

MATERIALES PARA APOYAR LA PRÁCTICA EDUCATIVA

Sentido numérico



Materiales
para docentes



INEE
Instituto Nacional para la
Evaluación de la Educación

Instituto Nacional para la Evaluación de la Educación

MATERIALES PARA APOYAR LA PRÁCTICA EDUCATIVA

Sentido numérico





Sentido numérico

◆ Silvia García ◆

SENTIDO NÚMÉRICO

ISBN de la colección: 978-607-7675-28-0

ISBN: 978-607-7675-51-8

D.R. © Instituto Nacional para
la Evaluación de la Educación

José Ma. Velasco 101, Col. San José Insurgentes,
Delegación Benito Juárez, C.P. 03900, México, D.F.

Coordinación general

Rebeca Reynoso Angulo

Editora

María Norma Orduña Chávez

Corrección de estilo

Teresa Ramírez Vadillo

Diseño y formación

Martha Alfaro Aguilar

Ilustraciones

Rocío Padilla

Esta publicación estuvo a cargo de la Dirección General Adjunta. El contenido, la presentación, así como la disposición en conjunto y de cada página de esta obra son propiedad del editor. Se autoriza su reproducción parcial o total por cualquier sistema mecánico o electrónico para fines no comerciales y citando la fuente de la siguiente manera:

García, Silvia (2014). *Sentido numérico*. Materiales para Apoyar la Práctica Educativa. México: INEE.

Impreso y hecho en México
Distribución gratuita. Prohibida su venta.

Prólogo	7		
Presentación	9		
Introducción	15		
1. Aritmética: resultados de los EXCALE	19		
Contenidos aritméticos de mayor dificultad	22		
Preescolar	23		
Tercero de primaria	25		
Sexto de primaria	28		
Tercero de secundaria	30		
Respuestas razonables y no razonables: aplicando el sentido numérico	33		
Preescolar	34		
Tercero de primaria	35		
Sexto de primaria	36		
Tercero de secundaria	37		
2. ¿Qué es el sentido numérico?	45		
Aritmética y sentido numérico	47		
Hacia el concepto del sentido numérico	57		
El enfoque de resolución de problemas y el desarrollo del sentido numérico	63		
Aspectos del cálculo relacionados con el sentido numérico	66		
3. Estimación	71		
Reflexión sobre la práctica	80		
4. Cálculo mental	87		
Reflexión sobre la práctica	96		
5. Cálculo escrito	105		
Reflexión sobre la práctica	119		
6. Uso de la calculadora			127
Reflexión sobre la práctica			135
7. Activar el sentido numérico de los alumnos			143
Sistema decimal de numeración			146
La recta numérica			151
Estimación			154
Cálculo mental			158
Cálculo escrito			161
Uso de la calculadora			165
8. Juegos para desarrollar el sentido numérico			173
Lotería con dados			176
Lotería con las tablas de multiplicar			177
Un juego con dados			179
Yo tengo... ¿quién tiene...?			180
Cambiando la unidad			182
El laberinto			186
Guerra de cartas con números negativos			187
9. Algunas ideas para evaluar el sentido numérico			191
Bibliografía			201

El Instituto Nacional para la Evaluación de la Educación (INEE) tiene como objetivo generar y difundir información sobre distintos componentes del Sistema Educativo Nacional, a fin de que sea posible tomar decisiones que contribuyan a su mejora. Algunas de esas decisiones son de política educativa y otras se relacionan con lo que sucede en las escuelas y en los salones de clase.

Desde su creación, el INEE ha producido gran cantidad de estudios para dar a conocer a públicos diversos los resultados de sus evaluaciones. A mediados de 2007 dio inicio a la elaboración de materiales expresamente dirigidos a profesores y directivos escolares. Para tal fin ha buscado la colaboración de especialistas que, además de un adecuado dominio de su disciplina, tengan conocimiento cercano del quehacer docente en escuelas de educación básica. A ellos, se les ha invitado a desarrollar textos en torno a algunos de los problemas identificados en las evaluaciones aplicadas por el Instituto, y así ofrecer a los maestros formas novedosas de reflexionar y atenderlos.

Como parte del proceso de elaboración, los textos son revisados por un Comité Técnico conformado por reconocidos expertos y por un Comité Didáctico integrado por profesores de educación básica que laboran en distintos tipos de escuelas públicas; estos últimos prueban los materiales en sus aulas y, con base en sus resultados, hacen consideraciones respecto de las fortalezas y debilidades de las propuestas, así como sugerencias para enriquecerlas.

Con este nuevo título de la subserie Materiales para Apoyar la Práctica Educativa (MAPE), denominado SENTIDO NUMÉRICO, se brindan herramientas creativas para mejorar la enseñanza de las Matemáticas en la educación básica, proponiendo formas novedosas de apoyar el aprendizaje de los estudiantes. En esta ocasión se incluye un CD con actividades y juegos que pueden ser adaptados a las necesidades del grupo y a la intención didáctica de cada docente.

Sentido numérico

Al poner estos textos a su alcance, el Instituto refrenda su convicción de que la evaluación puede contribuir efectivamente a mejorar la calidad educativa. Es nuestro deseo que esta nueva publicación sea de utilidad para los profesores y que en ella encuentren retroalimentación valiosa para ofrecer a los niños y jóvenes mexicanos más y mejores oportunidades de aprendizaje. ♦

Annette Santos del Real

Directora General de Difusión y Fomento
a la Cultura de la Evaluación, INEE

SENTIDO NUMÉRICO es el nombre del libro que tiene en sus manos. Forma parte de la subserie Materiales para Apoyar la Práctica Educativa (MAPE), producida y difundida por el Instituto Nacional para la Evaluación de la Educación (INEE) con la finalidad de “evaluar para mejorar”.

La elaboración y aplicación de pruebas, así como el registro y la publicación de resultados de los Exámenes de la Calidad y el Logro Educativo (EXCALE) son etapas de un proceso que continúa con un análisis minucioso de los resultados a partir del cual se investiga y se hacen propuestas didácticas concretas para desarrollarse en el salón de clases. La edición de este material forma parte de dicho proceso, que continuará cuando usted conozca la propuesta, la analice y la concrete en la práctica educativa a partir de las necesidades de su grupo.

Desde hace algunos años se pretende que la manera en que se aborden los contenidos aritméticos dentro del salón de clases sea a partir de la resolución de problemas, pues no es lo mismo que los niños repitan hechos numéricos aprendidos de memoria y sin sentido a que desarrollen competencias numéricas que les permitan aplicarlos en diferentes situaciones. De ahí que este material está referido al desarrollo de una habilidad para el manejo de los números, que si bien se vincula directamente con los contenidos de la aritmética, su objetivo va más allá de aprender técnicas y procedimientos, pues busca que los alumnos desarrollen una flexibilidad de pensamiento que les permita transitar por diferentes representaciones numéricas.

