

FUNCIÓN REAL DE VARIABLE REAL.

1. Representa la parábola: $y = x^2 - 6x + 8$.

2. Calcula el dominio de las siguientes funciones:

a) $y = x^2 + 1$ b) $y = -x + 2$ c) $y = \frac{x+2}{x-2}$ d) $y = \frac{x^2}{x^2-1}$

e) $y = \sqrt{x+2}$ f) $y = \sqrt{x^2+2x-3}$ g) $y = \begin{cases} x & \text{si } x < 2 \\ x^2 - 1 & \text{si } x > 2 \end{cases}$

h) $y = \begin{cases} x+1 & \text{si } x \leq 0 \\ 1 & \text{si } 0 < x < 3 \\ 5x-2 & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$ i) $y = \sqrt{\frac{x^2-4}{x}}$ j) $y = \sqrt{x^2-1} - \sqrt{x^2-4}$

k) $y = \frac{\sqrt{x^2-4}}{\sqrt{x-2}}$ l) $y = \frac{x+2}{x^2-4}$

Sol: a) $\mathbb{R}$; b) $\mathbb{R}$; c) $\mathbb{R} \setminus \{2\}$; d) $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$; e) $[-2, +\infty)$; f) $(-\infty, -3] \cup [1, +\infty)$; g) $\mathbb{R} \setminus \{2\}$; h) $\mathbb{R}$; i) $[-2, 0) \cup [2, +\infty)$; j) $(-\infty, -2] \cup [2, +\infty)$; k) $(2, +\infty)$; l) $\mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}$

3. Representa las funciones:

a) $y=2$ b) $y=x+3$ c) $y=-3x$ d) $y=x^2+2x-3$

e) $y = \begin{cases} x & \text{si } x < 2 \\ 2x & \text{si } x > 2 \end{cases}$ f) $y = \begin{cases} x-2 & \text{si } x \leq 2 \\ 0 & \text{si } 2 < x < 5 \\ -x+10 & \text{si } x \geq 5 \end{cases}$

4. Siendo $f(x)=x^2+1$; $g(x)=(x-2)/x$ y $h(x)=x^2/(x-1)$. Calcula:

a) $(hog)(x)$; b) $(fog)(x)$; c) $(foh)(x)$; d) $(goh)(x)$; e) $f^{-1}(x)$; f) $g^{-1}(x)$; g) $h^{-1}(x)$.

sol: a) $\frac{(x-2)^2}{x^2(x-1)}$; b) $\frac{(x-2)^2}{x^2} + 1$; c) $\left(\frac{x^2}{x-2}\right)^2 + 1$; d) $\frac{x^2-2x+2}{x^2}$;

e) $y = \sqrt{x-1}$; f) $y = \frac{-2}{x-1}$; g) $y = \frac{x \pm \sqrt{x^2-4x}}{2}$

5. Hallar la función inversa de:

a) $y = \frac{2x+1}{x+3}$ b) $y = \frac{x+5}{2x-2}$ c) $y = \frac{x-1}{x+2}$ d) $y = \frac{2x+1}{x-1}$

e) $y = \frac{x-4}{3x-5}$ f) $y = \frac{2x-1}{2x-3}$

Sol: a) $y = \frac{1-3x}{x-2}$; b) $y = \frac{2x+5}{2x-1}$; c) $y = \frac{2x+1}{1-x}$; d) $y = \frac{x+1}{x-2}$

$$e) y = \frac{5x-4}{3x-1}; f) y = \frac{3x-1}{2x-2}$$

6. Dadas las funciones: $f(x) = \frac{3x-2}{x^2-4}$, $g(x) = \sqrt{\frac{x-1}{x}}$. Calcula $(g \circ f)(x)$ y $(f \circ g)(x)$.

$$\text{sol: } (g \circ f)(x) = \sqrt{\frac{3x-x^2+2}{3x-2}} \quad (f \circ g)(x) = \frac{\sqrt[3]{\frac{x-1}{x}} - 2}{\frac{x-1}{x} - 4}$$

