

PROBLEMAS DE NUMEROS COMPLEJOS

Conjugado, opuesto, representaciones gráficas. Tipos de complejos.

1. Clasifica los siguientes números complejos en reales e imaginarios. Di, para cada uno, cuál es la parte real y cuál la imaginaria. a) $(3i)$; b) $1/3-5/2 i$; c) $6/5; -3i$; d) $\sqrt{3}-\sqrt{5} i$; e) 0 ; f) i ; g) $(1/3)-i$; h) -15 .

2. Escribe tres números complejos imaginarios puros, tres números imaginarios y tres números reales.

3. Representa gráficamente los números complejos: a) $(3+4i)$; b) -4 ; c) $-2i$; d) $(-2+3i)$; e) $(1+3i)$; f) $(6-i)$; g) -2 ; h) $3i$; g) $(-1+i)$.

4. Representa gráficamente el opuesto y el conjugado de: a) $-3+5i$; b) $3-2i$; c) $1-2i$; d) $-2+i$; e) 6 ; f) $5i$; g) 3 ; h) $-4i$.

5. Indica cuáles de los siguientes números son reales, imaginarios o complejos: a) -9 ; b) $-3i$; c) $-3i+1$; d) $\sqrt{3}+(1/2)i$; e) $(1/3)i$; f) $\sqrt{2}$; g) $-2i$; h) $(1+3i)$. Sol: R, I, C, C, I, R, I, C

6. Representa gráficamente los afijos de todos los números complejos z tales que al sumarlos con su respectivo conjugado, se obtenga dos; es decir: $z+z'=2$. Sol: recta $x=1$

7. Representa gráficamente los números complejos z tales que $z-z'=2$. ¿Qué debe verificar z ? Sol: es imposible

8. Representa gráficamente los opuestos y los conjugados de a) $-2-i$; b) $1+i$; c) $3i$.

9. Escribe en forma trigonométrica y polar los complejos: a) $4+3i$; b) $-1+i$; c) $5-12i$. Sol: a) $5^{71,56^\circ}$; b) $\sqrt{2}^{135^\circ}$; c) $13^{292,6^\circ}$

10. Escribe en las formas binómica y trigonométrica los números complejos: a) $3^{3/3}$; b) 3^{135° ; c) 1^{270° . Sol: a) $3(\cos 60 + i \sin 60) = 3/2 + 3\sqrt{3}/2 i$; b) $3(\cos 135 + i \sin 135) = -3\sqrt{2}/2 + 3\sqrt{2}/2 i$; c) $\cos 270 + i \sin 270 = -i$

11. Calcula tres argumentos del número complejo $1-i$. Sol: a) 315° , 675° ; 1035°

12. ¿Cuáles son el módulo y el argumento del conjugado de un número complejo cualquiera $r\bar{a}$. Sol: $r^{360-\bar{a}}$.

13. Expresa en forma binómica y en forma polar el conjugado y el opuesto del número complejo: 6^{30° . Sol: a) 6^{330° , $(3\sqrt{3}-3i)$; b) 6^{210° , $(-3\sqrt{3}-3i)$

14. Escribe en forma módulo-argumental (polar) los números complejos: a) $6-8i$; b) $\sqrt{2} + \sqrt{14}i$; c) $-3+4i$. Sol: a) $10^{306,9^\circ}$; b) $4^{69,3^\circ}$; c) $5^{126,9^\circ}$

15. Escribe en forma binómica el complejo $R=2(\cos 45^\circ + i \operatorname{sen} 45^\circ)$. Representalo gráficamente. Sol: a) $\sqrt{2} + \sqrt{2}i$

16. El módulo de un número complejo es 5 y su argumento 600° . Escribe el número en forma trigonométrica. Sol: $5(\cos 240^\circ + i \operatorname{sen} 240^\circ)$

17. ¿Qué argumento tiene el siguiente número complejo?: $4(3-2i) + 5(-2+i)$.
Sol: $303,7^\circ$

18. Averigua como debe ser un complejo $r_{\hat{a}}$ para que sea: a) un número real; b) un número imaginario puro. Sol: a) $\hat{a} = 0 + k\delta$; b) $\hat{a} = 90 + k\delta$

19. Escribe en forma polar: a) $1 + \sqrt{3}i$; b) $-1 + \sqrt{3}i$; c) $1 - \sqrt{3}i$; d) $-1 - \sqrt{3}i$; e) $3\sqrt{3} + 3i$; f) $-3\sqrt{3} - 3i$. Sol: a) 2^{60} ; b) 2^{120} ; c) 2^{300} ; d) 2^{240} ; e) $\sqrt{6}^{30}$; f) $\sqrt{6}^{210}$

20. Escribe en forma binómica: a) 2^{60} ; b) $1^{(3\delta/2)}$; c) 5^{450° ; d) 2^{180° ; e) 4^{750° ; f) $6^{(\delta/3)}$.
Sol: a) $(1 + \sqrt{3}i)$; b) $-i$; c) $5i$; d) -2 ; e) $(2\sqrt{3} + 2i)$; f) $(3 + 3\sqrt{3}i)$

21. Escribe todos los números complejos cuyos afijos estén en la circunferencia de centro $(1,2)$ y radio 5. Sol: $(5 \cos \hat{a} + 1, (5 \operatorname{sen} \hat{a} + 2)i)$

