Números complejos

1. Determinar el valor de *a* para que el módulo del nº complejo $\dfrac{a+i}{2+i}$ sea 2.
2. La suma de las partes reales de dos números complejos conjugados es 6 y la suma de sus módulos es 10. Determinar los afijos de esos complejos en las formas cartesiana y polar.
3. Hallar las siguientes raíces:

   a. $\sqrt[3]{1+i}$ b. $\sqrt[4]{1+\sqrt{3}\,i}$ c. $\sqrt[5]{4}$ d. $\sqrt[3]{i}$
4. Una raíz cuarta de un número es **-1 + i**. Calcular las otras tres raíces y el número.
5. Resolver las siguientes ecuaciones en el cuerpo de los números complejos:

   a. $x^4-1=0$ b. $x^2+3i=0$ c. $z^5+64z^2=0$
6. Resolver en ℂel sistema de ecuaciones:

   $$\begin{cases} iz+(1+i)w=3+i \\ (1+i)z-(6+i)w=4 \end{cases} \quad z,w\in\mathbb{C}$$
7. Dado el cociente $\dfrac{2x-3yi}{3+4i}$, determinar el lugar geométrico de los puntos del plano tales que el cociente :
   a. Sea imaginario puro
   b. Tenga de argumento 45˚
8. Escribir una ecuación de segundo grado cuyas raíces sean los complejos $\sqrt{2}_{45^\circ}$ y $\sqrt{2}_{315^\circ}$
9. Hallar el número complejo cuyo cubo es un número real y la componente real del mismo es superior en una unidad a la componente imaginaria.
10. Hallar las coordenadas de los vértices de un hexágono regular de centro el origen de coordenadas, sabiendo que uno de los vértices es el afijo del complejo $1_{\frac{\pi}{2}}$.
11. Hallar las coordenadas de los vértices de un cuadrado de centro el origen de coordenadas, sabiendo que uno de los vértices es el punto (0,-2).
12. El producto de dos números complejos es -8. Calcular sus módulos y argumentos, sabiendo que uno de ellos es el cuadrado del otro.
13. Calcular el valor de $\dfrac{i^7-i^{-7}}{2i}$ y representar los afijos de sus raíces cúbicas.
14. Demostrar que los argumentos de las raíces n-ésimas de un número complejo están en progresión aritmética.
15. Expresar en forma polar y binómica un número cuyo cubo sea $8_{\pi/2}$.
16. Hallar todos los números complejos cuyo cubo coincida con su conjugado.
17. Se considera el número ***z = 1 + 3i***; se efectúa un giro e centro el origen de coordenadas y amplitud 30˚. Hallar el número complejo z’ transformado del anterior mediante dicho giro.
18. El origen O y el punto A(4,-1) son vértices de un rombo. Hallar los otros dos vértices, sabiendo que el ángulo en O del rombo es 30˚.
19. Hallar las coordenadas del punto que resulta de girar A(2,0) un ángulo de 60˚ con centro en C(0,1).

20. Hallar las coordenadas del centro y la ecuación de la circunferencia que resulta de girar $(x-1)^2+(y-1)^2=4$ un ángulo de 45° con centro en C(1,-1).
21. Dado el triángulo de vértices A(1,1), B(4,2) y C(3,4), hallar:
    a. Los vértices del triángulo simétrico respecto del eje de abscisas.
    b. Los vértices del triángulo que se obtiene al aplicarle un giro de centro el origen de coordenadas y ángulo 90°.
    c. Los vértices del transformado de ABC por una homotecia de centro O(0,0) y razón 3. Representarlos todos.
22. Los afijos de los números complejos z_1, z_2 y z_3 son los vértices de un triángulo equilátero cuyo incentro es (0,0). Sabiendo que $z_1 = 1 + i$, calcular z_2 y z_3.
23. Dados los números complejos $z_1 = -1 + i$, $z_2 = (2,2)$ y $z_3 = (-31,0)$, se pide:
    a. Calcular el valor de $\frac{z_1}{\bar{z}_2^2}$ y $z_1^3 \cdot z_2$.
    b. Resolver la ecuación $x^5 + z_3 - 1 = 0$
24. La suma de dos números complejos es ***4 + 2i***; la parte real de uno de ellos es 3 y el cociente de éste por el segundo es imaginario puro. Hallar estos números.
25. Hallar un número complejo tal que sumado con su inverso dé el número ***i***.
26. Hallar dos números complejos sabiendo que su diferencia es real, su suma tiene de parte real 2 y que su producto es ***-51 + 8i***.
27. Si ***-1 + 2i*** y ***1 + i*** son los vértices opuestos de un cuadrado, determinar los otros dos vértices.
28. Sea $z_1 = 3 - 4i$ un número complejo dado y z_2 un número complejo cuyo afijo permanece sobre la recta $2x + 3y - 1 = 0$. Hallar el lugar geométrico de los afijos del complejo $z_1 + z_2$.
29. Calcular $\left(\sqrt{3}+i\right)^{20}$.
30. Calcular el cociente $\dfrac{1+i+i^2+i^3+\ldots+i^{62}}{2-i}$.
31. Hallar el módulo y el argumento del número complejo $(-1+i)^5(2+2i)$.