7. Calcula el dominio de las funciones:

$$a) y = x^3 - 8 \quad b) y = \frac{x^2+2x}{x^3-4x} \quad c) y = \sqrt{\frac{x-1}{x+2}} \quad d) y = \sqrt{x^2-3x+2}$$

$$e) y = \sqrt{x^3+4x} \quad f) y = \frac{3x+5}{x^2+9}$$

Sol: a) $\mathbb{R}$; b) $\mathbb{R} \setminus \{-2, 0, 2\}$; c) $(-\infty, -2) \cup [1, +\infty)$; d) $(-\infty, 1] \cup [2, +\infty)$; e) $[0, +\infty)$; f) $\mathbb{R}$

8. Calcula la inversa de las funciones:

$$a) y = \frac{3x+2}{1-x} \quad b) y = \sqrt{2x+3}$$

$$\text{Sol: a) } y = \frac{x-2}{x+3}; b) y = \frac{x^2-3}{2}$$

9. Dadas las funciones: $f(x) = \sqrt{x^2-2x}$, $g(x) = \sqrt{x-5}$, $h(x) = \frac{x+2}{x^2-2}$

Calcula: a) $(f \circ g)(x)$; b) $(h \circ g)(x)$; c) $f^{-1}(x)$; d) $(g \circ g)(x)$; e) $(g \circ f)(x)$; f) $g^{-1}(x)$.

$$\text{Sol: a) } y = \sqrt{x-5-2\sqrt{x-5}}; b) y = \frac{\sqrt{x-5}+1}{x-7}; c) y = 1 \pm \sqrt{1+x^2};$$

$$d) y = \sqrt{\sqrt{x-5}-5}; e) y = \sqrt{\sqrt{x^2-2x}-5}; f) y = x^2+5$$

10. Calcula el dominio de:

$$a) f(x) = \sqrt{\frac{-x+1}{x+1}} \quad b) g(x) = \sqrt{x-1} + \sqrt{x+1} \quad c) h(x) = \frac{x-8}{x^2-4}$$

$$d) f(x) = \sqrt{x-1} \quad e) f(x) = 2 + \sqrt{x} \quad f) g(x) = \sqrt{\frac{x-1}{x^2-9}} \quad g) h(x) = \sqrt{\frac{x^2-16}{6x-18}}$$

Sol: a) $(-1, 1]$; b) $[1, +\infty)$; c) $\mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}$; d) $[1, +\infty)$; e) $[0, +\infty)$; f) $(-3, 1] \cup (3, +\infty)$; g) $[-4, 3] \cup [4, +\infty)$

11. Dibuja las gráficas: a) $-x^2+4x+5$; b) $x^2-8x+16$; c) x^2-4x ; d) $2x^2+2$.

12. Dadas las funciones: $f(x)=x^3+x$ y $g(x)=x^2$.

Calcular: a) fog; b) f/g; c) g/f; d) fog; e) gof; f) $g^{-1}(x)$.

Sol: a) x^5+x^3 ; b) $(x^2+1)/x$; c) $x/(x^2+1)$; d) x^6+x^2 ; e) $(x^3+x)^2$; f) $\sqrt{x}$

13. Halla el dominio de las siguientes funciones:

$$\text{a) } y = \sqrt{9-x^2} \quad \text{b) } y = \frac{3}{x+2} + \frac{1}{x-1} \quad \text{c) } y = \frac{\sqrt{x^2+7}}{x^4+1}$$

$$\text{d) } y = \frac{2}{3x} \quad \text{e) } y = \sqrt{x^2-4x-5} \quad \text{f) } y = \frac{2x}{\sqrt{3-x}}$$

SOL: a) $[-3, +3]$; b) $\mathbb{R} \setminus \{-2, 1\}$; c) $\mathbb{R}$; d) $\mathbb{R} \setminus \{0\}$; e) $(-\infty, -1] \cup [5, +\infty)$; f) $(-\infty, 3)$

14. Estudia los dominios de las funciones:

$$\text{a) } y = \frac{x}{x^2-3x+2} \quad \text{b) } y = \sqrt{3-2x-x^2} \quad \text{c) } y = \frac{1}{\sqrt{x-2}}$$