22. Escribir en forma polar y trigonométrica los números complejos: a) $\sqrt{3} + 3i$; b) $-1-i$; c) $2-2i$.

Sol: a) $\sqrt{12}^{60^\circ}$, $\sqrt{12}(\cos 60^\circ + i \operatorname{sen} 60^\circ)$; b) $\sqrt{2}^{225^\circ}$, $\sqrt{2}(\cos 225^\circ + i \operatorname{sen} 225^\circ)$; c) $2\sqrt{2}^{315^\circ}$, $2\sqrt{2}(\cos 315^\circ + i \operatorname{sen} 315^\circ)$

23. Escribe en forma binómica y trigonométrica los números complejos: a) $6^{3/3}$; b) 2^{45° ; c) 2^{300° . Sol: a) $6(\cos 60^\circ + i \operatorname{sen} 60^\circ) = (3, 3\sqrt{3}i)$; b) $2(\cos 45^\circ + i \operatorname{sen} 45^\circ) = (\sqrt{2} + \sqrt{2}i)$; c) $2(\cos 300^\circ + i \operatorname{sen} 300^\circ) = 1 - \sqrt{3}i$

24. Representar gráficamente los opuestos y los conjugados de: a) $-3-i$; b) $1+i$; c) $+3i$.

25. Escribir en forma binómica: $6(\cos 30^\circ + i \operatorname{sen} 30^\circ)$. Sol: $3\sqrt{3} - 3i$

26. Hallar el módulo y el argumento de: a) $(1+i)/(1-i)$. b) $(1+i)(2i)$.

Sol: a) 1^{90} ; b) $\sqrt{8}^{135}$

27. ¿Qué figura representan en el plano los puntos que tienen de coordenadas polares $(3, \hat{a})$, \hat{a} variable? ¿y los que tienen $(r, 90^\circ)$, r variable?.

Sol: a) circunferencia de centro $(0,0)$ y radio 3; b) semieje OY positivo

28. dado $z = r\bar{a}$. Expresar en forma polar: a) $-z$, b) z^{-1} , c) el conjugado de z , d) z^3 .
Sol: a) $r^{180+\bar{a}}$; b) $(1/r)^{-\bar{a}}$; c) $r^{-\bar{a}}$; d) $r^{3\bar{a}}$

Sumas, Restas, Productos, Divisiones. Mixtos

1. Efectúa las siguientes operaciones entre números complejos: a) $(2+3i)+(4-i)$; b) $(3+3i) - (6+2i)$; c) $(3-2i) + (2+i) - 2(-2+i)$; d) $(2-i)-(5+3i) + (1/2)(4-4i)$.

Sol: a) $(6+2i)$; b) $(-3+i)$; c) $(9-3i)$; d) $-1-6i$

2. Multiplica los siguientes números complejos: a) $(1+2i)(3-2i)$; b) $(2+i) \wedge (5-2i)$; c) $(i+1)(3-2i)(2+2i)$; d) $3(2-i)(2+3i)i$.

Sol: a) $7+4i$; b) $12+i$; c) $8+12i$; d) $-12+21i$

3. Efectúa las siguientes divisiones de números complejos: a) $(2+i)/(1-2i)$; b) $(7-i)/(3+i)$; c) $(5+5i)/(3-i)$; d) $(3-i)/(2+i)$; e) $(18-i)/(3+4i)$. Sol: a) i ; b) $2-i$; c) $1+2i$; d) $1-i$; e) $2-3i$

4. Efectúa las siguientes operaciones y simplifica: a) $5-3[3+(2/3)i]$; b) $[2i \wedge (-i+2)] / (1+i)$; c) $[(-2i)^2(1+3i)]/(4+4i)$; d) $[(1+3i)(1+2i)]/(1+i)$. Sol: a) $-4-2i$; b) $3+i$; c) $-2-i$; d) $5i$

5. Dado el número complejo $z = 2+2i$, calcula y representa: a) su conjugado (z'); b) la suma $z+z'$; c) el producto zAz' . Sol: a) $2-2i$; b) 4 ; c) 8

6. Calcula: a) $(3+i)(2+i)-(1-i)(2-2i)$; b) $(3-2i)+(1+2i)(6-2i)-(2-i)$; c) $(3+2i)+(2-4i) \wedge 6$. Sol: a) $(5+9i)$; b) $11+9i$; c) $15-22i$

7. Efectúa los siguientes productos y expresa el resultado en forma polar y binómica: a) $(\cos 30^\circ + i \operatorname{sen} 30^\circ) \wedge [2(\cos 15^\circ + i \operatorname{sen} 15^\circ)]$; b) $[2(\cos 23^\circ + i \operatorname{sen} 23^\circ)] \wedge [3(\cos 37^\circ + i \operatorname{sen} 37^\circ)]$; c) $[5(\cos 33^\circ + i \operatorname{sen} 33^\circ)] \wedge 2^{57^\circ}$; d) $(2+2i)(1-i)$; e) $(3+4i) \wedge 1^{180^\circ}$. Sol: a) $2^{45^\circ} = \sqrt{2} + \sqrt{2}i$; b) $6^{60^\circ} = 3\sqrt{3} + 3i$; c) $10^{90^\circ} = 10i$; d) $4^0 = 4$; e) $5^{233^\circ} = -3-4i$

8. Efectúa las siguientes operaciones: a) $1^{150} \wedge 3^{30}$; b) $6^{60} : 2^{15}$; c) $2^{20} \wedge 1^{30} \wedge 2^{70}$; d) $6^{(2\delta/3)} : 3^{90^\circ}$; e) $(5\delta/9)^9$; f) $(2+2i)^4$. Sol: a) 3^{180° ; b) 3^{45° ; c) 4^{120° ; d) 2^{30° ; e) 59^{180° ; f) 64^{180°

9. Efectúa las siguientes operaciones: a) $2^{05} \wedge 3^{85}$; b) $4^{65} : 2^{15}$; c) $5^{22} \wedge 2^{28} \wedge 1^{30}$; d) $4^{150} : 2^{(\delta/2)}$; e) $(2^{20})^3$; f) $(3^{60})^4$.

