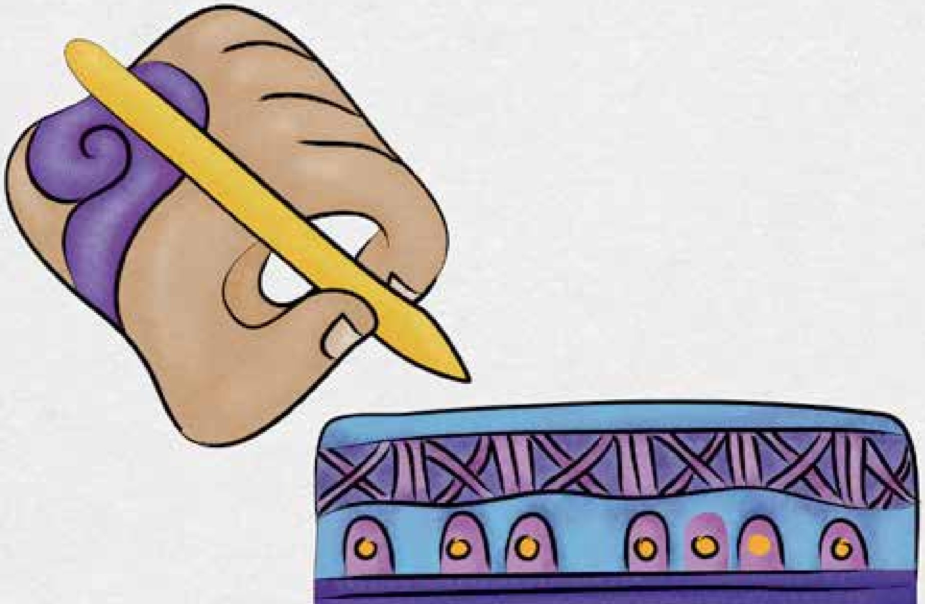


5

Cálculo escrito

El cálculo escrito es quizás el contenido que mayor tradición tiene dentro de la enseñanza de las matemáticas. Resolver "cuentas" con enteros, decimales o fracciones es una actividad que la mayoría de los maestros trabaja de manera frecuente.

Es importante que los alumnos construyan la idea de que hay diferentes maneras de resolver una operación y no sobreestimen el valor de los algoritmos convencionales. Esto se logra cuando ellos se dan cuenta de que, como ya se mencionó, muchas veces llegan al mismo resultado por caminos más eficientes que el algoritmo convencional.

Por otro lado, comprender cada uno de los pasos de los algoritmos convencionales no siempre resulta sencillo para los alumnos. El principal problema de los algoritmos convencionales no es que se aprendan mecánicamente, sin comprender lo que subyace, pues en realidad ésa es la gran ventaja de un buen algoritmo, como de cualquier técnica: facilitarle a la gente el trabajo sin que tenga necesariamente que entender el funcionamiento que lo permite (como una calculadora). No obstante, en aras de la formación matemática que se quiere dar en la escuela se aspira a que los alumnos vayan más allá de saber usar los algoritmos. Por ello a veces, cuando es posible, se propicia que entiendan el algoritmo, o también se valoran procedimientos que, aunque no sean los convencionales, son más fáciles de comprender.

Entonces,

1. No está mal, en sí, que se aprenda a usar un algoritmo "sin comprender su funcionamiento"; lo que está mal es reducir la enseñanza de una operación sólo a eso.
2. Hay algoritmos que los alumnos pueden reconstruir y que resulta formativo que lo hagan. En esos casos conviene propiciarlo (como el de la suma).

3. Hay algoritmos relativamente fáciles de usar, pero difíciles de comprender o de reconstruir. En ese caso no vale la pena invertir tiempo tratando de que los comprendan. Se puede dejar que los estudien “mecánicamente”, pero que no sea el único procedimiento del que disponen.