En este sentido, no sólo es importante que los estudiantes conozcan hechos numéricos, como saber que $5 \times 10 = 50$, sino que puedan ver 50 como la mitad de 100 o el doble de 25, y que desarrollen un pensamiento reversible, por ejemplo, que se den cuenta que si $16 \times 30 = 480$ entonces $480 \div 16 = 30$ y $480 \div 30 = 16$.

Eficiencia y eficacia numérica es parte de lo que se busca, y para ello la autora, Silvia García, propone actividades concretas y da orientaciones precisas en términos del desarrollo de habilidades de pensamiento, como el cálculo escrito, el cálculo mental, la estimación y el uso de la calculadora. Cada actividad que presenta da pie a la reflexión

Sentido numérico

y ampliación, pues deja abierta la posibilidad de bajar o subir el nivel de complejidad de acuerdo con las necesidades del grupo y de proponer nuevas ideas para el desarrollo.

Actividades que invitan al uso de la calculadora sin ningún prejuicio, aceptando que en nuestro tiempo la tecnología es esencial y por ello es necesario fomentar su uso como herramienta de aprendizaje al estudiar regularidades y propiedades numéricas, entre otros temas.

Recuerde que se trata de una propuesta susceptible de ser ampliada y mejorada, por lo que podrá participar aportando y compartiendo sus ideas con sus compañeros de trabajo.

¡Adelante! ♦

María Esther Amador Gómez
Directora del Club de Recreación
Matemática *Grand Apprenti*





—¿Dónde está mi invitación? —preguntó Robert—.
Creo que la he dejado en casa.
—No importa —le tranquilizó el anciano—. Aquí entra
todo el que realmente quiere. ¡Pero quién sabe
dónde está el paraíso de los números! Por eso
son los menos quienes lo encuentran.

Hans Magnus Enzensberger
El diablo de los números

En la antigua Grecia los pitagóricos pensaban que todo era número y el matemático Gauss opinaba que la *aritmética es la reina de las matemáticas*. Los pensamientos anteriores son producto de la fascinación que ejercen los números cuando realmente se les comprende, cuando tenemos la oportunidad de entrar, como se menciona en el epígrafe, en su paraíso. Es probable que para muchos de nuestros alumnos estas ideas resulten muy alejadas de su experiencia, pero estar en el mundo de los números puede convertirse en una experiencia llena de satisfacciones y sorprendernos y deleitarnos con toda la belleza que encierra trabajar con ellos.

Leamos el siguiente fragmento de una clase de cuarto grado de primaria (Saucedo y Hermosillo, 2004).

Maestro: El animal más grande que existe es la hembra adulta de la ballena azul. Con sus 120 000 kilos pesa aproximadamente lo mismo que 20 elefantes o 30 hipopótamos o 40 rinocerontes. Luis Armando, ¿cuánto pesará un elefante? Bueno, vamos a ver, Christian.

Christian: 100 kilos.

Maestro: ¿Cómo le hiciste?

Christian: Hice una resta.

Maestro: ¿Qué cantidad quitaste?

Christian: 120 000 kilos a 20 elefantes.

¿Christian relacionó bien los datos del problema? Una vez que decidió qué operación tenía que realizar, ¿la resolvió correctamente? ¿Podríamos decir que Christian tiene desarrollado su *sentido numérico*? Muchos de nosotros hemos vivido situaciones similares con nuestros alumnos. ¿Qué tanto influimos los maestros para que la aventura de aprender los números y sus relaciones sea o no una experiencia grata y significativa para los alumnos?

Sentido numérico

A partir de 2006, en los programas oficiales de secundaria de Matemáticas, aparece un eje denominado *Sentido numérico y pensamiento algebraico*, y desde 2009 lo encontramos también en educación primaria. ¿Qué es el *sentido numérico*? ¿Se trata sólo de un cambio de etiqueta de los contenidos aritméticos o este cambio de nombre tiene implicaciones disciplinarias y didácticas?

Los contenidos sobre los números y las operaciones básicas son de los que más trabajan los maestros, les dedican gran parte del tiempo en las clases de Matemáticas. Y sin embargo, los resultados de los Exámenes para la Calidad y el Logro Educativo (EXCALE) que aplica el INEE revelan que muchos de los estudiantes de los grados evaluados presentan limitaciones y dificultades en la comprensión y el manejo de los números. Asimismo, las actitudes de nuestros alumnos hacia el trabajo con los números son, con mucha frecuencia, negativas.

El principal propósito de este material es mostrar a los docentes que el desarrollo del sentido numérico puede dotar de significado a los conocimientos que los alumnos construyen en sus clases de aritmética y, con ello, que vivan con agrado el trabajo con los números.

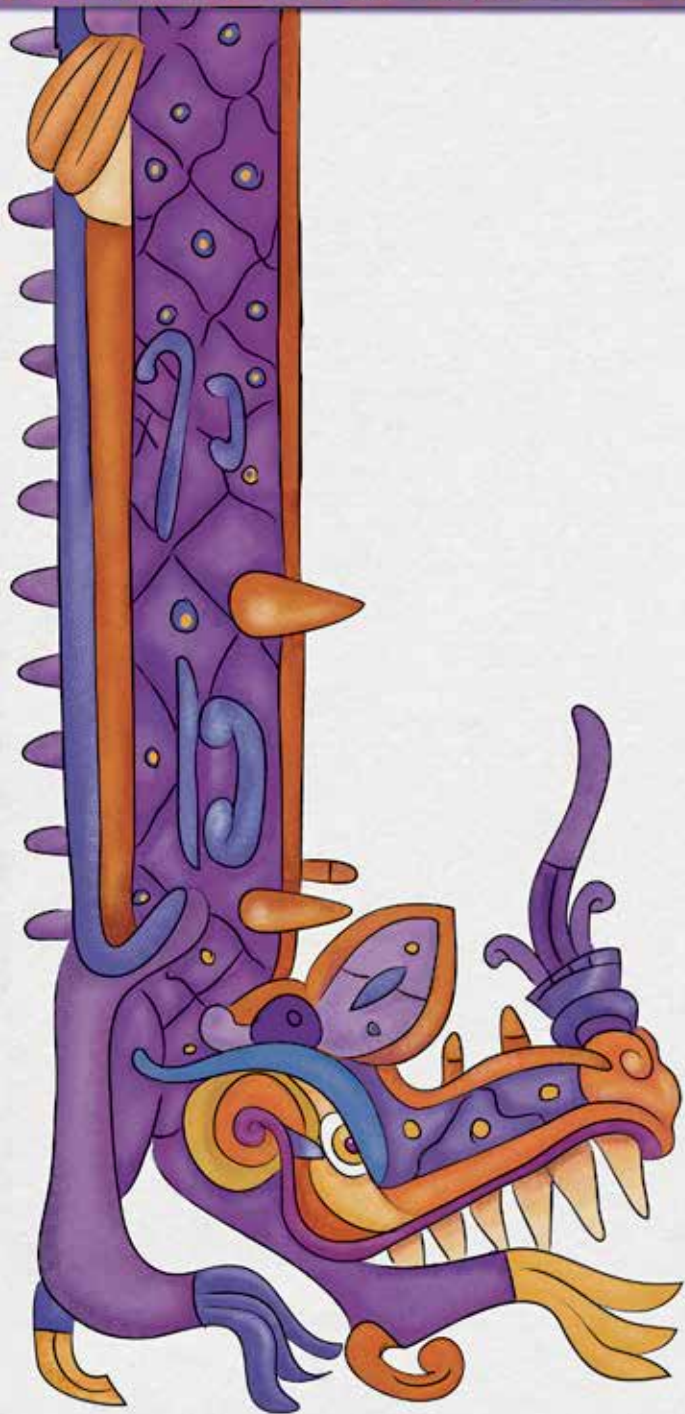
Este libro está conformado por nueve capítulos. En el primero se mencionan los contenidos de aritmética que, de acuerdo con los resultados de los EXCALE, resultan difíciles para los alumnos de preescolar, primaria y secundaria. Asimismo, se muestra la gran riqueza que tiene aplicar el sentido numérico al dar respuesta a reactivos de opción múltiple y la importancia de que los alumnos desarrollen la habilidad de identificar si la respuesta que dan a un problema es o no razonable.