Sol: a) 6^{190} ; b) 2^{50} ; c) 10^{80} ; d) 2^{60} ; e) 8^{60} ; f) 81^{240}

10. Calcula el inverso de los números complejos siguientes y representa gráficamente el resultado: a) $2^{(\delta/2)}$, b) $4i$; c) $-3+i$.

Sol: a) $(1/2)^{(-\delta/2)}$; b) $-0,25i$; c) $(-3/10)-(1/10)i$

11. ¿Cómo es gráficamente el inverso de un número complejo?. ¿Cuál es su módulo?. ¿Y su argumento?. Sol: a) perpendicular; b) módulo = $(1/r)$, argumento = $-\bar{a}$

12. Simplifica las expresiones:

$$a) \frac{3_{45} 2_{15}}{6_{30}} \quad b) \frac{2_{30} 3_{60}}{3_{120} 1_{300}} \quad c) \frac{2_{45} 2_{15}}{4_{90}}$$

Sol: a) 1^{30° ; b) 2^{30° ; c) 1^{330}

13. Efectúa algebraica y gráficamente las operaciones con números complejos: a) $(3+2i)+(2-3i)$; b) $(-3+2i)+(-2-i)$; c) $(2-i)li$; d) $(-2+i)li$.

Sol: a) $(5-i)$; b) $(-5+i)$; c) $(1+2i)$; d) $(-1-2i)$

14. Calcular los siguientes productos: a) $2(\cos 23^\circ + i \operatorname{sen} 23^\circ) \cdot 5(\cos 12^\circ + i \operatorname{sen} 12^\circ)$. b) $(1+i) \cdot 2^{30^\circ}$. c) $2(\cos 18^\circ + i \operatorname{sen} 18^\circ) \cdot 3^{22^\circ}$.

Sol: a) $10(\cos 35^\circ + i \operatorname{sen} 35^\circ)$; b) $(-1 + \sqrt{3}) + (1 + \sqrt{3})i$; c) 6^{40°

15. Resolver las ecuaciones: a) $x^3 - 27 = 0$. b) $x^5 + 32 = 0$.

Sol: a) $x = 3$; $x = 3^{120}$; $x = 3^{240}$; b) 2^{36+72k}

16. Dados $z = (1, 3)$, $w = (2, 1)$ Hallar $z-w$; $z \cdot w$; z^{-1} .

Sol: a) $-1 + 2i$; b) $-1 + 7i$; c) $(1/10) - (3/10)i$

17. Dados $z = -1 + 3i$, $w = -2 + i$. Calcular y representar a) $z + w$; b) $z \cdot w$; c) z^2 ; d) $z + w'$; e) z/w .

Sol: a) $-3 + 4i$; b) $-1 - 7i$; c) $-8 - 6i$; d) $-3 + 2i$; e) $1 - i$

18. Efectúa las siguientes operaciones: a) $6^{90^\circ} \sqrt{2}^{15^\circ}$. b) $8^{120^\circ} / 4^{6/2}$.

Sol: a) 3^{75} ; b) 2^{30}

$$19. \text{ Halla } \frac{i^{32} \cdot i^{17}}{i^2 \cdot i^3} \quad \text{Sol: } 1$$

20. Halla el módulo de los complejos:

$$a) z = -2i(1+i)(-2-2i)(3); \text{ y } b) w = \frac{(2-i)(-1+2i)}{(1-i)(1+i)} \quad \text{Sol: a) } 24; \text{ b) } 5/2$$

21. Representa gráficamente las sumas: a) $(-i) + (3-i)$; b) $(-2+i) + (3-2i)$.

22. Representa gráficamente el número complejo $3-2i$. Aplícale un giro de 90° alrededor del origen. ¿Cuál es el nuevo número complejo?. Multiplica ahora $3-2i$ por i . Sol: $2+3i$; $12+5i$

$$23. \text{ Halla el módulo de } z = \frac{2-4i}{4+2i}. \quad \text{Sol: } |z| = 1$$

Ecuaciones

1. Resuelve las siguientes ecuaciones y di en qué campo numérico tienen solución: a) $x^2 + 4 = 0$; b) $x^2 - 9 = 0$; c) $x^2 + 1 = 0$.

Sol: a) $2i$; b) 3 ; c) i

2. Resuelve las ecuaciones: a) $x^2 - 2x + 5 = 0$; b) $x^2 - 6x + 13 = 0$; c) $x^2 - 4x + 5 = 0$.

Sol: a) $1 \pm 2i$; b) $3 \pm 2i$; c) $2 \pm i$

3. Encuentra los puntos de intersección de la circunferencia $x^2 + y^2 = 2$ y la recta $y = x$. ¿Son soluciones reales o imaginarias? Sol: reales: $(1,1)$, $(-1,-1)$

4. Encuentra los puntos de intersección de la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$ y la recta $y = x - 3$. ¿Son soluciones reales o imaginarias?

Sol: imaginarias $x = 3/2 \pm (\sqrt{5}/2)i$

5. ¿A qué campo numérico pertenecen las soluciones de estas ecuaciones? a) $x^2 - 3x + 2 = 0$; b) $x^2 - 2x + 2 = 0$; c) $2x^2 - 7x + 3 = 0$; d) $(x^2/2) + 8 = 0$.