Analicemos cómo se resuelve, mediante el algoritmo convencional, la multiplicación 76 x 32.

$$
\begin{array}{cccc}
 & & 7 & 6 \\
 & \times & 3 & 2 \\
\hline
 & 1 & 5 & 2 \\
2 & 2 & 8 & \\
\hline
2 & 4 & 3 & 2
\end{array}
$$

Tabla 1

Lo que se hace	Lo que es
Se multiplica 2 x 6 y se obtiene 12, el alumno sabe que pone el 2 y lleva “1”	Realmente es una decena la que se lleva y no 1
Se multiplica 2 x 7	En realidad se multiplica 2 x 70
Y se obtiene 14	Son 14 decenas, es decir, 140
Al 14 se le suma el 1 que llevan	A las 14 decenas se le suma la decena que llevan
Y el resultado es 15	Son 15 decenas: 150
Se pone el 15 a la izquierda del 2	El 15 se pone a la izquierda del 2 porque debe quedar abarcado el lugar de las decenas y las centenas
Se multiplica 3 x 6	En realidad se multiplica 30 x 6
Da 18	Son 180
Se pone el 8 y se lleva “1”	Se pone 80 (por eso se deja un lugar vacío a la derecha) y se lleva 1 centena, es decir, 100
Se multiplica 3 x 7	Se multiplica 30 x 70
El resultado es 21	El resultado es 2 100
Y se agrega el 1 que llevamos	A los 2 100 se le agrega la centena que se lleva
El resultado es 22, se escribe	El resultado es 2 200, por eso el 22 queda abarcando el lugar de las centenas y los millares
Finalmente se suman los dos productos parciales	

Los algoritmos convencionales de las operaciones aritméticas son herramientas muy poderosas porque funcionan siempre, no importa los números que estén involucrados, y por ello deben ser estudiados, comprendidos y aprendidos por los alumnos. No obstante, como se vio en el ejemplo anterior, no son transparentes, es decir, los pasos "ocultan" los hechos numéricos que realmente están involucrados. En dicho ejemplo se observa una fragmentación de los números, ya que la multiplicación de dos números de dos cifras en realidad se vuelve una multiplicación de cuatro números de una cifra. ¿Por qué? ¿Los alumnos entienden qué es lo que se hace?

El cálculo escrito no es sinónimo de algoritmos convencionales para resolver las operaciones básicas. Es decir, estos algoritmos forman parte del cálculo escrito, pero no todo el cálculo escrito los involucra a ellos, ya que existen otros algoritmos escritos. A continuación se presentan, a manera de ejemplos, algoritmos escritos que son diferentes al algoritmo convencional para resolver las operaciones básicas con números naturales.[1]

Adición

Para sumar 915 + 318 con el algoritmo tradicional se tiene:

$$\begin{array}{r} 915 \\ +\ 318 \\ \hline 1233 \end{array}$$

Para esta misma suma se pueden emplear otros algoritmos escritos, diferentes al anterior. Por ejemplo:

$$\begin{array}{r} 915 \\ +\ 318 \\ \hline 1200 \\ 20 \\ 13 \\ \hline 1233 \end{array}$$

[1] Varios de los algoritmos que aquí se presentan se obtuvieron de Martínez (2000).

En este algoritmo se suman 900 + 300 y se anota 1 200; luego se suman 10 + 10 y se anota 20; finalmente se suman 5 + 8 y se anota 13. Se colocan los resultados de tal manera que unidades queden debajo de unidades, decenas debajo de decenas, centenas con centenas, y se obtiene el resultado total sumando los tres resultados parciales. Note que este algoritmo es más transparente que el algoritmo convencional.

El siguiente también es un algoritmo más transparente o intuitivo.

	9 1 5
Más 300	1 2 1 5
Más 10	1 2 2 5
Más 8	1 2 3 3

Se descompone el sumando 318 en 300 + 10 + 8 y se suman uno cada vez al 915.

Estos algoritmos también se pueden emplear con los números decimales. Por ejemplo, para sumar 0.25 + 0.18:

	0 . 2 5
Más 0.1	0 . 3 5
Más 0.08	0 . 4 3

Sustracción

Para restar 517 - 279 con uno de los algoritmos convencionales se tiene:

$$\begin{array}{r} 5\ 1\ 7 \\ -\ 2\ 7\ 9 \\ \hline 2\ 3\ 8 \end{array}$$

Podemos proceder con los siguientes algoritmos escritos:

	5 1 7
Menos 200	3 1 7
Menos 70	2 4 7
Menos 9	2 3 8

Este algoritmo es similar a uno de los presentados con la suma. El sustraendo 279 se descompone en 200 + 70 + 9 y se van restando por separado al 517.

