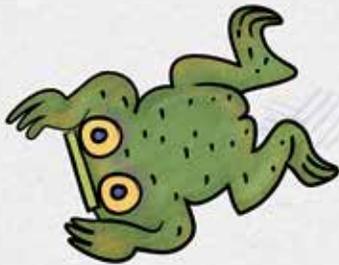




2

¿Qué es el sentido numérico?



La expresión *sentido numérico* aparece por primera vez en la bibliografía especializada en la enseñanza de las matemáticas a finales de los años ochenta y con mayor fuerza en la década de los noventa. Antes de intentar conceptualizar este término, reflexionemos cuál es su relación con la aritmética.

Aritmética y sentido numérico

Después del breve recorrido del capítulo 1, en el que, a partir de los resultados de los EXCALE, se mostraron algunas de las dificultades y errores en el aprendizaje de la aritmética, se puede concluir que aún hay carencias importantes en la comprensión, el uso y manejo de los números que se estudian a lo largo de la educación básica. Los factores que han propiciado tal situación son muchos y de distinta índole; uno de ellos es la forma en que se trabajan los contenidos aritméticos en el aula.

En efecto, la manera en que los estudiantes viven la aritmética dentro del salón de clases propicia que construyan ciertas creencias y actitudes hacia ella. Por ejemplo, si, guiados por el trabajo escolar, los alumnos creen que la aritmética es un conjunto de técnicas que el maestro les debe explicar: cómo sumar, cómo restar, cómo multiplicar, etcétera, entonces su actitud ante ella será pasiva, en espera de que el maestro les indique cómo hacer las cosas, aunque no comprendan por qué las tienen que hacer así. Si, por el contrario, se les deja en libertad de abordar los problemas haciendo uso de sus conocimientos previos, entonces ellos mismos podrán proponer otras estrategias, otras maneras de operar y manejar los números, además de construir conocimientos con significado.

Otra creencia que puede resultar un obstáculo en el aprendizaje de la aritmética es que los alumnos piensen que en matemáticas sólo hay una manera de hacer las operaciones, que esa manera es “la mejor”. Entonces, al enfrentarse a un problema en que identifiquen la operación que lo resuelve, inmediatamente procederán a resolver

Sentido numérico

ésta sin detenerse a pensar si hay un procedimiento más práctico que el algoritmo convencional que les enseñaron.

Es claro que las creencias de los docentes también influyen en cómo se aborda la aritmética en el salón de clase. Por ejemplo, los maestros que piensen que lo importante al resolver problemas aritméticos es que los estudiantes obtengan la respuesta correcta en lugar de darle sentido a lo que aprenden, pondrán énfasis en la enseñanza de algoritmos y técnicas de manera mecánica, sin dar espacio a que sus alumnos comprendan lo que hacen ni desarrollen su habilidad de interpretar los resultados que obtienen.

Parte de la problemática detectada en los resultados de los EXCALE y en el análisis de los reactivos puede subsanarse si la enseñanza de la aritmética incluye, como parte fundamental, el desarrollo del sentido numérico en los alumnos. Lo anterior no sólo beneficiaría el aprendizaje de la aritmética, pues el sentido numérico puede considerarse de manera transversal: está presente en problemas del eje *Forma, espacio y medida* referentes al cálculo de perímetros, áreas y volúmenes; en el eje *Manejo de la información* en los cálculos aritméticos para obtener medidas de tendencia central o de dispersión, y también al interpretar datos numéricos en tablas y gráficas; en álgebra, por ejemplo, en el manejo de monomios, polinomios y en la resolución de ecuaciones, así como en el análisis del comportamiento de las funciones. Se puede asegurar que siempre que se tenga que resolver un problema que involucre números se puede hacer uso del sentido numérico.

Veamos tres ejemplos donde el sentido numérico está presente al resolver problemas aritméticos. El primero se refiere a una sustracción con números naturales,¹ en el segundo se trabajan fracciones y en el tercero, decimales.

¹ Los números naturales son los que se usan para contar: 1, 2, 3, 4...

Raúl quiere llenar un álbum de 704 estampas. Si ya tiene 199, ¿cuántas le faltan?

Para resolver este problema podemos restar $704-199$ y para resolver esta operación con uno de los algoritmos convencionales se escriben los dos números en forma vertical, cuidando que queden unidades con unidades, decenas con decenas y centenas con centenas. Después se procede a resolver la sustracción, por ejemplo:

$$\begin{array}{r} 704 \\ - 199 \\ \hline \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{r} 6914 \\ \cancel{7} \cancel{0} 4 \\ - 199 \\ \hline 505 \end{array}$$

Lo anterior parece demasiado sofisticado para una operación que puede resolverse utilizando estrategias de cálculo mental.