Sol: a) Real, $x = 2$, $x = 1$; b) Imaginaria $x = 1 \pm i$; c) Real, $x = 1/2$, $x = 3$; d) Imaginaria, $x = \pm 4i$

6. Calcula los puntos de intersección de la elipse $(x^2/4) + (y^2/9) = 1$ con la recta $x = 5$.

Sol: $\pm 9/4 i$

7. Resuelve las ecuaciones siguientes indicando el campo numérico al que pertenecen las soluciones: a) $x^2 - 4 = 0$; b) $x^2 - 5 = 0$; c) $x^2 + 1 = 0$.

Sol: a) ± 2 ; b) $\pm \sqrt{5}$; c) $\pm i$

8. Resuelve las ecuaciones: a) $x^2 - 10x + 29 = 0$; b) $x^2 - 6x + 10 = 0$; c) $x^2 - 4x + 13 = 0$.

Sol: a) $5 \pm 2i$; b) $3 \pm i$; c) $2 \pm 3i$

9. Representa gráficamente las raíces de las ecuaciones: a) $x^2 + 4 = 0$; b) $x^2 + 1 = 0$; c) $x^2 - 9 = 0$; d) $x^2 + 9 = 0$. Sol: a) $\pm 2i$; b) $\pm i$; c) ± 3 ; d) $\pm 3i$

10. Escribe una ecuación de segundo grado cuyas raíces sean $2 + 2i$ y $2 - 2i$. (Recuerda: $x_1 + x_2 = (-b/a)$; $x_1 \cdot x_2 = (c/a)$. Sol: $x^2 - 4x + 8 = 0$

11. Resuelve la ecuación $x^3 + 27 = 0$. Representa gráficamente todas sus soluciones. Sol: $x = 3^{180^\circ}$, $x = 3^{300^\circ}$, $x = 3^{60^\circ}$

12. Resuelve la ecuación de segundo grado $x^2 - 2x + 17 = 0$. Tiene dos raíces complejas. ¿Cómo son entre sí? ¿Se puede generalizar el resultado?

Sol: a) $1 \pm 4i$; b) conjugadas; c) sí

13. Resuelve las ecuaciones: a) $x^3 - 8 = 0$; b) $x^5 - 32 = 0$; c) $x^4 - 81 = 0$; d) $x^3 - 1 = 0$.

Sol: a) $x = 2^{120k}$; b) $x = 2^{72k}$; c) $x = \pm 3$; $x = \pm 3i$; d) $x = 1$, $x = 1^{120}$, $x = 1^{240}$

14. Resuelve la ecuación $x^2 - 4x + 5 = 0$ y comprueba que, en efecto, las raíces obtenidas verifican dicha ecuación. Sol: a) $2 \pm i$

15. Resuelve las ecuaciones $x^6 + 64 = 0$ y $x^4 + 81 = 0$.

Sol: a) $x = 2^{90+60k}$; b) $x = 3^{45+90k}$

16. Escribe una ecuación de raíces $1+3i$, $1-3i$. Sol: $x^2-2x+10=0$

17. Probar que $3+i$ y $3-i$ son raíces de la ecuación $x^2-6x+10$.

Sol: $[x-(3+i)][x-(3-i)]=x^2-6x+10$

18. Resolver la ecuación: a) $x^4+1=-35$. Sol: $x=\sqrt{3}+\sqrt{3}i$; $x=-\sqrt{3}+\sqrt{3}i$

Potencias, raíces. Mixtos

1. Calcula las potencias: a) $(2-3i)^3$; b) $(3+i)^2$; c) i^{23} ; d) $(2+2i)^4$.

Sol: a) $-46-9i$; b) $8+6i$; c) $-i$; d) -64

2. Calcula: a) i^{27} ; b) i^{48} ; c) i^7 ; d) i^{12} ; e) i^{33} ; f) i^{35} .

Sol: a) $-i$; b) 1 ; c) $-i$; d) 1 ; e) i ; f) $-i$

3. Sabemos que $z=3-2i$, que $z^2=4-3i$ y que $z^3=-3i$. Calcular: a) $z^4+2z^2-z^3$; b) $z^4(z^2+z^3)$; c) z^2 ; d) $2z^4-z^2+z^3$.

Sol: a) $11-5i$; b) $-26i$; c) $7-24i$; d) $2-4i$

4. Calcula: a) $(1+2i)^3$; b) $(-3-i)^4$; c) $(1-3i)^2$. Sol: a) $-11-2i$; b) $28+96i$; c) $-8-6i$

5. Calcula: a) i^{210} ; b) i^{312} ; c) i^{326} ; d) i^{1121} . Sol: a) -1 ; b) 1 ; c) -1 ; d) i

6. Calcula a) $(1+i)^3$; b) $(1-i)^3$; c) $(-1+i)^3$; d) $(-1-i)^3$. Sol: a) $-2+2i$; b) $-2-2i$; c) $2+2i$; d) $2-2i$

7. Calcula: a) $1/i^3$; b) $1/i^4$; c) i^{-1} ; d) i^{-2} . Sol: a) i ; b) 1 ; c) $-i$; d) -1

8. Dados los complejos: $z^1=3^{45^\circ}$; $z^2=2^{30^\circ}$ y $z^3=-2i$. Calcula: a) z^1z^3 ; b) $z^1/(z^2)^2$; c) $(z^1)^2/[z^2(z^3)^3]$. Sol: a) 6^{315° ; b) $(3/4)^{-15^\circ}$; c) $(9/16)^{330^\circ}$

9. Calcula, expresando el resultado en forma polar: a) $(1+i)^6$; b) $[(-1/2)+(\sqrt{2}/2)i]^8$; c) $(1-i)^4$. Sol: a) 8^{270° ; b) 1^{240° ; c) 4^{180°

10. Calcula las potencias: a) $[2(\cos 45^\circ + i \sin 45^\circ)]^4$; b) $(\sqrt{2}^{30^\circ})^6$; c) $[^4\sqrt{3}(\cos 10^\circ + i \sin 10^\circ)]^8$.

