

MATEMÁTICAS II

TEMA 2: SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

- Junio, Ejercicio 3, Opción B
- Reserva 1, Ejercicio 3, Opción B
- Reserva 2, Ejercicio 3, Opción A
- Reserva 3, Ejercicio 3, Opción A
- Reserva 3, Ejercicio 3, Opción B
- Reserva 4, Ejercicio 3, Opción B
- Septiembre, Ejercicio 3, Opción A

$$\text{Resuelve } \begin{pmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 1 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

MATEMÁTICAS II. 2006. JUNIO. EJERCICIO 3. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

$$\text{El sistema que tenemos que resolver es: } \left. \begin{array}{l} 2x+5z = 7 \\ x+y-2z = -2 \\ -x+y+z = -1 \end{array} \right\}$$

Como el determinante de la matriz de los coeficientes es distinto de cero, podemos resolverlo por Cramer.

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 7 & 0 & 5 \\ -2 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 1 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{16}{16} = 1; y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 7 & 5 \\ 1 & -2 & -2 \\ -1 & -1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 1 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{-16}{16} = -1; z = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 0 & 7 \\ 1 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 1 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{16}{16} = 1$$

$$\left. \begin{array}{l} \lambda x + y - z = 1 \\ \text{Considera el sistema de ecuaciones lineales } x + \lambda y + z = \lambda \\ x + y + \lambda z = \lambda^2 \end{array} \right\}$$

a) Clasifica el sistema según los valores del parámetro λ .

b) Resuélvelo para $\lambda = 2$.

MATEMÁTICAS II. 2006. RESERVA 1. EJERCICIO 3. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos el determinante de la matriz de los coeficientes y lo igualamos a cero

$$|A| = \lambda^3 - \lambda = 0 \Rightarrow \lambda = 0, -1 \text{ y } 1$$

A continuación, calculamos los rangos de la matriz de los coeficientes y de la matriz ampliada del sistema y hacemos la discusión:

	R(A)	R(M)	
$\lambda = 0$	2	3	S.I.
$\lambda = -1$	2	2	S.C.I.
$\lambda = 1$	2	2	S.C.I.
$\lambda \neq 0, -1, 1$	3	3	S.C.D.

b) Lo resolvemos para $\lambda = 2$. El sistema es

$$\left. \begin{array}{l} 2x + y - z = 1 \\ x + 2y + z = 2 \\ x + y + 2z = 4 \end{array} \right\}$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{9}{6} = \frac{3}{2}; \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{-3}{6} = -\frac{1}{2}; \quad z = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{9}{6} = \frac{3}{2}$$

$$\text{Sea } A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & m-3 & 3 \\ m+1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

a) Determina los valores de $m \in \mathbb{R}$ para los que la matriz A tiene inversa.

b) Para $m = 0$ y siendo $X = (x \ y \ z)$, resuelve $X \cdot A = (3 \ 1 \ 1)$.

MATEMÁTICAS II. 2006. RESERVA 2. EJERCICIO 3. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos el determinante de la matriz de los coeficientes y lo igualamos a cero

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & m-3 & 3 \\ m+1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = m^2 + m - 6 = 0 \Rightarrow m = 2 ; m = -3$$

Luego, la matriz tiene inversa para todos los valores de $m \neq 2$ y -3

b)

$$X \cdot A = (3 \ 1 \ 1) \Rightarrow (x \ y \ z) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -3 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} = (3 \ 1 \ 1) \Rightarrow \begin{cases} x + z = 3 \\ x - 3y + 2z = 1 \\ -x + 3y = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \\ z = 1 \end{cases}$$

Considera el sistema de ecuaciones lineales

$$\left. \begin{aligned} x - y + z &= 2 \\ x + \lambda y + z &= 8 \\ \lambda x + y + \lambda z &= 10 \end{aligned} \right\}$$

a) Clasifica el sistema según los valores del parámetro λ .

b) Resuelve el sistema para $\lambda = 2$

MATEMÁTICAS II. 2006. RESERVA 3. EJERCICIO 3. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos el determinante de la matriz de los coeficientes y lo igualamos a cero

$|A| = 0$ para cualquier valor de λ , ya que tiene dos columnas iguales, por lo tanto $\text{rango}(A) < 3$ siempre.