**199 para 200 es 1,
200 para 704 son 504.
Sumamos 1 + 504,
el resultado es 505.**

En la recta numérica esto podría bosquejarse de la siguiente manera:



Sentido numérico

Otra manera de resolver la sustracción anterior es haciendo uso de una propiedad que indica que si sumamos el mismo número al minuendo y sustrayendo el resultado no se altera.



También se puede resolver sumando 1 al 199 y, en lugar de restar 199, se resta 200 y después se agrega 1 al resultado.



En los tres últimos procedimientos observamos un uso flexible y creativo de los números, de algunas propiedades y de las relaciones entre ellos. Y también se observa que estos procedimientos, para el caso particular de $704 - 199$, son mucho más prácticos que el algoritmo convencional.

Don Manuel tiene un terreno en el que utiliza las cuatro quintas partes para sembrar. Si en la mitad de esas cuatro quintas partes siembra maíz, ¿qué parte del terreno completo la ocupa con este cereal?

Este problema se puede resolver con la multiplicación $\frac{1}{2} \times \frac{4}{5}$. El algoritmo convencional para resolver multiplicaciones de fracciones es multiplicar numerador por numerador y denominador por denominador.

$$\frac{1}{2} \times \frac{4}{5} \implies \frac{1 \times 4}{2 \times 5} = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$$

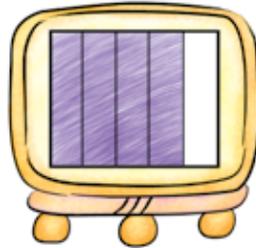
Muchos de nuestros alumnos se aprenden de memoria y mecánicamente este algoritmo sin comprender por qué se hace así.

Dado que el problema habla de “la mitad de las cuatro quintas partes”, es posible no referirse a la multiplicación de fracciones ($\frac{1}{2} \times \frac{4}{5}$) y trabajar directamente con la idea intuitiva $\frac{1}{2}$ de $\frac{4}{5}$. A partir de esta interpretación se puede calcular el resultado sin necesidad de aplicar el algoritmo de la multiplicación, simplemente tomando la mitad de la cantidad de quintos.

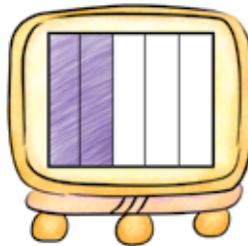


Sentido numérico

Gráficamente $\frac{4}{5}$ se puede representar como:

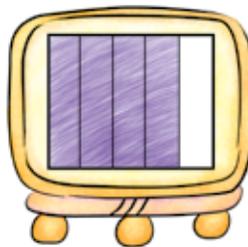


Y la mitad es $\frac{2}{5}$.

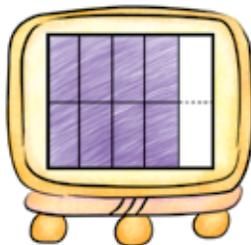


También se puede entender gráficamente por qué, al aplicar el algoritmo convencional, $\frac{1}{2} \times \frac{4}{5}$ da $\frac{4}{10}$, tal como se muestra a continuación.

A partir de los $\frac{4}{5}$ del entero:



Se toma $\frac{1}{2}$ de esos $\frac{4}{5}$, lo cual puede hacerse trazando una línea horizontal sobre la superficie morada:



Cada uno de los pedacitos en que quedó dividido el entero es $\frac{1}{10}$ porque se deben contar los dos pedacitos blancos que también forman parte de la unidad. Entonces, se observa que $\frac{1}{2}$ de esos $\frac{4}{5}$ son 4 pedacitos morados, es decir, 4 décimos. De ahí que:

$$\frac{1}{2} \times \frac{4}{5} = \frac{4}{10}$$

No todas las multiplicaciones de fracciones se pueden resolver sin recurrir al algoritmo convencional, depende de los números involucrados. Lo importante aquí es destacar que si los alumnos tienen claro lo que significa la operación que resuelven y comprenden las fracciones involucradas podrán, en muchos casos, prescindir de algoritmos convencionales y encontrar el resultado haciendo uso de esa comprensión.

Sentido numérico

Lilia tiene 3.72 metros de listón y va a hacer moños. Para cada moño ocupa 0.5 metros de listón. ¿Cuántos moños puede hacer?

