = (1,-1,-2) \\ A(2,3,4) \end{array} \right. \Longrightarrow \pi : \left| \begin{array}{ccc} 2 & 1 & x-2 \\ 2 & -1 & y-3 \\ -2 & -2 & z-4 \end{array} \right| = 0 \Longrightarrow 3x-y+2z-11=0$$

b)

$$t \equiv \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_t} = (3,-1,2) \\ P_t(4,-1,2) \end{array} \right. \Longrightarrow \frac{x-4}{3} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z-2}{2}$$

13.8. Septiembre 2012 - Opción B

Problema 13.8.1 *(3 puntos)* Dado el punto $P(2,1,-1)$, se pide:

a) (0,5 puntos). Hallar el punto P' simétrico de P respecto del punto $Q(3,0,2)$.

b) (1,25 puntos). Hallar el punto P'' simétrico de P respecto de la recta $r \equiv x-1 = y-1 = z$.

c) (1,25 puntos). Hallar el punto P''' simétrico de P respecto del plano $\pi \equiv x+y+z=3$.

Solución:

a)
$$\frac{P'+P}{2} = Q \Longrightarrow P' = 2Q - P = (4, -1, 5)$$

b) Calculamos un plano $\pi \perp r$ que contenga a P

$$x+y+z+\lambda = 0 \Longrightarrow 2+1-1+\lambda = 0 \Longrightarrow \lambda = -2 \Longrightarrow x+y+z-2 = 0$$

Calculamos el punto de corte P_1 de π con r:

$$r : \left\{ \begin{array}{l} x = 1 + \lambda \\ y = 1 + \lambda \\ z = \lambda \end{array} \right.$$

$$(1+\lambda) + (1+\lambda) + \lambda - 2 = 0 \Longrightarrow \lambda = 0 \Longrightarrow P_1(1, 1, 0)$$

Por último:

$$\frac{P''+P}{2} = P_1 \Longrightarrow P'' = 2P_1 - P = (0, 1, 1)$$

c) Calculamos una recta $r \perp \pi$ que contenga a P:

$$r : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_r} = (1, 1, 1) \\ P(2, 1, -1) \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 2 + \lambda \\ y = 1 + \lambda \\ z = -1 + \lambda \end{array} \right.$$

Calculamos el punto de corte P_2 de π con r:

$$(2+\lambda) + (1+\lambda) + (-1+\lambda) - 3 = 0 \Longrightarrow \lambda = \frac{1}{3} \Longrightarrow P_2\left(\frac{7}{3}, \frac{4}{3}, -\frac{2}{3}\right)$$

Por último:

$$\frac{P'''+P}{2} = P_2 \Longrightarrow P''' = 2P_2 - P = \left(\frac{8}{3}, \frac{5}{3}, -\frac{1}{3}\right)$$

Problema 13.8.2 *(3 puntos)* Dada la función $f(x) = x^2 \sin x$, se pide:

a) (1 punto). Determinar, justicando la respuesta, si la ecuación $f(x) = 0$ tiene alguna solución en el intervalo abierto $(\pi/2, \pi)$.

b) (1 punto). Calcular la integral de f en el intervalo $[0, \pi]$.

c) (1 punto). Obtener la ecuación de la recta normal a la gráfica de $y = f(x)$ en el punto $(\pi, f(\pi))$. Recúerdese que la recta normal es la recta perpendicular a la recta tangente en dicho punto.

Solución:

a) $x^2 \neq 0$ en $(\pi/2, \pi)$ y $\sin x \neq 0$ en $(\pi/2, \pi)$, luego podemos concluir que $f(x) = x^2 \sin x \neq 0$ en $(\pi/2, \pi)$.

b) La integral se calcula por partes:

$$\int x^2 \sin x\, dx = \left[\begin{array}{c} u = x^2 \Longrightarrow du = 2xdx \\ dv = \sin x\, dx \Longrightarrow v = -\cos x \end{array} \right] = -x^2 \cos x + 2 \int x \cos x\, dx =$$

$$= \left[\begin{array}{c} u = x \Longrightarrow du = dx \\ dv = \cos x\, dx \Longrightarrow v = \sin x \end{array} \right] = -x^2 \cos x + 2 \left[x \sin x - \int \sin x\, dx \right] =$$

$$= -x^2 \cos x + 2x \sin x + 2 \cos x = (2 - x^2) \cos x + 2x \sin x$$

$$\int_0^\pi x^2 \sin x\, dx = \left. (2 - x^2) \cos x + 2x \sin x \right]_0^\pi = \pi^2 - 4$$