Otro algoritmo, útil para convertir una sustracción con transformaciones (reagrupaciones) a otra que no tenga transformaciones y sea más fácil de resolver, es el siguiente:

Se suma 21 a los dos números
y se obtiene una nueva sustracción

$$\begin{array}{r} 5\ 3\ 8 \\ -\ 3\ 0\ 0 \\ \hline 2\ 3\ 8 \end{array}$$

Este algoritmo hace uso de una propiedad de la sustracción que ya se mencionó anteriormente: si a minuendo y sustraendo se le suma el mismo número, la diferencia no se altera. Se decide sumar 21 para obtener un número con ceros en el sustraendo: 279 + 21 = 300. Pero si se suma 21 al sustraendo, para que el resultado no se altere, se debe hacer lo mismo con el minuendo: 517 + 21 = 538 La resta 538 - 300 es más sencilla de resolver que 517 - 279, y en ambas se obtiene el mismo resultado.

Para la resta 0.532 - 0.175 se puede usar alguno de los algoritmos anteriores:

	0 . 5 3 2
Menos 0.1	0 . 4 3 2
Menos 0.07	0 . 3 6 2
Menos 0.005	0 . 3 5 7

Multiplicación

Para multiplicar 56 x 18 con el algoritmo tradicional se procede de la siguiente manera:

$$
\begin{array}{r}
56 \\
\times\ 18 \\
\hline
448 \\
56 \\
\hline
1008
\end{array}
$$

La misma multiplicación se puede resolver con otros algoritmos escritos, por ejemplo:

x	50	6	Total
10	500	60	560
8	400	48	448
			1008

Se colocan los factores escritos en notación desarrollada en un cuadro de doble entrada y se resuelven las multiplicaciones por separado. Después se suman los resultados obtenidos. Compare este algoritmo con el convencional y note que podría trabajarse antes y preparar al alumno para comprender los “pasos ocultos” que presenta.

Un ejemplo con decimales (0.52 x 0.17) es el siguiente:

x	0.5	0.02	Total
0.1	0.05	0.002	0.052
0.07	0.035	0.0014	0.0364
			0.0884

Otra manera de hacer multiplicaciones proviene de la forma en que las resolvían los egipcios; esto es, obteniendo sucesivamente el doble de uno de los factores y después sumando los que sean convenientes. En la multiplicación 56 x 18 se requiere sumar 18 veces el 56; con esto en mente se calculan los dobles necesarios:

1 vez	56
2 veces	112
4 veces	224
8 veces	448
16 veces	896

18 veces es igual a 16 veces más 2 veces, entonces el producto buscado es:

18 veces 56

Que se obtiene sumando 16 veces 56 más 2 veces 56:

$$896 + 112 = 1008$$

División

Para dividir 345 entre 9 con el algoritmo convencional se procede de la siguiente manera:

$$\begin{array}{r|l} & \ 3\ 8 \\ \hline 9 & 3\ 4\ 5 \\ & \ 7\ 5 \\ & \ 3 \end{array}$$

Otra manera de resolver esta división es con el algoritmo denominado por cocientes parciales (Balbuena, Block, Dávila, Schulmaister, García y Moreno, 1995). En este algoritmo se ponen cantidades en el cociente y se multiplican por el divisor. Las cantidades son arbitrarias, cuidando siempre de elegir números que al multiplicarse por el divisor sean menores que el dividendo.