En el segundo capítulo se trata de dar respuesta a la pregunta ¿qué es el *sentido numérico*?, una interrogante que no es fácil de responder. En los apartados 3 a 6 se presentan aspectos del cálculo relacionados con el sentido numérico: estimación, cálculo mental, cálculo escrito y uso de la calculadora. Aunque las actividades de estos capítulos están dirigidas a los maestros, si se consideran pertinentes y se hacen las adecuaciones necesarias, algunas de ellas se pueden aplicar a los alumnos. Estos cuatro capítulos contienen una sección que se ha denominado *Reflexión sobre la práctica*, en la que se presentan situaciones escolares relacionadas con el sentido numérico. Esta sección se incluye porque se considera que el maestro es un profesional de la educación y no un técnico al que se le tiene que decir lo que debe hacer;

mediante la reflexión sobre la propia práctica y la de otros es que el maestro puede construir nuevas ideas y explorar distintas maneras de realizar su práctica docente.

Los últimos capítulos sugieren actividades para trabajar con los alumnos, con ejemplos que el maestro podrá enriquecer a partir de su experiencia y conocimientos. Se incluyen ejercicios sobre el sistema decimal de numeración porque se considera que su conocimiento es básico para desarrollar el sentido numérico con enteros y decimales; sobre la recta numérica se presentan ejercicios porque constituye un valioso recurso para la comprensión de algunos contenidos relacionados con los números. También se ofrecen actividades que promueven la habilidad de estimar o hacer cálculos mentales o escritos, sin dejar de lado una serie de tareas que requieren el uso de la calculadora. Y para mostrar que la matemática recreativa también contribuye al desarrollo del sentido numérico, en el capítulo 8 encontrará varios juegos que permiten a los alumnos hacer un uso flexible y creativo de los números naturales, los decimales y las fracciones. Finalmente, se aportan algunas ideas para la evaluación del sentido numérico. Para apoyarlo en la implementación de la propuesta puede tener acceso a las actividades y los juegos en versión electrónica en un formato que le permitirá modificarlos para su adaptación al grado y nivel en el que trabaja tanto en el CD que se incluye en este ejemplar como en la página del INEE.

Esperamos que este material sea una herramienta útil en su quehacer docente para lograr que sus alumnos vivan con agrado su ingreso al mundo de los números. ♦





1

Aritmética: resultados de los EXCALE

Desde hace algunos años las evaluaciones externas nacionales e internacionales han estado presentes en el salón de clases de los distintos niveles educativos. Entre las que se hacen a los alumnos de educación básica de nuestro país se encuentran los Exámenes de la Calidad y el Logro Educativo (EXCALE) que lleva a cabo el Instituto Nacional para la Evaluación de la Educación (INEE).

Estas pruebas se aplican a muestras representativas de alumnos de educación básica, por lo que, a diferencia de otras evaluaciones en las que los resultados se dan por alumno, escuela o zona, los resultados de los EXCALE no se usan para hacer señalamientos de carácter individual; su propósito es evaluar al Sistema Educativo Nacional en su conjunto, para detectar, entre otras cosas, áreas de conocimiento en las que haya deficiencias.

A la fecha el INEE ha aplicado exámenes de matemáticas a alumnos de tercero de preescolar, tercero y sexto de primaria y tercero de secundaria. En el caso de preescolar la muestra se elige entre alumnos que asisten a escuelas rurales públicas, urbanas públicas, privadas y centros comunitarios; mientras que para primaria se agregan a las anteriores las escuelas indígenas. En secundaria participan estudiantes de escuelas privadas, generales, técnicas y telesecundarias.

Para las intenciones de este trabajo se analizaron los resultados que los EXCALE arrojaron sobre el aprendizaje de la aritmética, lo que se refiere a *Número* en preescolar, a *Los números, sus relaciones y sus operaciones* en primaria y a *Aritmética* en secundaria.

El referente principal para la elaboración de los EXCALE son los programas oficiales vigentes en el momento de su aplicación. En el caso de las matemáticas, los contenidos relacionados con aritmética constituyen una pieza fundamental en los programas oficiales de educación básica y, por lo tanto, en los reactivos que conforman los EXCALE. La tabla siguiente resume las evaluaciones de matemáticas que el INEE ha aplicado, el número de alumnos evaluados y el porcentaje de reactivos que evalúan directamente los números, sus relaciones y sus operaciones.

Tabla 1

Nivel	Grado	Año de aplicación	Número de alumnos evaluados	Porcentaje de reactivos de aritmética
Preescolar	Tercero	2007	10 305	65
Primaria	Tercero	2006	55 312	62.5
		2010	70 434	60.82
	Sexto	2005	47 858	63.84
		2009	11 999	48.75
Secundaria	Tercero	2005	52 251	34.37
		2008	80 525	44.48

Se observa que en preescolar y en tres de las cuatro aplicaciones de primaria los contenidos aritméticos rebasan la mitad del examen. Y a pesar de que en secundaria el porcentaje de reactivos de aritmética representa menos de la mitad, es el área con mayor número de reactivos: por ejemplo, en la aplicación de 2008, 44.8% del examen correspondió a Aritmética, siendo el área con mayor presencia, muy por encima de Geometría, que representó 26.8%, y Álgebra, que ocupó 21.3%.