Sol: a) 16^{180° ; b) $8^{180^\circ} = -8$; c) 9^{80°

11. Calcula las raíces quintas de la unidad. Hazlo expresando 1 como complejo en forma polar.

Sol: 1^{0° ; 1^{72° ; 1^{144° ; 1^{216° ; 1^{288°

12. Calcula: a) $\sqrt{-i}$; b) $\sqrt[3]{1+i}$; c) $\sqrt{-16}$

Sol: a) 1^{135° ; 1^{315° ; b) $\sqrt[3]{2}^{15^\circ}$, $\sqrt[3]{2}^{135^\circ}$, $\sqrt[3]{2}^{255^\circ}$; c) 4^{90° , 4^{270°

13. Calcula $\sqrt[3]{\frac{1-i}{1-\sqrt{3}i}}$. Sol: $1/\sqrt[6]{2}^{5+120k}$

14. Calcula las raíces siguientes y representa gráficamente las soluciones: a) $\sqrt{-4}$; b) $\sqrt[3]{-27}$; c) $\sqrt[3]{\frac{1+i}{1-i}}$; d) $\sqrt[3]{\frac{-27}{i}}$

Sol: a) 2^{90° , 2^{270° ; b) 3^{60} , 3^{180} , 3^{300} ; c) 1^{30} , 1^{150} , 1^{270} ; d) 3^{30} , 3^{150} , 3^{270}

15. Calcula las raíces: a) $\sqrt{4(\cos 60'' + i \operatorname{sen} 60'')}$; b) $\sqrt[3]{27(\cos 180'' + i \operatorname{sen} 180'')}$; c) $\sqrt[4]{81(\cos 120'' + i \operatorname{sen} 120'')}$; d) $\sqrt[6]{i}$. Sol: a) 2^{30} , 2^{210} ; b) 3^{60} , 3^{180} , 3^{300} ; c) 3^{40+90k} ; d) 1^{15+60k}

16. ¿De qué número es $(2+3i)$ raíz cúbica?. Sol: $-46+9i$

17. a) Opera la expresión $(1+3i)^2(3-4i)$ y b) calcula las raíces cúbicas del resultado. Sol: a) $50i$; b) $\sqrt[3]{50}^{30+120k}$

18. Calcula el valor de $(i^4-i^3)/8i$ y encuentra sus raíces cúbicas. Sol: $(1/2)^{105+120k}$

19. Calcula: a) $(1+i)^8$; b) $(-1+i)^6$; c) $(1+\sqrt{3}i)^2$; d) $(-2-2i)^4$. Sol: a) 16^0 ; b) 8^{90} ; c) 10^{120} ; d) 64^{180}

20. Calcula $(i^4+i^5)/\sqrt{2}i$. Escribe el resultado en forma polar. Sol: 1^{315}

21. a) Calcula $(\cos 10^\circ + i \operatorname{sen} 10^\circ)^8$; b) Si una raíz cúbica de un número es $2i$, calcula las otras dos raíces y ese número. Sol: a) 1^{80} ; b) 2^{210} , 2^{330} ; $-8i = 8^{270}$

22. Hallar las raíces cúbicas de los complejos: a) $2+2i$; b) $1+\sqrt{3}$; c) $-2+2\sqrt{3}i$. Sol: a) $\sqrt{2}^{15^\circ}$, $\sqrt{2}^{135^\circ}$, $\sqrt{2}^{255^\circ}$; b) $\sqrt[6]{2}^{20+120k}$; c) $\sqrt[3]{2}^{40+120k}$

23. Calcula: $z = \sqrt[3]{\frac{8}{2-2i}}$ Sol: $\sqrt{2}^{15+120k}$

24. Hallar las raíces cúbicas de a) -1 y b) $-i$. Sol: a) 1^{60} , 1^{180} , 1^{300} ; b) 1^{90} , 1^{210} , 1^{330}

25. Calcular la siguiente operación expresando las tres raíces en forma polar:

$$\sqrt[3]{\frac{3+3i}{-3+3i}}$$

Sol: 1^{90} ; 1^{210} ; 1^{330}

26. Calcular: a) i^{14} , i^{18} , i^{33} . b) Si $z^1 = 2-2i$; $z^2 = 1+3i$; y $z^3 = 2i$. Hallar: $2z^1 - z^2 + 2z^3$; $z^1 \cdot (z^2 - z^3)$; $(z^1)^2$. c) Hallar: $(1+2i)^3$. d) Hallar x para que se verifique que $(x-i)/(2+i)$