Este problema se puede resolver con la división 3.72 entre 0.5. En la aritmética hay una técnica para resolver divisiones en las que ambos números tienen punto decimal. Esta técnica consiste en correr el punto a la derecha el mismo número de lugares en dividendo y divisor, de tal manera que este último quede como un número entero. Después se hace la división normalmente y “se sube el punto” a donde corresponda.

$$0.5 \overline{) 3.72} \implies 0 \times 5 \overline{) 3.7.2} \implies 5 \overline{) 37.2} \implies 5 \overline{) 37.2} \begin{array}{r} 7.44 \\ 22 \\ \hline 20 \\ 0 \end{array}$$

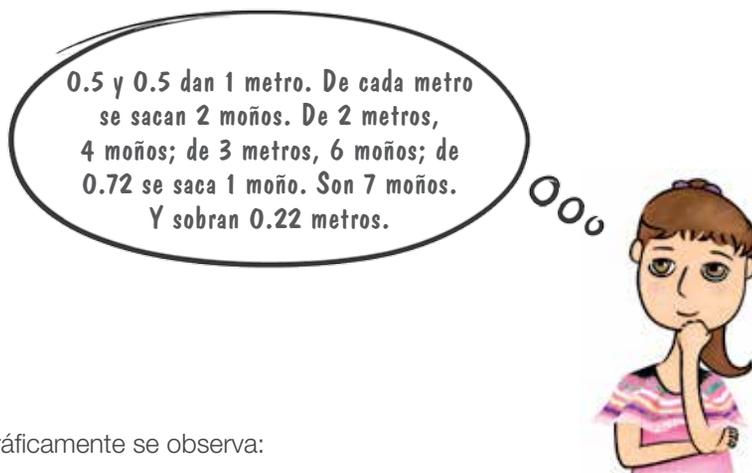
El algoritmo anterior funciona para todas las divisiones en las que el dividendo y el divisor tienen punto decimal. Es probable que no comprendamos bien la razón de algunos de sus pasos. Por ejemplo:

- ♦ ¿Qué propiedad de las divisiones permite tachar el punto del divisor y recorrer un lugar el punto del dividendo?
- ♦ ¿Por qué dividir 3.72 entre 0.5 equivale a dividir 37.2 entre 5?
- ♦ ¿Por qué al hacer la división “se sube” el punto?
- ♦ ¿Qué valor relativo tiene el 20, que es el penúltimo residuo de la división?

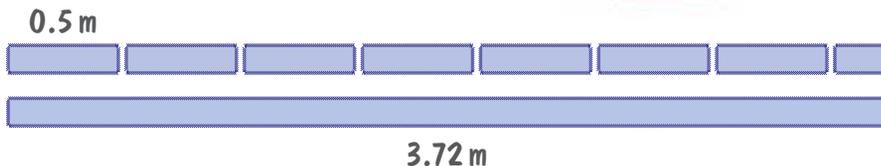
Las respuestas respectivas a estas preguntas son:

- ♦ La propiedad en juego es: si dividendo y divisor se multiplican por el mismo número el cociente no se altera.
- ♦ Porque aplicando la propiedad anterior, el dividendo y el divisor se multiplicaron por 10.
- ♦ Porque se empiezan a dividir los décimos.
- ♦ 2 décimos.

En el desarrollo del sentido numérico se promueve que los alumnos, además de entender el procedimiento anterior, construyan otros procedimientos que, en algunos casos, resulten más prácticos y adecuados a ciertos contextos. Por ejemplo, para este caso se puede buscar cuántas veces cabe 0.5 en 3.72.



Gráficamente se observa:



Salen 7 moños y el pedazo que resta es poco menos de la mitad de medio metro.

Veamos otra forma de resolver la división en juego. Ya anteriormente se observó que de 1 metro se obtienen 2 moños. Observe que el número de moños se obtiene con la división:

$$1 \div 0.5 = 2$$

Sentido numérico

¿Cuántos moños de medio metro se obtienen si se tienen 2 metros de listón?, ¿y si se tienen 3 metros?, ¿4 metros?, ¿10 metros?, ¿20 metros? Es muy probable que ya se haya dado cuenta de que el resultado de dividir un número entre 0.5 es el doble de ese número:

$$2 \div 0.5 = 4$$

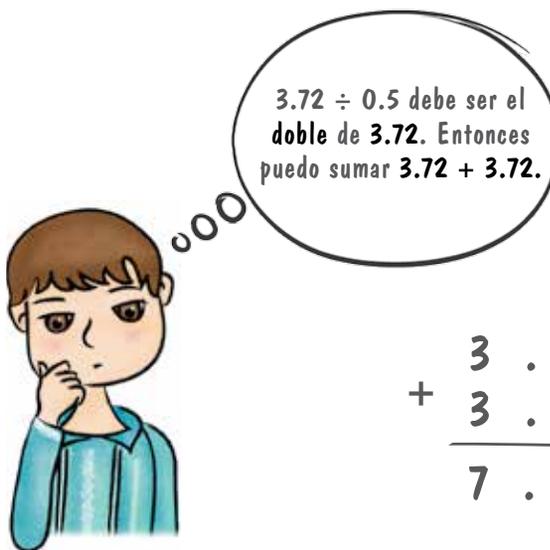
$$10 \div 0.5 = 20$$

$$3 \div 0.5 = 6$$

$$20 \div 0.5 = 40$$

$$4 \div 0.5 = 8$$

Entonces, ¿cuál es el resultado de $3.72 \div 0.5$?