Contenidos aritméticos de mayor dificultad

En este apartado se exponen los contenidos aritméticos que, de acuerdo con los resultados de los EXCALE, tienen mayor dificultad de aprendizaje. Para cada grado y nivel se presentan tablas de los contenidos que tienen los porcentajes de aciertos más bajos y se ofrecen ejemplos de los reactivos con los que fueron evaluados (INEE, <http://www.inee.edu.mx>).

Preescolar

En el campo formativo *Pensamiento matemático* del programa de preescolar se encuentra el aspecto de *Número*, que abarcó 65% de los reactivos del examen. Debido a que los alumnos de esta edad aún no saben leer ni escribir, en la aplicación de la prueba se tomaron todas las medidas necesarias para asegurar que los alumnos no tuvieran problemas para comprender la tarea que se les proponía; una de estas medidas fue, por supuesto, plantear las consignas de manera oral.

El preescolar es el nivel que presenta menos dificultades. Un gran porcentaje de los alumnos evaluados resolvió correctamente las tareas que les plantearon los EXCALE. Por ejemplo, 98% de los niños contó en voz alta una colección menor a 21 elementos sin equivocarse; 95% dijo en orden la serie numérica de uno en uno hasta el 30, y 88% escribió en orden un tramo de la serie numérica menor a 30.

Los contenidos evaluados que resultaron más difíciles, se muestran en la siguiente tabla.

Tabla 2

Preescolar. Tercer grado (2007)	
Contenido temático	Porcentaje de aciertos
Escribe números que sabe en orden ascendente, sin equivocarse, empezando desde 1 y llegando a un rango entre 31 y 89	17
Utiliza los números para representar cantidades mayores a 13, pero menores a 21	36
Distingue todos los números de las letras en un texto	40

El contenido de mayor dificultad de todo el examen fue el conteo y su representación simbólica de números mayores a 31. A continuación se presenta el reactivo ejemplo para este contenido (recuérdese que las indicaciones se dieron de manera oral).

Sentido numérico

Reactivo



Escribe en las líneas los números que te sepas de manera ordenada, sin saltarte ningún número, empezando desde el 1, como si estuvieras contando: 1, 2, 3... así, hasta el que te sepas.

Se trata de un reactivo difícil para los pequeños debido a que involucra no sólo saber la serie numérica en un rango mayor a 31, sino también su representación simbólica. Aun así, 17% de los alumnos pudo escribir en orden y correctamente la serie numérica hasta un número mayor a 31.

De los alumnos, 36% resolvió una tarea similar a la siguiente, en la que tenían que contar colecciones de más de 13 elementos.

Reactivo



En cada una de las rayas escribe cuántos pájaros hay en cada recuadro.





Se observa que este tipo de tareas exige dominar los principios del conteo:

Correspondencia uno a uno: decir un número por cada pajarito que se señala.

Irrelevancia del orden: empezar por el pajarito que se elija y contar en la dirección deseada.

Orden estable: decir la serie numérica en orden: 1, 2, 3...

Cardinalidad: saber que el último número que se dice indica el número de pajaritos que hay.

Este reactivo también implica controlar la colección para estar seguro de que no quedó un objeto sin contar, ni que se contó un objeto dos veces. Una forma de hacerlo es, por ejemplo, ir tachando los objetos que ya se han contado; otra es siguiendo un orden.

Por último, este reactivo también demanda que los niños sepan simbolizar el último número que dijeron al contar.

Tercero de primaria

El programa de educación primaria vigente en 2006 y 2010 estaba organizado en ejes programáticos, siendo el de mayor extensión el denominado *Los números, sus relaciones y sus operaciones*. Los alumnos de tercero de primaria resolvieron exitosamente varias tareas de este eje. Por ejemplo, en la aplicación de 2006, 81% pudo calcular una suma de tres sumandos sin transformación o escribir números de tres cifras con ceros intermedios, mientras que poco menos de 80% resolvió ciertos tipos de problemas aditivos. En la aplicación de 2010, 80% logró identificar cómo se escribe un número de cuatro cifras y resolver sumas con tres sumandos sin transformación.

No obstante, también tuvieron dificultades para realizar algunas tareas. En las siguientes tablas se muestran los contenidos aritméticos de más bajo porcentaje de aciertos.

Tabla 3

Primaria. Tercer grado (2006)	
Contenido temático	Porcentaje de aciertos
Generalizar e identificar constantes aditivas de una cifra en secuencias numéricas decrecientes	20
Identificar la equivalencia de fracciones	24
Identificar el problema que se puede resolver con una operación dada con números de dos cifras	33

Tabla 4

Primaria. Tercer grado (2010)	
Contenido temático	Porcentaje de aciertos
Identificar fracciones equivalentes	26
Generalizar e identificar constantes aditivas de una cifra en secuencias numéricas decrecientes	30
Identificar fracciones a partir de su representación gráfica empleando modelos continuos	32

Sólo la quinta parte de los alumnos evaluados pudo resolver un reactivo en el que se tiene que descubrir el patrón que sigue una secuencia decreciente para identificar los números que la completan.¹

¹ En todos los reactivos presentados la respuesta correcta es el inciso A. Así aparecen en el Explorador Excale del portal del INEE. En los Excale resueltos por los alumnos, los incisos de las respuestas correctas varían.

Reactivo

¿Qué números van en las rayitas?

_____, 155, 145, _____, 125

- A. 165 y 135
- B. 160 y 140
- C. 154 y 146
- D. 156 y 144

Cabe preguntarse si la dificultad se deba a que este tipo de tareas probablemente se trabajan poco en la escuela, pues el tema de patrones se ha introducido sólo recientemente. Más allá de la dificultad aritmética, que no es mucha, resolver bien estos ejercicios supone entender “de qué se tratan”, lo cual no es obvio para los alumnos.

Aproximadamente la cuarta parte de los niños pudo resolver un reactivo como el siguiente.

Reactivo

Tres amigos compraron plátanos. Daniela compró medio kilo, Luis compró dos cuartos de kilo y Pepe cuatro octavos de kilo.

¿Quién compró menos cantidad de plátano?