Con la matriz ampliada del sistema formamos el determinante

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & \lambda & 8 \\ \lambda & 1 & 10 \end{vmatrix} = -2\lambda^2 + 2\lambda + 4 = 0 \Rightarrow \lambda = -1; \lambda = 2$$

A continuación, calculamos los rangos de la matriz de los coeficientes y de la matriz ampliada del sistema y hacemos la discusión:

	$R(A)$	$R(M)$	
$\lambda = -1$	1	2	S.I.
$\lambda = 2$	2	2	S.C.I.
$\lambda \neq -1, 2$	2	3	S.I.

b) Lo resolvemos para $\lambda = 2$. El sistema es

$$\left. \begin{aligned} x - y + z &= 2 \\ x + 2y + z &= 8 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} x - y &= 2 - z \\ x + 2y &= 8 - z \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{cases} x = 4 - z \\ y = 2 \\ z = z \end{cases}$$

Considera las matrices: $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ m-4 & 1 & 1-m \end{pmatrix}$; $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$; $O = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

a) Halla el valor de $m \in \mathbb{R}$ para el que la matriz A no tiene inversa.

b) Resuelve $A \cdot X = O$ para $m = 3$.

MATEMÁTICAS II. 2006. RESERVA 3. EJERCICIO 3. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos el determinante de la matriz y lo igualamos a cero

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ m-4 & 1 & 1-m \end{vmatrix} = 2m - 6 = 0 \Rightarrow m = 3$$

Luego, la matriz A no tiene inversa para $m = 3$.

b) El sistema que tenemos que resolver es:

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ 2x + y + z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = z \\ y = -z \\ z = z \end{cases} \quad \text{y además, tiene la solución trivial.}$$

$$\left. \begin{array}{l} x + y - z = -4 \\ \text{Considera el sistema de ecuaciones lineales } 3x + \lambda y + z = \lambda - 1 \\ 2x + \lambda y = -2 \end{array} \right\}$$

a) Clasifica el sistema según los valores del parámetro λ .

b) Resuelve el sistema para $\lambda = 1$.

MATEMÁTICAS II. 2006. RESERVA 4. EJERCICIO 3. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos el determinante de la matriz de los coeficientes y lo igualamos a cero

$$|A| = -2\lambda + 2 = 0 \Rightarrow \lambda = 1$$

A continuación, calculamos los rangos de la matriz de los coeficientes y de la matriz ampliada del sistema y hacemos la discusión:

	R(A)	R(M)	
$\lambda = 1$	2	2	S.C.I.
$\lambda \neq 1$	3	3	S.C.D.

b) Lo resolvemos para $\lambda = 1$. El sistema es

$$\left. \begin{array}{l} x + y - z = -4 \\ 3x + y + z = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + y = -4 + z \\ 3x + y = -z \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 - z \\ y = -6 + 2z \\ z = z \end{cases}$$

$$\left. \begin{array}{l} \lambda x - y - z = -1 \\ \text{Considera el sistema de ecuaciones: } x + \lambda y + z = 4 \\ x + y + z = \lambda + 2 \end{array} \right\}$$

a) Clasifica el sistema según los valores del parámetro λ .

b) Resuelve el sistema para $\lambda = 2$.

MATEMÁTICAS II. 2006. SEPTIEMBRE. EJERCICIO 3. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos el determinante de la matriz de los coeficientes y lo igualamos a cero

$$|A| = \begin{vmatrix} \lambda & -1 & -1 \\ 1 & \lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \lambda^2 - 1 = 0 \Rightarrow \lambda = 1; \lambda = -1$$

A continuación, calculamos los rangos de la matriz de los coeficientes y de la matriz ampliada del sistema y hacemos la discusión:

	R(A)	R(M)	
$\lambda = 1$	2	3	S. Incompatible
$\lambda = -1$	2	2	S. Compatible Indeterminado
$\lambda \neq 1$ y -1	3	3	S. Compatible Determinado

b) $\lambda = 2 \Rightarrow$ Sistema compatible determinado. Luego lo resolvemos por Cramer.

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 4 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{3}{3} = 1; \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{0}{3} = 0; \quad z = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{9}{3} = 3$$