$$\begin{array}{r} 3.72 \\ + 3.72 \\ \hline 7.44 \end{array}$$

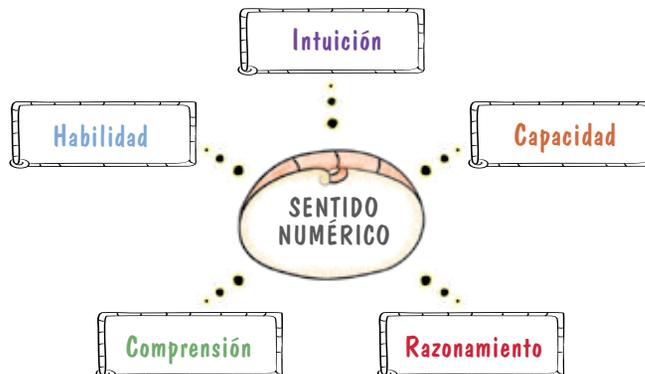
Es el mismo resultado que se obtuvo al resolver la división usando el algoritmo convencional para dividir números con punto decimal.

Otra cuestión importante en el desarrollo del sentido numérico es saber interpretar el resultado obtenido. ¿Qué significado tiene en esta operación el número 7.44? Como se mencionó anteriormente, al resolver la división 3.72 entre 0.5 se encuentra cuántas veces cabe el 0.5 en el 3.72. Como 7.44 es muy cercano a $7\frac{1}{2}$, concluimos que 0.5 cabe en 3.72, aproximadamente, 7 veces y media.

Los ejemplos anteriores muestran lo enriquecedor que resulta dar oportunidad de usar el sentido numérico en la resolución de problemas y lo que aporta al conocimiento de los números, sus relaciones y sus operaciones. Pero ¿qué es el *sentido numérico*? En el siguiente apartado se tratará de dar respuesta a esta pregunta.

Hacia el concepto del sentido numérico

Para la pregunta ¿qué es el sentido numérico? no existe una respuesta única, ni inmediata, ni sencilla. En la bibliografía sobre el tema se encuentran diferentes posturas a partir de la consideración de que el sentido numérico es una habilidad, una intuición, comprensión, conocimiento o razonamiento acerca de los números.²



A continuación se ofrecen algunas definiciones de sentido numérico que dan diferentes autores.³

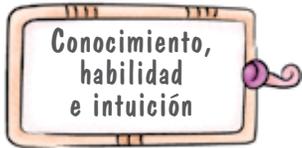
² Adaptado de Bernabe (2008).

³ Citado por Bernabe (2008).

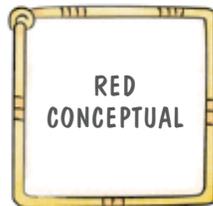
Sentido numérico

		Habilidad y propensión para el uso de los números y las operaciones en formas flexibles para hacer juicios cuantitativos y para desarrollar estrategias eficientes con los números y los métodos cuantitativos (Mcintosh, Reys y Reys, 1997).
		Es una buena intuición acerca de los números y de sus relaciones. Es no algorítmico, genera múltiples soluciones, así como una eficiente aplicación con base en múltiples criterios (Van de Walle y Browman, 1993).
		Capacidad de resolver diferentes problemas a partir del uso de estrategias múltiples y seleccionar la más adecuada para generar claridad en el trabajo que hace (Trafton y Hartman, 1997).
		Una comprensión de los números y de sus múltiples relaciones, del reconocimiento relativo de las magnitudes de los mismos, de los efectos de las operaciones y el desarrollo de referentes sobre cantidades y medidas (Sowder, 1988).
		Razonar con cantidades a fin de poder captar la magnitud de los números, comparar números grandes, comprender los números en diferentes contextos (Friel, 2000).

Hay autores que integran las ideas anteriores al considerar el sentido numérico como comprensión y habilidad, o bien como conocimiento, habilidad e intuición acerca de los números.

	El sentido numérico se refiere a la comprensión general que tiene una persona sobre los números y las operaciones, junto con la habilidad para usar esta comprensión de forma flexible para hacer juicios matemáticos y para desarrollar estrategias numéricas (Bruno, 2000).
	El sentido numérico consiste en los conocimientos, las habilidades y las intuiciones que una persona desarrolla acerca de los números y sus operaciones, junto con la habilidad e inclinación hacia el empleo del conocimiento numérico de manera flexible para formular proposiciones matemáticas, desarrollar estrategias útiles para manipular números, realizar operaciones y resolver problemas (Sánchez, Hoyos y López, 2011).