- A. Todos compraron lo mismo
- B. Daniel
- C. Pepe
- D. Luis

Sentido numérico

Puesto que en este grado se inicia el estudio de las fracciones, el reactivo que se presentó incluía medios, cuartos y octavos, que son las que algunas investigaciones señalan como las de más fácil comprensión para los niños: mitad, la mitad de la mitad (cuartos) y la mitad de los cuartos (octavos); también puede observarse que no se usó la simbología. Las fracciones constituyen uno de los contenidos que resultan más difíciles de aprender y, como se verá más adelante, esta dificultad persiste hasta tercer grado de secundaria.

Sexto de primaria

El programa vigente en las dos aplicaciones de los EXCALE de sexto de primaria era el de 1993, que, como se mencionó, incluía el eje *Los números, sus relaciones y sus operaciones*. El reactivo de este eje con mayor porcentaje de aciertos en la aplicación de sexto de primaria de 2005 fue ordenar números naturales de cuatro cifras (83%). En la aplicación de 2009 este contenido aumentó su porcentaje de aciertos a 89%. Sin embargo, dado que se inicia la lectura de números de cuatro cifras en tercero de primaria, aunque aparentemente el porcentaje es alto, lo esperable sería que la totalidad de los alumnos de sexto grado pudiera resolver este tipo de tareas.

Por otro lado, a continuación se enlistan los contenidos de este eje que resultaron de mayor complejidad para los estudiantes de sexto grado.

Tabla 5

Primaria. Sexto grado (2005)	
Contenido temático	Porcentaje de aciertos
Ordenar fracciones menores a la unidad	25
Comparar números decimales hasta centésimos	26
Convertir un decimal a su equivalente fraccionario	26
Resolver problemas que impliquen sumas de fracciones	26

Tabla 6

Primaria. Sexto grado (2009)	
Contenido temático	Porcentaje de aciertos
Ordenar de forma ascendente números decimales hasta milésimos	18
Resolver problemas de fracciones que relacionan dos números que representan la parte y el todo	18
Resolver problemas que implican una suma de fracciones de diferente denominador (tercios y cuartos)	24
Resolver problemas que implican una suma de fracciones de diferente denominador (medios y octavos)	26

De lo que se lee en ambas tablas se concluye que los contenidos aritméticos de mayor dificultad se refieren a la comprensión y el manejo de los decimales y las fracciones.

En cuanto a decimales, sólo la cuarta parte reconoce dos números decimales que representan la misma cantidad.

Reactivo



En la siguiente tabla se muestra el peso de cinco pacientes de un doctor:

Nombre	Peso en Kg
Isabel	48.30
Rosa	48.03
Claudia	48.3
Teresa	48.003
Yolanda	48.030

¿Quién pesa lo mismo que Isabel?

- A. Claudia
- B. Rosa
- C. Teresa
- D. Yolanda

Sentido numérico

Y también alrededor de la cuarta parte de los sustentantes resuelve problemas de fracciones como el siguiente:

Reactivo



De un listón que mide $\frac{3}{5}$ de metro, Laura utilizó $\frac{5}{10}$ de metro para hacer un moño. ¿Cuánto listón le sobró?

- A. $\frac{1}{10}$ de metro
- B. $\frac{2}{5}$ de metro
- C. $\frac{8}{5}$ de metro
- D. $\frac{2}{10}$ de metro

Los alumnos de sexto grado llevan cuatro años estudiando las fracciones y tres resolviendo tareas que involucran los llamados números con punto. A pesar de lo anterior, los resultados de los EXCALE muestran que los estudiantes que terminan su educación primaria tienen grandes problemas con la resolución de problemas que implican el manejo de las fracciones comunes y los decimales.

Tercero de secundaria

Al momento de escribir este material el INEE ha realizado dos evaluaciones a alumnos de tercero de secundaria, la primera en 2005 y la segunda en 2008. Al aplicar ambas el programa vigente era el de 1993, que incluía la parte de *Aritmética*. Pese a los resultados que pudieran esperarse por tratarse de un nivel en que los estudiantes inician estudios de matemáticas más generales que la aritmética (como el álgebra), los contenidos relacionados con números y sus operaciones no resultaron sencillos para los sustentantes. Por ejemplo, el reactivo de aritmética con el más alto porcentaje de aciertos en 2005 apenas alcanzó 61%, que fue la resolución de problemas con el máximo común divisor, en tanto que la resolución de problemas con operaciones básicas no llegó a 60%. En la aplicación de 2008 hubo un aumento en el porcentaje de aciertos en las tareas de aritmética:

93% de los alumnos evaluados resolvió correctamente problemas de operaciones básicas con números hasta centésimos y 79% resolvió sumas con transformación cuando los sumandos aparecen en forma desordenada.

Las siguientes dos tablas muestran los contenidos de aritmética que tuvieron mayor dificultad. Cada tabla presenta cinco contenidos temáticos que resultaron muy difíciles para los estudiantes; algunos fueron resueltos por menos de 20% de los alumnos que participaron en la evaluación.

Tabla 7

Secundaria. Tercer grado (2005)	
Contenido temático	Porcentaje de aciertos
Resolver problemas que impliquen calcular raíz cuadrada hasta centésimos	12
Resolver problemas de equivalencia de fracciones de hora expresadas con decimales a minutos	15
Resolver problemas que impliquen sumar, restar y comparar fracciones	21
Identificar fracciones equivalentes	22
Ordenar fracciones	23

Tabla 8

Secundaria. Tercer grado (2008)	
Contenido temático	Porcentaje de aciertos
Identificar en conjuntos de cantidades representados en tablas aquellos que mantienen una relación inversamente proporcional entre sí	4
Resolver problemas que impliquen calcular raíz cuadrada hasta milésimos	14
Resolver problemas de equivalencia de fracciones de hora expresadas con decimales a minutos	15
Resolver problemas que impliquen sumar, restar o comparar fracciones	23

Sentido numérico

Al igual que en sexto grado, se observa que las fracciones siguen siendo un contenido muy difícil para los estudiantes. Un problema como el siguiente sólo lo pudo resolver la cuarta parte de los alumnos que terminan la educación secundaria, es decir, escolares que llevan seis años estudiando las fracciones comunes.

Reactivo



Un hombre gastó su sueldo de la siguiente manera:

$\frac{1}{5}$ en el pago de su renta, $\frac{1}{4}$ en el pago de alimentos y $\frac{1}{8}$ en pagos de diversos servicios.

¿Qué fracción del total de su sueldo le quedó después de realizar estos pagos?

- A. $\frac{17}{40}$
- B. $\frac{23}{40}$
- C. $\frac{3}{17}$
- D. $\frac{14}{17}$

Y menos de la cuarta parte identificó fracciones equivalentes en un reactivo como el siguiente:

Reactivo



¿Cuál de los siguientes números es equivalente a $\frac{117}{468}$?