$$= 1-i.$$

Sol: a) -1, -1, i; b) 3-3i, 4, -8i; c) -11-2i; d) $x=3$

27. Calcular $\sqrt[3]{-27i}$. Sol: 3^{90} , 3^{210} , 3^{330}

28. Calcula las siguientes potencias: a) $[2(\cos 25^\circ + i \sin 25^\circ)]^4$. b) $(\sqrt{3}^{30^\circ})^8$.

Sol: a) 16^{100° ; b) 81^{240°

29. Hallar el módulo de: $5 \cdot (i^2 + i^3)/(i^2 - 3i)$. Sol: $z = -1 - 2i$; $|z| = \sqrt{5}$

30. Calcular $(-2 + 2i)^{64}$ Sol: $8^{32 \cdot 8640} = 8^{32}$

31. Calcula el valor de $(i^3 - i^{-3})/(2i)$ y halla sus raíces cúbicas.

Sol: a) -1; b) 1^{60} , 1^{180} , 1^{300}

32. a) Calcula el valor de la fracción $(z^3 + z)/(z^2 + 2)$ para $z = 1 + i$; b) Dar el valor de la misma fracción para $z' = 1 - i$.

Sol: a) $1/2 + i$; b) $1/2 - i$

33. Calcula sin desarrollar los binomios y expresa el resultado en forma binómica: a) $(1 + i)^4$, b) $(1 + \sqrt{3}i)^6$.

Sol: a) $4^{180} = -4$; b) $64^0 = 64$

34. Hallar el conjugado del opuesto de a) $(1 - 2i)^3$; b) $25/(3 + 4i)$; c) $((2 + i)/(1 - 2i))^2$.

Sol: a) $11 + 2i$; b) $-3 - 4i$; c) 1

35. Calcular el valor de $(z^2 + z - 1)/(z^2 - 2z)$ para $z = 1 + i$.

Sol: $-3/2 i$

36. Hallar: a) $(1 + i)^{20}$, b) $(2\sqrt{3} - 2i)^{30}$, c) $(-\sqrt{3} - i)^{12}$ y expresar el resultado en forma polar y binómica. Sol: a) $2^{10 \cdot 180} = -2^{10}$; b) $4^{30 \cdot 180} = -4^{30}$; c) $2^{12 \cdot 0} = 4096$

37. Hallar $z = (\cos 20^\circ + i \sin 20^\circ)^{10}$, $w = (\cos 50^\circ - i \sin 50^\circ)^{30}$ y expresar el resultado en forma binómica. Hallar z^{-1} y el conjugado de w . Sol: $z = (\cos 200^\circ + i \sin 200^\circ)$; $w = (\cos 300^\circ + i \sin 300^\circ) = 1/2 - \sqrt{3}/2 i$; $z^{-1} = 1^{160}$; $w' = 1/2 + \sqrt{3}/2 i$

38. Hallar el módulo y el argumento de $\left(\frac{2 + 2i}{2 - 2i} \right)^4$ Sol: $1^{360} = 1$

39. Hallar las raíces quintas de: a) 1, b) -1, c) $1/32$, d) $243i$, e) $-32i$, f) $\sqrt{3} + i$.

Sol: a) $10 + 72k$; b) $136 + 72k$; c) $(1/2)^{0 + 72k}$; d) $3^{18 + 72k}$; e) $2^{36 + 72k}$; f) $\sqrt[5]{2}^{6 + 72k}$

40. Hallar la raíz cuadrada de los complejos: a) $5 + 12i$ y b) $1/(3 + 4i)$. Sol: a) $3 + 2i$; $-3 - 2i$; b) $2/5 - 1/5i$; $-2/5 + 1/5i$

41. Calcular y representar los afijos de las raíces cúbicas de $\frac{2i^9 + i^{-7}}{3i}$. Expresar el resultado en forma binómica. Sol: $1, -1/2 + \sqrt{3}/2 i, -1/2 - \sqrt{3}/2 i$

Incógnitas reales o complejas

1. ¿Cuánto debe valer x para que el número $(1 + xi)^2$ sea imaginario puro?.

Sol: $x = 1$

2. Calcula los números x e y para que se verifique la igualdad: $(3 + xi) + (y + 3i) = 5 + 2i$. Sol: $x = -1; y = 2$

3. Determina el valor de x para que se verifique la igualdad: $(x-i)/(1-i) = (2+i)$. Sol: $x = 3$

4. Calcula los números reales x e y para que se verifique $(-4 + xi)/(2-3i) = (y-2i)$. Sol: $x = -7; y = 1$

5. Determina x para que el producto $(3 + 2i)(6 + xi)$ sea: a) un número real; b) un número imaginario puro. Sol: a) $x = -4$; b) $x = 9$

6. Determinar los números reales x e y para que se cumpla: $\frac{x+2i}{1-i} + yi = 1$. Sol: $x = 4; y = 3$

7. Calcular a para que el complejo $z = (4 + ai)/(1-i)$ sea: a) Imaginario puro. b) Real. Sol: a) $a = 4$; b) $a = -4$

8. Hallar el módulo y el argumento del número complejo: $z = (x+i)/(x-i)$, x perteneciente a \mathbb{R} . Sol: $|z| = 1; \arg z = 2\hat{a}$

9. Determinar x para que el módulo del complejo $z = (x+i)/(1+i)$ sea $\sqrt{5}$.

Sol: $x = 3$

10. Resolver: $(4 + xi)/(2 + i) = y + 2i$. Sol: $x = 7, y = 3$

11. Hallar el valor de x para que la operación $(2-xi)/(1-3i)$ tenga sólo parte real, sólo parte imaginaria y para que su representación esté en la bisectriz del primer y tercer cuadrante, es decir, la parte real e imaginaria sean iguales.