c) $f'(x) = 2x \sin x + x^2 \cos x$, $f'(\pi) = -\pi^2 \Longrightarrow m = 1/\pi^2$, $f(\pi) = 0$:

$$y = \frac{1}{\pi^2}(x - \pi) \text{ recta normal}$$

$$y = -\pi^2(x - \pi) \text{ recta tangente}$$

Problema 13.8.3 *(3 puntos)* Sean $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{c}$ y $\overrightarrow{d} \in R^3$, vectores columna. Si

$$det(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{d}) = -1, \quad det(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{c}, \overrightarrow{d}) = 3, \quad det(\overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}, \overrightarrow{d}) = -2$$

calcular razonadamente el determinante de las siguientes matrices:

a) (0,5 puntos). $det(\overrightarrow{a}, 3\overrightarrow{d}, \overrightarrow{b})$.

b) (0,75 puntos). $det(\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}, -\overrightarrow{d})$.

c) (0,75 puntos). $det(\overrightarrow{d} + 3\overrightarrow{b}, 2\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b} - 3\overrightarrow{a} + \overrightarrow{d})$

Solución:

a) $det(\overrightarrow{a}, 3\overrightarrow{d}, \overrightarrow{b}) = 3det(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{d}, \overrightarrow{b}) = -3det(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{d}) = 3$

b) $det(\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}, -\overrightarrow{d}) = det(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{c}, -\overrightarrow{d}) + det(-\overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}, -\overrightarrow{d}) = -3-2 = -5$

c) $det(\overrightarrow{d} + 3\overrightarrow{b}, 2\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b} - 3\overrightarrow{a} + \overrightarrow{d}) = det(\overrightarrow{d}, 2\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}) + det(\overrightarrow{d}, 2\overrightarrow{a}, -3\overrightarrow{a}) + det(\overrightarrow{d}, 2\overrightarrow{a}, \overrightarrow{d}) + det(3\overrightarrow{b}, 2\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}) + det(3\overrightarrow{b}, 2\overrightarrow{a}, -3\overrightarrow{a}) + det(3\overrightarrow{b}, 2\overrightarrow{a}, \overrightarrow{d}) = -2 + 0 + 0 + 0 + 0 + 6 = 4$

Problema 13.8.4 *(2 puntos)* Dado el sistema de ecuaciones lineales:

$$\left\{\begin{array}{rrrr} x- & & 2z = & 2 \\ ax- & y+ & z = & -8 \\ 2x+ & & az = & 4 \end{array}\right.$$

se pide:

a) (2 punto). Discutir el sistema según los valores de a.

b) (1 punto). Resolverlo para $a = -5$.

Solución:

a)

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & -2 & 2 \\ a & -1 & 1 & -8 \\ 2 & 0 & a & 4 \end{array}\right); \quad |A| = -a - 4 = 0 \Longrightarrow a = -4$$

- Si $a \neq -4 \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow$Rango$(A) = 3 =$Rango$(\overline{A}) =$n° de incógnitas y el sistema es compatible determinado.
- Si $a = -4$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & -2 & 2 \\ -4 & -1 & 1 & -8 \\ 2 & 0 & -4 & 4 \end{array}\right); |A| = 0, \quad \left|\begin{array}{rr} 1 & 0 \\ -4 & -1 \end{array}\right| = -1 \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 2$$

$$|A_1| = |A| = 0; |A_2| = \left|\begin{array}{rrr} 1 & 0 & 2 \\ -4 & -1 & -8 \\ 2 & 0 & 4 \end{array}\right| = 0$$

$$|A_3| = \left|\begin{array}{rrr} 1 & -2 & 2 \\ -4 & 1 & -8 \\ 2 & -4 & 4 \end{array}\right| = 0; \quad |A_4| = \left|\begin{array}{rrr} 0 & -2 & 2 \\ -1 & 1 & -8 \\ 0 & -4 & 4 \end{array}\right| = 0$$

Como

$$\left|\begin{array}{rr} 1 & 0 \\ -4 & -1 \end{array}\right| = -1 \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(\overline{A}) = 2$$

Luego cuando $a = -4$ tenemos que Rango$(A) = 2 =$Rango$(\overline{A}) <$ n° de incógnitas y el sistema es compatible indeterminado.

b)

$$\left\{\begin{array}{rrrr} x- & & 2z = & 2 \\ -5x- & y+ & z = & -8 \\ 2x- & & 5z = & 4 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{r} x = 2 \\ y = -2 \\ z = 0 \end{array}\right.$$