- A. $\frac{1}{4}$
- B. $\frac{3}{4}$
- C. 4
- D. $\frac{351}{468}$

Aparentemente este reactivo es difícil debido a que el numerador y el denominador de la fracción $\frac{117}{468}$ son números relativamente grandes y no son decenas o centenas cerradas (números que terminan en ceros). Un análisis hecho con más detenimiento mostrará que en realidad no se trata de un problema que implique hacer operaciones laboriosas, aun cuando en la fracción aparecen números del orden de las centenas. Si lo que se pide es un número equivalente a la fracción $\frac{117}{468}$, podemos ver que:

- ◆ Este número no equivale al que se muestra en la opción D, pues es una fracción con el mismo denominador y el numerador 117 no es el mismo que 351.
- ◆ Tampoco puede ser el número 4 de la opción C porque 117 es menor que 468, por lo que se trata de una fracción menor que la unidad.
- ◆ Y como 117 es mucho menor que 468 no representa las tres cuartas partes.
- ◆ La opción correcta debe ser A, lo cual puede comprobarse si se multiplica 117 por 4.

El análisis de las opciones incorrectas del reactivo anterior permite observar la importancia del *sentido numérico* para identificar respuestas no razonables a una operación o problema. Esto se tratará en el siguiente apartado.

Respuestas razonables y no razonables: aplicando el sentido numérico

Si se analizan los reactivos de opción múltiple se toma conciencia de la gran riqueza que implica desarrollar en los estudiantes su sentido numérico, pues uno de los muchos beneficios que conlleva su desarrollo tiene que ver con la resolución de reactivos de opción múltiple. No obstante, cabe subrayar que no es la única razón ni, por supuesto, la más importante. La intención primordial es que los estudiantes sean competentes al enfrentarse a problemas que impliquen el uso de los números.

A continuación se presentan algunos reactivos de los EXCALE de los diferentes grados y niveles y se analiza la manera en que pueden resolverse empleando el sentido numérico (INEE, <http://www.inee.edu.mx>). Los reactivos de opción múltiple constituyen una oportunidad de desarrollar la habilidad de identificar resultados no razonables para los

Sentido numérico

problemas, lo que es, sin lugar a dudas, una herramienta importante al aplicar el sentido numérico para resolver operaciones y problemas aritméticos.

Se sugiere que antes de leer lo que se expone de cada reactivo el lector lo resuelva, para que las explicaciones dadas tengan más sentido y sean comprendidas con mayor facilidad.

Preescolar

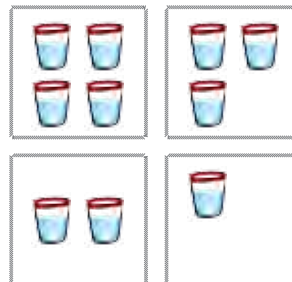
Considere el siguiente reactivo:

Reactivo



Siete niñas quieren tomar agua, pero sólo hay tres vasos. ¿Cuántos vasos faltan para que cada niña tenga un vaso?

Encierra en un círculo la tarjeta que tiene los vasos que faltan para que cada niña tenga un vaso.



Poco menos de la mitad de los pequeños de tercero de preescolar a los que se les aplicó el examen pudo dar respuesta a este reactivo (46%). Es muy probable que los alumnos más adelantados hayan trabajado con el número de vasos y de niñas y obtenido la diferencia (3 para 7 faltan 4), para después buscar la tarjeta que tuviera ese

número de vasos. No obstante, hay otras maneras de resolverlo. Por ejemplo, poniendo en correspondencia uno a uno a las niñas y los vasos que hay. Los alumnos que van desarrollando su sentido numérico seguramente descartaron de manera inmediata las opciones donde hay uno o dos vasos porque al repartir los tres vasos que hay entre las niñas se observa que quedan más niñas sin vaso de aquéllas a las que ya se les asignó uno, por lo que el resultado no puede ser igual ni menor que 3. En este reactivo 54% de los niños eligió una respuesta poco razonable al problema.

Tercero de primaria

Un reactivo interesante para analizar la presencia del sentido numérico en la resolución de un problema, que fue contestado por 42% de los sustentantes, es el siguiente:

Reactivo



Miguel quiere regalar una bolsa con 15 canicas a cada uno de sus 8 primos. Miguel desea saber cuántas canicas necesita para llenar las bolsas, ¿cuál de las siguientes operaciones debe resolver?

A. 15×8

B. $8 \overline{)15}$

C. $15 + 8$

D. $15 - 8$

Sentido numérico

Se espera que los alumnos de este grado identifiquen plenamente los símbolos de las cuatro operaciones básicas. El sentido numérico está presente de la siguiente manera:

- ♦ La práctica continua de la estimación permite que los niños se den cuenta de que se requiere mucho más de 15 canicas, pues Miguel dará esa misma cantidad a cada uno de sus 8 primos.
- ♦ Las operaciones $15 \div 8$ y $15 - 8$ arrojan un número menor que 15.
- ♦ La operación $15 + 8$ apenas da 23, que no le alcanzaría ni para dos primos.

El reactivo anterior también sirve para mostrar que si logramos que los alumnos desarrollen su sentido numérico disminuirá el número de ellos que, ante un problema, se pregunte *¿es de suma?*, *¿es de resta?*, pues si llegan a resolver bien la operación que ellos consideraban correcta, pero encuentran un resultado no razonable, buscarán por sí mismos su error y se darán cuenta de que la operación elegida no los conduce a un resultado razonable. Es decir, el sentido numérico, expresado en la capacidad de estimar la magnitud de un resultado, proporciona una forma de controlar los resultados.

Sexto de primaria

Sólo 30% de los estudiantes de sexto grado resolvió correctamente un reactivo como el siguiente:

Reactivo



¿Cuál es el resultado correcto al resolver la operación $\frac{1}{5} + \frac{1}{2}$?

A. $\frac{1}{5} + \frac{1}{2} = \frac{7}{10}$

B. $\frac{1}{5} + \frac{1}{2} = \frac{2}{7}$

C. $\frac{1}{5} + \frac{1}{2} = \frac{3}{6}$

D. $\frac{1}{5} + \frac{1}{2} = \frac{2}{10}$

Es claro que se puede resolver con el algoritmo convencional de la suma de fracciones, pero también se puede encontrar el resultado usando el sentido numérico, razonando de otras maneras; una de ellas es la siguiente:

- ♦ Se está sumando $\frac{1}{2} + \frac{1}{5}$, por lo tanto, el resultado debe ser más de un medio.
- ♦ Esta idea permite considerar poco razonables todos los distractores, pues $\frac{2}{7}$ y $\frac{2}{10}$ son cantidades menores que un medio y $\frac{3}{6}$ es un medio.