Otros autores definen el sentido numérico a partir de la idea de red conceptual:



En términos de estructura, se hace referencia a que el sentido numérico es una red conceptual bien organizada, propia de cada individuo, por la cual es capaz de relacionar números y propiedades de las operaciones para resolver problemas de manera flexible y creativa (Castro, Castro y Rico, 2004).

La idea de sentido numérico se basa en la posesión por parte de los estudiantes de una red conceptual que relaciona los conceptos de agrupamiento y valor de posición con la habilidad de usar las magnitudes absolutas y relativas de los números para:

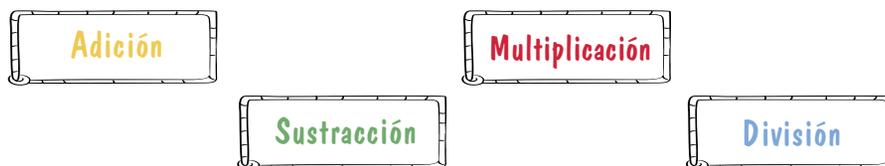
- Emitir juicios sobre la racionalidad de resultados producidos en problemas numéricos.
- La posibilidad de generar algoritmos no convencionales.
- Relacionar los números con las propiedades de las operaciones, etc. (Linares, 2001).

No resulta sencillo resumir todas las ideas expuestas anteriormente; no obstante, el siguiente diagrama es un intento de hacerlo.

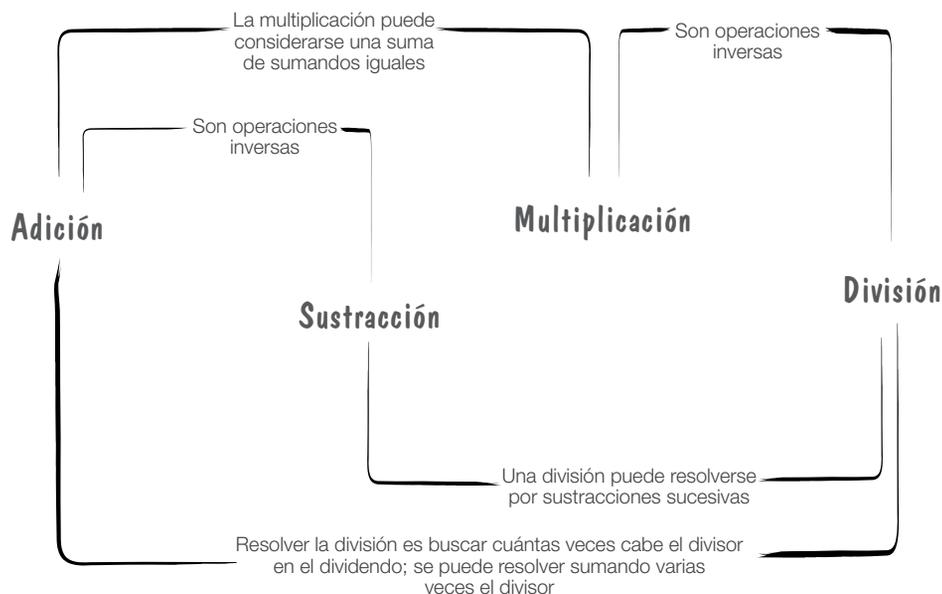


Sentido numérico

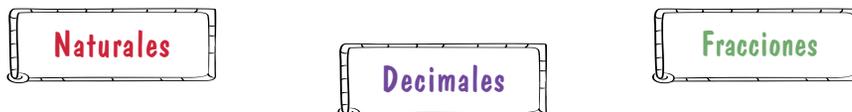
¿Cómo lograr que los estudiantes tengan una red conceptual sobre los números lo más amplia posible? Cuando en clase se trabaja la matemática de manera fragmentada, la red conceptual que los estudiantes construyen también está fragmentada. Por ejemplo, si se enseñan las operaciones básicas sin relacionarlas entre sí, los estudiantes tienen una red conceptual como la siguiente:



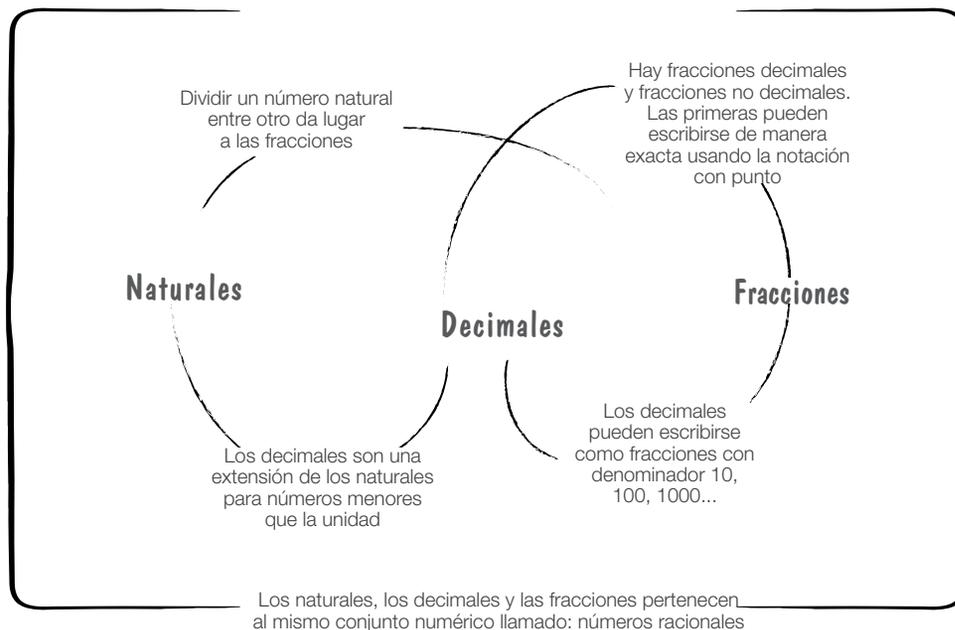
En cambio, si las tareas propuestas logran que los estudiantes aprendan las relaciones entre las operaciones pueden construir redes conceptuales como la siguiente:



Del mismo modo, a partir de la manera en que han trabajado en sus clases de aritmética muchos alumnos conocen los números naturales, los decimales y las fracciones sin considerar las relaciones entre ellos.

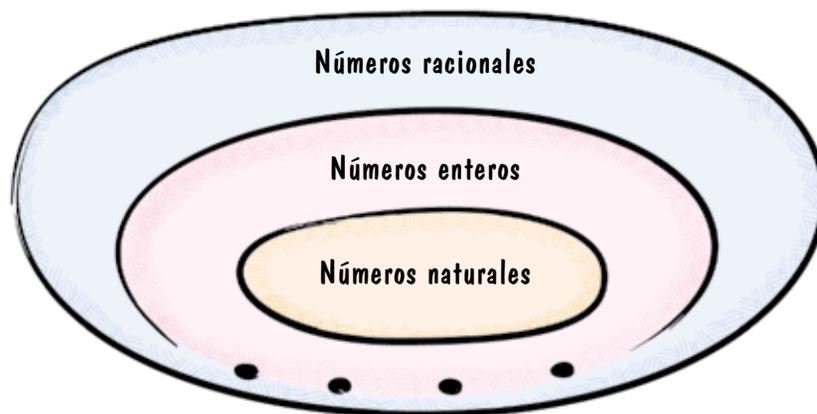


En cambio, una mayor comprensión de los números permite que el alumnado encuentre esas relaciones, construyendo redes conceptuales similares a la siguiente:



Sentido numérico

Cuando los alumnos ingresen a secundaria estudiarán los números negativos y podrán seguir enriqueciendo esta red conceptual, ampliando sus conocimientos de los números naturales, los enteros y los racionales. Es importante elegir secuencias didácticas adecuadas con el propósito de que los estudiantes tengan claridad de la relación entre todos los conjuntos numéricos y que formen una red conceptual a partir de la cual comprendan que se trata de conjuntos de números que están relacionados entre sí pues unos son subconjuntos de otros. Un número puede ser natural, entero y racional al mismo tiempo. Esto se muestra en el siguiente diagrama.



Los números racionales son todos aquellos que pueden escribirse como una fracción cuyo numerador y denominador son números enteros y el denominador nunca puede ser cero. Los números enteros pueden ser positivos o negativos. Los números naturales son los que se utilizan para contar.

El 5 es número natural; también es un entero positivo y un número racional porque puede escribirse como una fracción, por ejemplo $\frac{10}{2}$. En cambio, -5 no es un número natural, sino un entero negativo y un racional porque puede escribirse como una fracción, por ejemplo $-\frac{15}{3}$. Mientras que 2.5 no es natural ni entero, pero sí es un racional porque se puede escribir como fracción, por ejemplo $\frac{25}{10}$.

Con una enseñanza de la aritmética que considere como parte fundamental de ella el desarrollo del sentido numérico se busca que los alumnos conozcan estas relaciones entre los números, sus propiedades y sus operaciones, lo que les ayudará a usar los números con flexibilidad y creatividad al enfrentarse a situaciones problemáticas.