Sol: $x = 6, x = -2/3, x = 1$

12. Hallar x para que el número $(3-xi)(2+i)$ esté representado en la bisectriz del primer y tercer cuadrante. Sol: $x = -1$

13. Hallar x e y para que se cumpla: a) $(x-i)(y+2i) = 4x+i$; b) $(-4+xi)/(2+2i) = y+3i$.

Sol: a) $x = 2, y = 3$; b) $x = 8, y = 1$

14. Hallar x , para que la expresión: $z = (4+xi)/(2+i)$ sea: a) real, b) imaginario puro. Sol: a) $x=2$; b) $x=-8$

15. Hallar k , para que $|z-2| = 3$, siendo $z=k+3i$. Sol: $k=2$

16. Determina el valor real de x de modo que el afijo del producto de los números complejos $3+i$ y $4+2i$ sea un punto de la bisectriz del primer cuadrante. Sol: $x=1$

17. Resolver el siguiente sistema:
$$\begin{cases} (2+i)x + 2y = 1+7i \\ (1-i)x + iy = 0 \end{cases}$$

Sol: $x=1+i$; $y=2i$

18. Resuelve las ecuaciones siguientes en el campo complejo. En todos los casos z es un número complejo; despéjalo y calcula su valor:

a) $(2-2i)z=10-2i$; b) $\frac{z}{3+i}=2-i$; c) $\frac{z}{3+4i} + \frac{2z+5i}{1-2i}=2+2i$;

d) $\frac{z}{-z} + \frac{2z-2i}{1-i}=3-2i$

Sol: a) $3+2i$; b) $7-i$; c) $4-3i$; d) $1-2i$

19. Despeja z y calcula su valor en las ecuaciones siguientes: a) $[z/(1+i)]+(2-3i)=(4-4i)$; b) $(3+i)/z=(1+2i)$; c) $(2+2i)z=(10+2i)$.

Sol: a) $3+i$; b) $1-i$; c) $3-2i$

20. Resuelve los sistemas de ecuaciones siguientes, en los que \hat{a} y \hat{a} son números complejos:

a)
$$\begin{cases} \hat{a} + (2+i)\mathbf{b} = -3+7i \\ (2-i)\hat{a} + (2+i)\mathbf{b} = 5+3i \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} \hat{a}(1+2i) + (1+i)\mathbf{b} = 5+5i \\ (2+i)\hat{a} + i\mathbf{b} = 2+2i \end{cases}$$

c)
$$\begin{cases} (1+i)\hat{a} + (2+i)\mathbf{b} = 9+2i \\ 2\hat{a} - i\mathbf{b} = 5-4i \end{cases}$$

Sol: a) $\hat{a}=3+i$; $\hat{a}=2i$; b) $\hat{a}=1-i$; $\hat{a}=3+i$; c) $\hat{a}=3-i$; $\hat{a}=2-i$

21. Resuelve gráficamente el sistema:
$$\begin{cases} |z-(2+i)| = 2 \\ |z-(3+i)| = 3 \end{cases}$$

22. Sea $a=3-2i$ un número complejo dado y z un número complejo cuyo afijo permanece sobre la recta $r: x+y-2=0$. Hallar el lugar geométrico de los afijos del complejo $a+z$. Sol: $x+y-3=0$

23. Hallar el lugar geométrico de la imagen del complejo z , sabiendo que $2|z| = |z-i|$. Sol: $a^2 + b^2 + (2/3)b - (1/3) = 0$ (circunferencia)

24. Calcular z en las ecuaciones siguientes:

$$\text{a) } \frac{z}{1-2i} + 1-i = 2+i \quad \text{b) } \frac{z}{2+i} + \frac{z-i}{2-i} = 3-2i$$

Sol: a) 5; b) $7/2-2i$

25. Resolver el sistema (x e y son números complejos):

$$\begin{cases} (2+i)x + (1+i)y = 2+3i \\ (2-i)x - iy = 0 \end{cases}$$

Sol: $x=i$; $y=2-i$

26. Hallar el número complejo z que cumpla: $[z/(2-i)] + [(2z-5)/(2-i)] = 1+2i$.

Sol: $z=3+i$

27. Hallar z tal que z^3 sea igual al conjugado de z . Sol: $z=i$, $z=1$, $z=-1$, $z=0$

28. Resolver la ecuación $(1-i)z^2 - 7 = i$. Sol: $z=2+i$ y $z=-2-i$

Problemas y método de Moivre

Problemas

1. Si el producto de dos números complejos es -18 y dividiendo uno de ellos entre el otro, obtenemos de resultado $2i$. ¿Cuánto valen el módulo y el argumento de cada uno?.
Sol: 3^{45° y 6^{135°

2. El cociente de dos números complejos es $1/2$ y el dividendo es el cuadrado del divisor. Calcula sus módulos y sus argumentos. Sol: $(1/2)^{0^\circ}$; $(1/4)^{0^\circ}$

3. Aplica un giro de 90° sobre el punto $A(3,1)$. Determina, utilizando el cálculo de números complejos, las coordenadas del punto que obtienes.

Sol: a) $(-1,3)$

4. La suma de dos números complejos conjugados es 6 y la suma de sus módulos 10 . ¿De qué números complejos se trata?. Sol: $(3+4i)$, $(3-4i)$

5. La resta de dos números complejos es $2+6i$, y el cuadrado del segundo dividido por el primero es 2 . Hallarlos. Sol: $4+2i$, $6+8i$; $4i$, $-2-2i$

6. Hallar dos números complejos sabiendo que: su diferencia es real, su suma tiene de parte real 8 y su producto vale $11-16i$. Sol: $(3-2i)$; $2i$

7. El producto de dos números complejos es -27 . Hallarlos sabiendo que uno de ellos es el cuadrado del otro. Sol: 3^{60° , 9^{120° .