De los alumnos que terminan su educación primaria, 70% eligió un resultado poco razonable al reactivo. Si nuestros estudiantes de educación primaria desarrollaran su sentido numérico, en muchos casos (no en todos) podrían resolver reactivos como el anterior sin necesidad de aplicar el algoritmo convencional para sumar dos fracciones con diferente denominador, al identificar si las opciones que se presentan son o no respuestas lógicas a lo que se pregunta.

Tercero de secundaria

Los estudiantes de tercero de secundaria no están en mejores condiciones; incluso en los egresados de este nivel la comprensión y el manejo que muestran de las fracciones sigue siendo motivo de preocupación: sólo 23% pudo resolver un reactivo como el siguiente:

Reactivo



Juan mezcló $\frac{1}{2}$ litro de agua con $\frac{1}{3}$ de litro de jugo de naranja.
¿Qué cantidad de mezcla obtuvo?

- A. $\frac{5}{6}$
- B. $\frac{2}{5}$
- C. $\frac{1}{6}$
- D. $\frac{5}{5}$

Sentido numérico

El problema implica sumar dos fracciones que podríamos considerar muy fáciles de manejar: $\frac{1}{2}$ y $\frac{1}{3}$. Convirtiendo a sextos tendríamos: $\frac{3}{6}$ y $\frac{2}{6}$, que sumados dan $\frac{5}{6}$. No obstante, se puede razonar de la siguiente manera:

- ♦ El resultado debe ser más de $\frac{1}{2}$ litro, puesto que se está agregando una cantidad a $\frac{1}{2}$ litro; además, debe ser menor que un litro porque $\frac{1}{3}$ es menor que $\frac{1}{2}$, por lo tanto, entre las dos cantidades de líquido no se completa un litro.
- ♦ Sin hacer la suma de la cantidad de agua más la de jugo de naranja se observa que las opciones B y C no pueden ser la respuesta al problema porque son menores que medio litro. También la opción D resulta ilógica porque es un litro exacto.

De nuevo se observa que un porcentaje muy alto (77%) de los estudiantes que terminan su educación secundaria eligen respuestas que no son razonables para el problema planteado. Si bien el desarrollo del sentido numérico permite reconocer algunas respuestas que no son razonables, no siempre es posible ni deseable resolver los reactivos haciendo uso sólo de este tipo de razonamientos.

Consideremos el siguiente reactivo, que sólo 37% de los alumnos de tercero de primaria contestó correctamente:

Reactivo



¿Cuál es el resultado de la siguiente operación?

$$\begin{array}{r} 35 \\ \times 16 \\ \hline \end{array}$$

- A. 560
- B. 530
- C. 210
- D. 245

En este reactivo los estudiantes pueden notar que la respuesta debe ser mayor a 350 porque se está multiplicando 35 por un número mayor que 10, pero aunque descarten dos opciones no podrán dar la respuesta correcta entre 560 y 530 haciendo uso sólo de la estimación; tendrán que resolver la operación para elegir el resultado exacto.

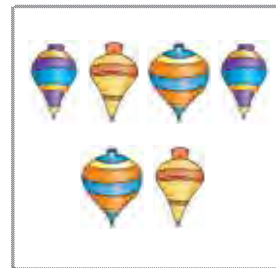
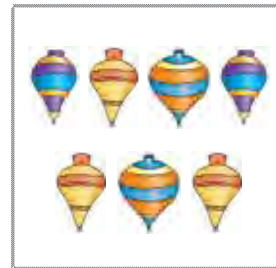
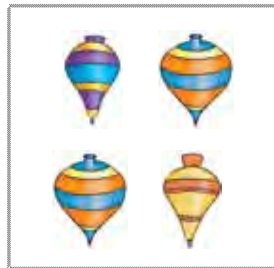
Con lo anterior no se pretende, de ninguna manera, promover la idea de que debemos enseñar a los estudiantes a responder reactivos de opción múltiple a partir de la identificación de respuestas no razonables sólo con el propósito de obtener buenos resultados en los exámenes. Lo que se intenta mostrar es la importancia que tiene el sentido numérico para resolver problemas tanto en el aula como en la vida cotidiana. Asimismo, identificar respuestas no lógicas o poco razonables a una situación problemática constituye una habilidad muy útil para determinar la factibilidad del resultado tanto de los problemas escolares como de los de la vida cotidiana. ♦



Explique cómo un alumno pone en juego su sentido numérico al contestar los siguientes reactivos, identificando las respuestas que podría descartar por no ser factibles.

1

Óscar tenía 4 trompos y su papá le regaló 3. Encierra con un círculo el cuadro donde están los trompos que ahora tiene Óscar.



2

Sebastián guardó 196 canicas en un frasco. De todas las que guardó 79 son negras y las demás son blancas.

¿Cuántas canicas son blancas?

- a) 117
- b) 127
- c) 265
- d) 275



3

Luis tiene 72 limones y los quiere poner en bolsitas con 8 limones cada una, ¿cuántas bolsitas necesita?

- a) 9 bolsitas
- b) 576 bolsitas
- c) 80 bolsitas
- d) 8 bolsitas



4

En México hay 2.6 millones de vendedores ambulantes.
¿Cuántos vendedores ambulantes representan la parte decimal del número subrayado?

- a) 600 000
- b) 0.6
- c) 6.0
- d) 6 000 000



5

Un boleto para el partido Pumas-América cuesta \$130.00.
¿Cuál será su precio si se compra con 30% de descuento?

- a) \$91.00
- b) \$39.00
- c) \$30.00
- d) \$100.00







2

¿Qué es el sentido numérico?



La expresión *sentido numérico* aparece por primera vez en la bibliografía especializada en la enseñanza de las matemáticas a finales de los años ochenta y con mayor fuerza en la década de los noventa. Antes de intentar conceptualizar este término, reflexionemos cuál es su relación con la aritmética.

Aritmética y sentido numérico

Después del breve recorrido del capítulo 1, en el que, a partir de los resultados de los EXCALE, se mostraron algunas de las dificultades y errores en el aprendizaje de la aritmética, se puede concluir que aún hay carencias importantes en la comprensión, el uso y manejo de los números que se estudian a lo largo de la educación básica. Los factores que han propiciado tal situación son muchos y de distinta índole; uno de ellos es la forma en que se trabajan los contenidos aritméticos en el aula.

En efecto, la manera en que los estudiantes viven la aritmética dentro del salón de clases propicia que construyan ciertas creencias y actitudes hacia ella. Por ejemplo, si, guiados por el trabajo escolar, los alumnos creen que la aritmética es un conjunto de técnicas que el maestro les debe explicar: cómo sumar, cómo restar, cómo multiplicar, etcétera, entonces su actitud ante ella será pasiva, en espera de que el maestro les indique cómo hacer las cosas, aunque no comprendan por qué las tienen que hacer así. Si, por el contrario, se les deja en libertad de abordar los problemas haciendo uso de sus conocimientos previos, entonces ellos mismos podrán proponer otras estrategias, otras maneras de operar y manejar los números, además de construir conocimientos con significado.