Sol: a) $\mathbb{R} \setminus \{1, 2\}$; b) $[-3, 1]$; c) $(2, +\infty)$

15. Halla las asíntotas de las siguientes funciones:

$$\text{a) } f(x) = \frac{3x}{x-1} \quad \text{b) } f(x) = \frac{x-3}{x+2} \quad \text{c) } f(x) = \frac{4}{3-x}$$

$$\text{d) } f(x) = \frac{1}{x^2+1} \quad \text{e) } f(x) = \frac{2x}{x^2-x} \quad \text{f) } f(x) = \frac{-x}{(x+2)^2}$$

Sol: a) $x=1$, $y=3$; b) $x=-2$, $y=1$; c) $x=3$, $y=0$; d) $y=0$; e) $x=1$, $y=0$; f) $x=-2$, $y=0$

16. Cada una de las siguientes funciones tiene una asíntota oblicua. Hállala y estudia la posición de la curva respecto a ella:

$$\text{a) } f(x) = \frac{x^2}{x+2} \quad \text{b) } f(x) = \frac{2-x^2}{x} \quad \text{c) } f(x) = \frac{3x^2-1}{2x}$$

$$\text{d) } f(x) = \frac{x^2+2x-1}{x-1} \quad \text{e) } f(x) = \frac{2x^3-2}{x^2-x} \quad \text{f) } f(x) = \frac{-2x^2+3}{x+1}$$

Sol: a) $y=x-2$; b) $y=-x$; c) $y=3x/2$; d) $y=x+3$; e) $y=2x+2$; f) $-2x+2$

17. Halla las asíntotas de las siguientes funciones y sitúa la curva respecto a cada una de ellas:

$$\text{a) } f(x) = \frac{1+x}{2x+3} \quad \text{b) } f(x) = \frac{3x+1}{x-4} \quad \text{c) } f(x) = \frac{x-3}{x^2+1}$$

$$\text{d) } f(x) = \frac{2x^2}{x^2+x+3} \quad \text{e) } f(x) = \frac{x}{x^2-1} \quad \text{f) } f(x) = \frac{2x^2}{x-1}$$

Sol: a) $x=-3/2$, $y=1/2$; b) $x=4$, $y=3$; c) $y=0$; d) $y=2$; e) $x=1$, $x=-1$, $y=0$; f) $x=1$, $y=2x+2$

18. Prueba que la función $f(x) = \frac{3x-1}{x+1}$ sólo tiene una asíntota vertical y otra horizontal.

Sol: $y=3$, $x=-1$

19. Calcula los siguientes límites:

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - x}{x} \quad \text{b) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - x^2}$$

Sol: a) -1; b) -2

20. Estudia el comportamiento de estas funciones (límites laterales) en los puntos en los que no están definidas:

$$\text{a) } f(x) = \frac{1}{(2-x)^2} \quad \text{b) } f(x) = \frac{x+1}{x-3} \quad \text{c) } f(x) = \frac{1}{x^2-x} \quad \text{d) } f(x) = \frac{1}{x^2}$$

Sol: a) $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = +\infty$; b) $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = -\infty$ $\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = +\infty$;

c) $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = +\infty$ $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$; $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -\infty$ $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty$;

d) $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$

21. Halla las asíntotas de las funciones:

$$\begin{aligned} \text{a) } y &= \frac{2x^2+1}{x^2} & \text{b) } y &= \frac{x^2+2}{x-1} & \text{c) } y &= \frac{2x^2+3}{x^2-4x} & \text{d) } y &= \frac{x^2+2}{(x-1)^2} \\ \text{e) } y &= \frac{x^2+2x+1}{x-3} & \text{f) } y &= x + 1 + \frac{5}{x} \end{aligned}$$

Sol: a) $y=2$, $x=0$; b) $x=1$, $y=x+1$; c) $x=0$, $x=4$, $y=2$; d) $x=1$, $y=1$; e) $x=3$, $y=x+5$; f) $x=0$, $y=x+1$