8. La suma de dos números complejos es $-5+5i$; la parte real de uno de ellos es 1 .

Determinar dichos números sabiendo que su cociente es imaginario puro. Sol: $(1+3i)$ y $(-6+2i)$ ó $(1+2i)$ y $(-6+3i)$

9. La suma de dos complejos es $5-i$ y su producto es $8+i$. Hallar los números. Sol: $3-2i$, $2+i$

10. La suma de dos complejos conjugados es 8 y la suma de sus módulos 10 ¿Cuáles son los números complejos?. Sol: $(4+3i)$, $(4-3i)$

11. El producto de dos números complejos es -2 y el cubo de unos de ellos dividido por el otro es $1/2$. Calcula módulos y argumentos. Sol: 1^{45° , 2^{135° ; 1^{135° , 2^{45° ; 1^{225° , 2^{315° ; 1^{315° , 2^{225°

12. Halla z tal que: a) el conjugado de z (z') sea igual a $-z$. b) el conjugado de z sea igual a z^{-1} . c) la suma del conjugado de z mas z sea igual a 2 . d) z menos el conjugado de z sea igual a $2i$. Sol: a) $z = ki$; b) $a+bi/a^2+b^2=1$; c) $1+ki$; d) $k+i$

13. El complejo de argumento 70° y módulo 8 es el producto de dos complejos, uno de ellos tiene de argumento 40° y módulo 2 . Escribir en forma binómica el otro complejo. Sol: $8^{30^\circ} = 4\sqrt{3} + 4i$

14. Determina el número complejo sabiendo que si después de multiplicarlo por $(1-i)$ se le suma al resultado $(-3+5i)$ y se divide lo obtenido por $2+3i$ se vuelve al complejo de partida. Sol: $1+i$

Figuras geométricas

15. Sabiendo que los puntos P, Q y R son los afijos de las raíces cúbicas de un número complejo, siendo las coordenadas polares de P 3^{30° . Hallar las coordenadas polares y cartesianas de Q y R y el número complejo. Sol: $Q = 3^{150^\circ} = -3\sqrt{3}/2 + 3/2 i$; $R = 3^{270^\circ} = -3i$; $27i$

16. Halla las coordenadas de los vértices de un hexágono regular, de centro el origen sabiendo que uno de los vértices es el afijo del número complejo $2^{5/2}$. Sol: 2^{150} , 2^{210} , 2^{270} , 2^{330} , 2^{30}

17. Halla las coordenadas de los vértices de un cuadrado (de centro el origen de coordenadas) sabiendo que uno de sus vértices es el afijo del número complejo 1^{120} . Sol: 1^{30° , 1^{210° , 1^{300°

18. Hallar las coordenadas polares y cartesianas de los vértices de un hexágono regular de radio 3 u, sabiendo que un vértice está situado en el eje OX. Sol: 3^{0° , 3^{60° , 3^{120° , 3^{180° , 3^{240° , 3^{300}

19. Los afijos de las raíces de un complejo son vértices de un octógono regular inscrito en una circunferencia de radio 2 u; el argumento de una de las raíces es 45° . Hallar el número complejo y las restantes raíces. Sol: 2^{56} ; 2^{45} , 2^{90} , 2^{135} , 2^{180} , 2^{225} , 2^{270} , 2^{315} , 2^0

20. Hallar las coordenadas de los vértices de un cuadrado, inscrito en una circunferencia de centro el origen de coordenadas, sabiendo que uno de los vértices es el afijo del complejo $1+2i$. Sol: $2+i$, $-2+i$, $-1-2i$

Método de Moivre

21. Expresa en función de $\cos \hat{a}$ y $\sin \hat{a}$ y utilizando la fórmula de Moivre: a) $\cos 2\hat{a}$ y $\sin 2\hat{a}$; b) $\cos 3\hat{a}$ y $\sin 3\hat{a}$. Sol: a) $\sin 2\hat{a} = 2\sin \hat{a}\cos \hat{a}$; $\cos 2\hat{a} = \cos^2 \hat{a} - \sin^2 \hat{a}$; b) $\sin 3\hat{a} = 3\cos^2 \hat{a}\sin \hat{a} - \sin^3 \hat{a}$; $\cos 3\hat{a} = \cos^3 \hat{a} - 3\cos \hat{a}\sin^2 \hat{a}$

22. Encuentra las fórmulas para calcular $\sin 4\hat{a}$ y $\cos 4\hat{a}$ en función de $\sin \hat{a}$ y $\cos \hat{a}$. Sol: $\sin 4\hat{a} = 4\sin \hat{a}\cos^3 \hat{a} - 4\cos \hat{a}\sin^3 \hat{a}$; $\cos 4\hat{a} = \cos^4 \hat{a} + \sin^4 \hat{a} - 6\cos^2 \hat{a}\sin^2 \hat{a}$

23. Hallar $\sin^3 5a$ y $\cos^2 5a$ sabiendo que $\sin a = 1/2$ y a pertenece al primer cuadrante. Sol: $\sin^3 5a = 1/8$; $\cos^2 5a = 3/4$

24. Si $\sin x = 1/3$ y $0 < x < \pi/2$. Hallar $\sin 6x$ y $\cos 6x$. Sol: $\sin 6\hat{a} = 460\sqrt{2}/729$; $\cos 6\hat{a} = -329/729$