El desarrollo del sentido numérico puede o no favorecerse en la escuela, dependerá de muchos factores, siendo sin duda uno de los más importantes el tipo de tareas que el maestro proponga a los alumnos y la manera en que les invite a acercarse a ellas. ¿Cómo promover en los alumnos el desarrollo de su sentido numérico? ¿Favorece el enfoque de resolución de problemas el desarrollo del sentido numérico de los estudiantes? Sobre ello reflexionaremos a continuación.

El enfoque de resolución de problemas y el desarrollo del sentido numérico

A partir de la reforma educativa de 1993 se da un nuevo impulso, desde una perspectiva distinta, al añejo propósito de dar a la resolución de problemas un papel destacado en el aprendizaje de las matemáticas.

En este enfoque la resolución de problemas no sólo es el propósito de aprender matemáticas sino también el medio para hacerlo. Se promueve que los alumnos se enfrenten a problemas utilizando procedimientos propios; no se trata de enseñarles de entrada a resolver el problema, sino que ellos construyan estrategias personales haciendo uso de sus conocimientos previos.

“Cuando los alumnos tienen libertad para buscar la manera de resolver un problema, por lo general encuentran al menos una forma de aproximarse al resultado. Esto, a su vez, puede generar en el grupo una valiosa diversidad de procedimientos” (SEP, 1995).

Sentido numérico

Aunque en los programas de la reforma de 1993 no aparece explícitamente la expresión *sentido numérico*, puede observarse que el enfoque de resolución de problemas, propuesto tanto en esos programas como en los actuales, favorece su desarrollo al dejar que los alumnos resuelvan los problemas en completa autonomía, antes de enseñarles la herramienta matemática que los resuelve de manera eficiente. Asimismo, el enfoque destaca y valora la existencia de procedimientos alternativos al convencional.

Por ejemplo, en el problema:

Gaby tiene 8 canicas, juega y gana 5. ¿Cuántas tiene ahora?

La herramienta matemática más eficiente para resolverlo es la suma $5 + 8$; no obstante, este problema puede ser resuelto por alumnos que sepan contar hasta el 13 y que no hayan estudiado aún la suma, incluso si no saben leer y escribir y se les plantea de manera oral.

Otro ejemplo es el siguiente problema con fracciones:

Don Raúl mezcló $2\frac{1}{2}$ litros de pintura roja con $2\frac{1}{4}$ litros de pintura blanca. ¿Qué cantidad de líquido tiene en total la mezcla?

Si el problema se plantea cuando los alumnos han estudiado los medios y los cuartos, aunque no se haya estudiado la suma de fracciones mixtas, y se deja en total libertad de resolverlo, los estudiantes buscarán diferentes estrategias para obtener el resultado. No es necesario haber estudiado cómo convertir una fracción mixta en impropia ni cómo sumar fracciones mixtas con algoritmos convencionales buscando el común denominador. Por ejemplo, pueden sumar los enteros y luego las fracciones; como un medio es igual a dos cuartos, el resultado es:

$$2 + 1 + \frac{2}{4} + \frac{1}{4} = 3 \frac{3}{4}$$

Finalmente, un ejemplo con decimales:

Si el dólar está a 13.20 pesos, ¿cuál es el precio en pesos de un producto que vale 14 dólares?

¿Será indispensable saber multiplicar números decimales para resolver este problema? La respuesta es no. Hay otras maneras de calcular lo que se pide; por ejemplo:

- ♦ De 10 dólares son \$132.
- ♦ De 2 dólares son \$26.40.
- ♦ De 4 dólares son \$52.80.
- ♦ De 14 dólares son $\$132 + \$52.80 = \$184.80$.

El procedimiento alternativo que se ha mostrado es posible porque, en este caso, el multiplicador (número de dólares) es entero. Como ya se ha comentado, muchas veces los procedimientos alternos se aplican sólo en algunos casos, pero esto no les quita su valor. En resumen, son útiles pero no suficientes, y de ahí se deduce la importancia de conocer también los algoritmos convencionales que permiten resolver cualquier operación sin importar los números que se tienen que operar.

Otra característica del enfoque de resolución de problemas que favorece el desarrollo del sentido numérico son las confrontaciones o puestas en común que se sugiere hacer después de que los alumnos hayan resuelto un problema.