Por ejemplo, supongamos que la división se refiere al problema de repartir 345 pesos entre nueve personas, primero se le dan 20 pesos a cada una y con ello ya se repartieron 180 pesos; quedan 165 pesos por repartir.

$$\begin{array}{r|l} & 2\ 0 \\ \hline 9 & 3\ 4\ 5 \\ & -1\ 8\ 0 \\ \cline{2-2} & 1\ 6\ 5 \end{array}$$

Después se dan 10 pesos a cada persona; esto hace que se repartan 90 pesos y queden pendientes 75 pesos; a cada persona se le han dado en total 30 pesos. En la operación esto quedaría indicado así:

$$
\begin{array}{rr}
 & 20+10 \\
9 & \overline{)\,345} \\
 & -180 \\
\cline{2-2}
 & 165 \\
 & -90 \\
\cline{2-2}
 & 75
\end{array}
$$

Finalmente, se dan ocho pesos a cada persona, repartiendo con esta acción 72 pesos, y sobran tres pesos.

$$
\begin{array}{rr}
 & 20+10+8 \\
9 & \overline{)\,345} \\
 & -180 \\
\cline{2-2}
 & 165 \\
 & -90 \\
\cline{2-2}
 & 75 \\
 & -72 \\
\cline{2-2}
 & 3
\end{array}
$$

El resultado se obtiene sumando lo que se repartió cada vez: 20 + 10 + 8 = 38.

La división anterior también se puede realizar en una tabla:

Repartir	Entre	Se puede dar a cada uno	Se reparten en total	Quedan
345	9	20	180	165
165	9	10	90	75
75	9	8	72	3

El resultado se obtiene sumando la tercera columna: 20 + 10 + 8 = 38.

La práctica lleva a los alumnos a abreviar cada vez más los repartos, de tal manera que terminen más rápido la división; por ejemplo:

Repartir	Entre	Se puede dar a cada uno	Se reparten en total	Quedan
345	9	30	270	75
75	9	8	72	3

Con los ejemplos anteriores se desea demostrar que los algoritmos escritos no son únicos, pues existen muchas maneras de resolver las operaciones.

ACTIVIDADES para el maestro

1

Resuelva las siguientes operaciones por escrito usando un algoritmo diferente al convencional. Puede usar alguno de los algoritmos que se han trabajado en este apartado u otro que usted conozca.

a) 456 + 718 b) 678 - 123 c) 65 x 39 d) 786 ÷ 7

2

Resuelva las siguientes operaciones con decimales usando los algoritmos convencionales:

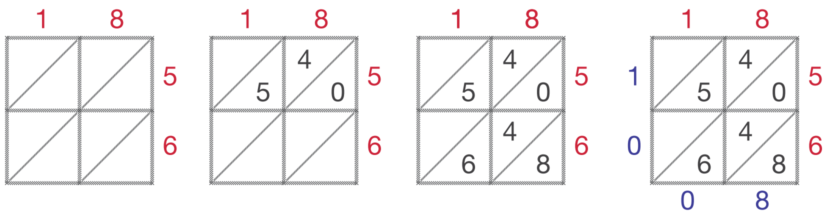
a) 3.45 + 2.8 b) 5.6 - 2.31 c) 4.5 x 0.25 d) 3.75 ÷ 0.2

3

Para cada una de las operaciones anteriores intente encontrar otro procedimiento escrito diferente al convencional.

4

Los siguientes esquemas muestran los pasos para multiplicar 18 x 56 por celosía (Balbuena *et al*., 1995).



a) Analice esta manera de multiplicar. ¿Dónde se colocan los factores?, ¿cómo se colocan los factores?, ¿cómo se obtienen los números en negro? Los números en azul forman el resultado (1008), ¿cómo se obtiene?

b) Proponga una multiplicación de dos factores con dos o tres cifras cada uno y resuélvala por celosía.

5

Los algoritmos convencionales para resolver una división de fracciones son:

a) Multiplicar en cruz: $\frac{3}{4} \div \frac{1}{2} = \frac{3 \times 2}{4 \times 1} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$

b) Multiplicar por el recíproco: $\frac{3}{4} \div \frac{1}{2} = \frac{3}{4} \times \frac{2}{1} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$

Resuelva la siguiente división usando los dos algoritmos anteriores:

$\frac{6}{8} \div \frac{3}{2}$

6

Otra manera de dividir fracciones es dividiendo numerador entre numerador y denominador entre denominador:

a) $\frac{3}{4} \div \frac{1}{2} = \frac{3 \div 1}{4 \div 2} = \frac{3}{2}$

Resuelva la división del ejercicio 5 aplicando este algoritmo. ¿Llegó al mismo resultado?