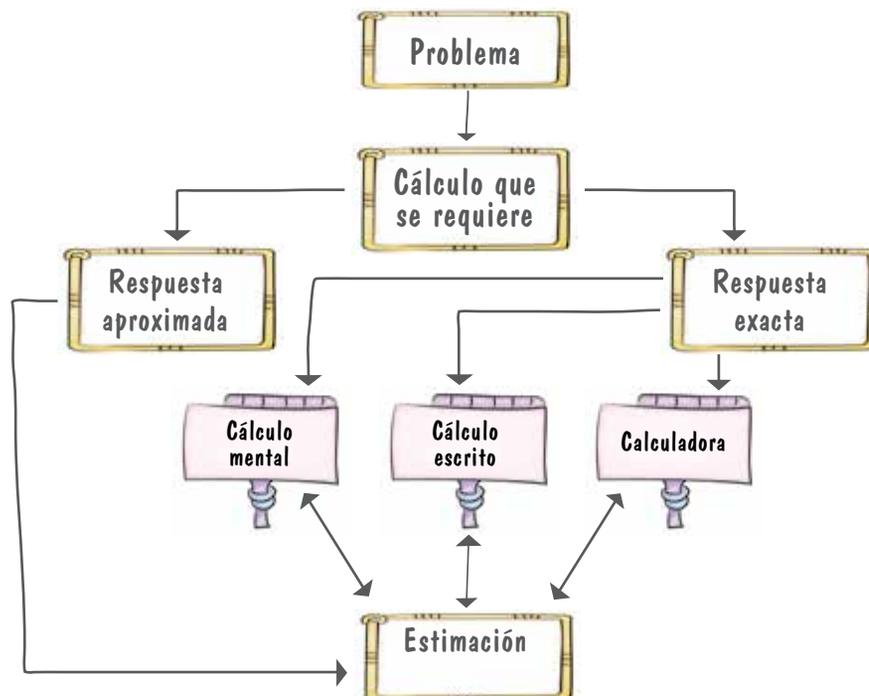
Que los alumnos conozcan las diferentes formas de solución que encontraron sus compañeros para un mismo problema tiene un gran valor didáctico, ya que les permite darse cuenta de que para resolver un problema existen varios caminos, algunos más largos y complicados que otros, pero lo importante es acercarse a la solución. Les permite también percatarse de sus errores y favorece que por sí mismos valoren sus resultados (SEP, 1995).

Sentido numérico

No sólo el hecho de ver que hay diferentes procedimientos para resolver la misma operación o el mismo problema enriquece su sentido numérico, también es enriquecedor para su conocimiento de los números tratar de comprender el procedimiento que siguieron otros compañeros: ¿cómo maneja los números el otro compañero?, ¿qué relaciones usa?, si no llega al resultado correcto ¿qué error cometió?, etcétera.

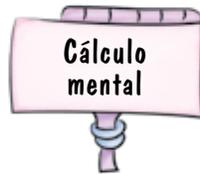
Aspectos del cálculo relacionados con el sentido numérico

Ante un problema matemático, una persona con sentido numérico decide si es suficiente con estimar el resultado o, en caso de que requiera el resultado exacto, si lo puede calcular mentalmente, por escrito, usando la calculadora o combinando dos o más de estos recursos. El siguiente esquema resume lo anterior en una adaptación a lo expresado por Parra (1994):



Se espera que los alumnos, al resolver una operación o un problema, hagan una estimación del resultado y, además, que no siempre los resuelvan haciendo uso de los algoritmos con cálculo escrito, sino que también utilicen el cálculo mental y, ¿por qué no?, la calculadora.

En los siguientes capítulos se abordarán estos cuatro aspectos del cálculo relacionados con el sentido numérico:





ACTIVIDADES para el maestro

1

Escriba con sus propias palabras lo que entiende por *sentido numérico*.

2

Reflexione:

- Con la manera en que trabajo los números, sus relaciones y operaciones, ¿promuevo el desarrollo del sentido numérico en los alumnos?
- ¿Cuánto he influido para que mis alumnos tengan o no actitudes positivas ante el trabajo con los números?

3

Redacte un problema y una manera de resolverlo sin usar algoritmos convencionales, utilizando el sentido numérico.

4

Identifique en un libro de texto de matemáticas del nivel en el que trabaja.

- Una actividad que usted considere que, a partir de las preguntas que se plantean, desarrolla el sentido numérico.
- Argumente su elección.

5

Plantee una división y resuélvala usando sumas o restas.

6

Considere el siguiente problema:

*Una falda que cuesta \$250 tiene un descuento de 25%.
¿Cuánto cuesta la falda con el descuento?*

- a) Resuelva el problema de forma tradicional, usando el cálculo de porcentajes con multiplicación.
- b) Resuelva el problema haciendo uso de su sentido numérico, calculando el porcentaje de una manera diferente.

7

En un libro de texto del nivel en el que trabaja (preescolar, primaria o secundaria) identifique una actividad en la que se promueva:

- a) La estimación.
- b) El cálculo mental.
- c) El cálculo escrito.
- d) El uso de la calculadora.

8

En el mismo libro de texto de la actividad anterior haga una valoración rápida de a cuál de los cuatro aspectos del cálculo relacionados con el sentido numérico es al que se le dedica el mayor porcentaje de actividades.