7

Emplee el algoritmo del ejercicio anterior para resolver: $\frac{7}{8} \div \frac{3}{4}$

a) ¿Qué observa?
b) ¿Por qué sucedió esto?
c) ¿Qué podría hacer para poder resolver esta división con el algoritmo del ejercicio 6?

8

Califique las siguientes restas realizadas por un alumno de tercero de primaria:

$$\begin{array}{r} 475 \\ -\ 296 \\ \hline 221 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 710 \\ -\ 493 \\ \hline 383 \end{array}$$

a) ¿Qué error comete el alumno?
b) ¿Cuál cree que sea el motivo por el que este alumno comete ese error?
c) ¿Cómo podría apoyarlo para que resuelva correctamente las sustracciones?

REFLEXIÓN sobre la práctica

ACTIVIDAD 1

En un grupo multigrado (con tercero y cuarto grados de primaria) el maestro da a los niños la siguiente explicación para sumar $\frac{1}{2} + \frac{1}{4}$ (Ávila, 2010).

> **Maestro:** Miren, yo quiero convertir este dos en cuatro, ¿sí? Entonces, me imagino por acá; yo quiero poner un dos por aquí (*escribe un dos pequeño a la izquierda de* $\frac{1}{2}$), que va a multiplicar a este número y a este otro. (*Señala el numerador y denominador de* $\frac{1}{2}$). […]

$$2 \quad \frac{1}{2} + \frac{1}{4} =$$

Voy a bajar aquí el dos, voy a cambiar este número de acá, pero con esa… con esa diferencia, y luego dos por dos. Y ya convertí este dos en cuatro, ¿sí o no?

$$2 \quad \frac{1}{2} +$$

$$\frac{2}{4}$$

Y a mí me enseñaron, cuando estaba como ustedes, en este grado, ¿verdad? Me dijeron que este número (*señala el cuatro del primer sumando*) le daba una patadita a este número. (*Señala el cuatro del segundo sumando*). Lógico, al sentir la patada, brinca hasta acá (*anota el cuatro del resultado*), nada más se recorre, ¿sí? Sale.

$$\frac{2}{4} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

Preguntas para reflexionar

1. ¿Qué opina de la explicación que da el maestro?
2. ¿Considera que fue significativa esta explicación para los alumnos? Argumente su respuesta.
3. Cuando ha tenido que enseñar la suma de dos fracciones con diferente denominador, ¿cómo lo ha hecho?, ¿por qué lo ha hecho así? Con lo que ahora sabe, ¿considera que debe hacer cambios o no? Argumente su respuesta a esta última pregunta.

ACTIVIDAD 2

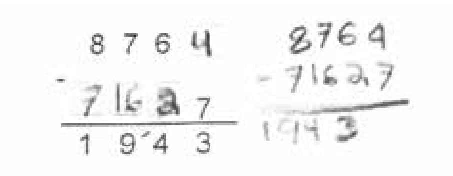
A un grupo de primaria se le propuso resolver el siguiente ejercicio:[2]

Completa la operación:

$$\begin{array}{rcccc} & 8 & 7 & 6 & \square \\ - & \square & \square & \square & 7 \\ \hline & 1 & 9 & 4 & 3 \end{array}$$

[2] Maestro Luis Guadalupe Fuentes Orozco.

Un alumno hizo lo siguiente:



Preguntas para reflexionar

1. ¿Qué error cometió el alumno en el lugar de las unidades y en el de las centenas?

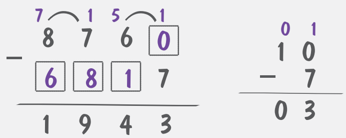
2. ¿Por qué cree que cometió ese error?

3. ¿Cómo apoyaría al alumno para que no cometiera ese tipo de errores?

4. ¿Considera que este alumno tiene desarrollado su sentido numérico? Argumente su respuesta.

5. ¿Por qué cree que, a pesar de que copió la operación del lado derecho, el alumno no se dio cuenta de su error?

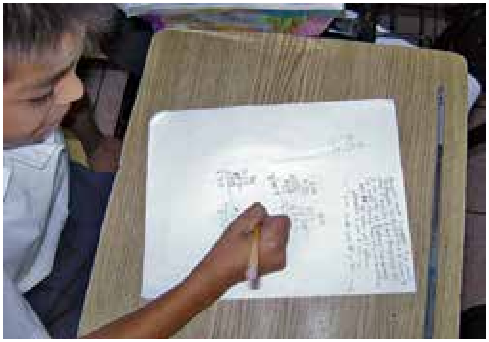
6. En ese mismo grupo, otro alumno hizo lo siguiente:

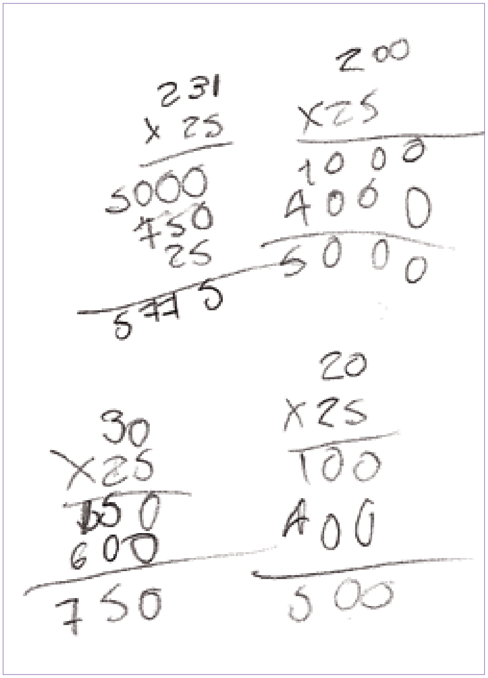


Escriba una posible estrategia que pudo haber seguido este alumno para llegar al resultado correcto.

ACTIVIDAD 3

En un grupo de quinto grado de primaria se le pidió a los alumnos que resolvieran la operación 231 x 25 con un procedimiento diferente al que sabían hacer (el maestro se refería al procedimiento convencional). Un alumno hizo lo siguiente:[3]





[3] Maestro Luis Guadalupe Fuentes Orozco.

Preguntas para reflexionar

1. ¿Cuál es el resultado de la multiplicación 231 x 25?
2. Explique qué es lo que hizo el alumno.
3. ¿Qué conocimientos puso en juego el alumno en su procedimiento?
4. Resuelva la misma multiplicación usando un procedimiento diferente al convencional y al del alumno.
5. Resuelva, con el procedimiento del alumno, la multiplicación 452 x 18.

ACTIVIDAD 4

Un alumno al que se le pidió pasar al pizarrón para calcular 50% de 390 hizo lo siguiente:

$$\begin{array}{r|l} & \;\;3.9 \\ \hline 100 & 390 \\ & \;\;900 \\ & \;\;\;\;\;0 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 39 \\ \times\ 50 \\ \hline 00 \\ 95 \\ \hline 950 \end{array}$$

Y obtuvo 950 como resultado.

Preguntas para reflexionar

1. ¿Este alumno tiene desarrollado su sentido numérico?
   Argumente su respuesta.
2. ¿Qué error cometió el alumno?
3. ¿De qué habría servido que el maestro pidiera al alumno una estimación del resultado?
4. ¿Qué opina de la manera en que este alumno divide entre 100 y multiplica por 50?
5. ¿Es indispensable hacer la división entre 100 por escrito? ¿Qué haría para ayudar a este alumno a calcular de manera más eficiente divisiones entre 100?
6. En una multiplicación como la que hizo el alumno ¿es indispensable multiplicar por cero? ¿Qué haría para apoyar a este alumno para que resolviera con mayor eficiencia multiplicaciones por números que son decenas cerradas, como 10, 20, 30...?
7. ¿De qué otra manera se puede calcular 50% de una cantidad?