Otra creencia que puede resultar un obstáculo en el aprendizaje de la aritmética es que los alumnos piensen que en matemáticas sólo hay una manera de hacer las operaciones, que esa manera es “la mejor”. Entonces, al enfrentarse a un problema en que identifiquen la operación que lo resuelve, inmediatamente procederán a resolver

Sentido numérico

ésta sin detenerse a pensar si hay un procedimiento más práctico que el algoritmo convencional que les enseñaron.

Es claro que las creencias de los docentes también influyen en cómo se aborda la aritmética en el salón de clase. Por ejemplo, los maestros que piensen que lo importante al resolver problemas aritméticos es que los estudiantes obtengan la respuesta correcta en lugar de darle sentido a lo que aprenden, pondrán énfasis en la enseñanza de algoritmos y técnicas de manera mecánica, sin dar espacio a que sus alumnos comprendan lo que hacen ni desarrollen su habilidad de interpretar los resultados que obtienen.

Parte de la problemática detectada en los resultados de los EXCALE y en el análisis de los reactivos puede subsanarse si la enseñanza de la aritmética incluye, como parte fundamental, el desarrollo del sentido numérico en los alumnos. Lo anterior no sólo beneficiaría el aprendizaje de la aritmética, pues el sentido numérico puede considerarse de manera transversal: está presente en problemas del eje *Forma, espacio y medida* referentes al cálculo de perímetros, áreas y volúmenes; en el eje *Manejo de la información* en los cálculos aritméticos para obtener medidas de tendencia central o de dispersión, y también al interpretar datos numéricos en tablas y gráficas; en álgebra, por ejemplo, en el manejo de monomios, polinomios y en la resolución de ecuaciones, así como en el análisis del comportamiento de las funciones. Se puede asegurar que siempre que se tenga que resolver un problema que involucre números se puede hacer uso del sentido numérico.

Veamos tres ejemplos donde el sentido numérico está presente al resolver problemas aritméticos. El primero se refiere a una sustracción con números naturales,¹ en el segundo se trabajan fracciones y en el tercero, decimales.

¹ Los números naturales son los que se usan para contar: 1, 2, 3, 4...

Raúl quiere llenar un álbum de 704 estampas. Si ya tiene 199, ¿cuántas le faltan?

Para resolver este problema podemos restar $704 - 199$ y para resolver esta operación con uno de los algoritmos convencionales se escriben los dos números en forma vertical, cuidando que queden unidades con unidades, decenas con decenas y centenas con centenas. Después se procede a resolver la sustracción, por ejemplo:

$$\begin{array}{r} 704 \\ - 199 \\ \hline \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{r} 6914 \\ \cancel{7} \cancel{0} 4 \\ - 199 \\ \hline 505 \end{array}$$

Lo anterior parece demasiado sofisticado para una operación que puede resolverse utilizando estrategias de cálculo mental.



**199 para 200 es 1,
200 para 704 son 504.
Sumamos 1 + 504,
el resultado es 505.**

En la recta numérica esto podría bosquejarse de la siguiente manera:



Sentido numérico

Otra manera de resolver la sustracción anterior es haciendo uso de una propiedad que indica que si sumamos el mismo número al minuendo y sustrayendo el resultado no se altera.



También se puede resolver sumando 1 al 199 y, en lugar de restar 199, se resta 200 y después se agrega 1 al resultado.



En los tres últimos procedimientos observamos un uso flexible y creativo de los números, de algunas propiedades y de las relaciones entre ellos. Y también se observa que estos procedimientos, para el caso particular de $704-199$, son mucho más prácticos que el algoritmo convencional.

Don Manuel tiene un terreno en el que utiliza las cuatro quintas partes para sembrar. Si en la mitad de esas cuatro quintas partes siembra maíz, ¿qué parte del terreno completo la ocupa con este cereal?

Este problema se puede resolver con la multiplicación $\frac{1}{2} \times \frac{4}{5}$. El algoritmo convencional para resolver multiplicaciones de fracciones es multiplicar numerador por numerador y denominador por denominador.

$$\frac{1}{2} \times \frac{4}{5} \implies \frac{1 \times 4}{2 \times 5} = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$$

Muchos de nuestros alumnos se aprenden de memoria y mecánicamente este algoritmo sin comprender por qué se hace así.

Dado que el problema habla de “la mitad de las cuatro quintas partes”, es posible no referirse a la multiplicación de fracciones ($\frac{1}{2} \times \frac{4}{5}$) y trabajar directamente con la idea intuitiva $\frac{1}{2}$ de $\frac{4}{5}$. A partir de esta interpretación se puede calcular el resultado sin necesidad de aplicar el algoritmo de la multiplicación, simplemente tomando la mitad de la cantidad de quintos.



Sentido numérico

Gráficamente $\frac{4}{5}$ se puede representar como:



Y la mitad es $\frac{2}{5}$.

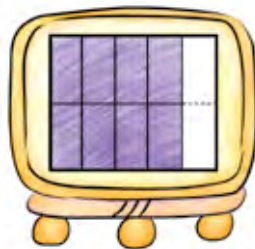


También se puede entender gráficamente por qué, al aplicar el algoritmo convencional, $\frac{1}{2} \times \frac{4}{5}$ da $\frac{4}{10}$, tal como se muestra a continuación.

A partir de los $\frac{4}{5}$ del entero:



Se toma $\frac{1}{2}$ de esos $\frac{4}{5}$, lo cual puede hacerse trazando una línea horizontal sobre la superficie morada:



Cada uno de los pedacitos en que quedó dividido el entero es $\frac{1}{10}$ porque se deben contar los dos pedacitos blancos que también forman parte de la unidad. Entonces, se observa que $\frac{1}{2}$ de esos $\frac{4}{5}$ son 4 pedacitos morados, es decir, 4 décimos. De ahí que:

$$\frac{1}{2} \times \frac{4}{5} = \frac{4}{10}$$

No todas las multiplicaciones de fracciones se pueden resolver sin recurrir al algoritmo convencional, depende de los números involucrados. Lo importante aquí es destacar que si los alumnos tienen claro lo que significa la operación que resuelven y comprenden las fracciones involucradas podrán, en muchos casos, prescindir de algoritmos convencionales y encontrar el resultado haciendo uso de esa comprensión.

Sentido numérico

Lilia tiene 3.72 metros de listón y va a hacer moños. Para cada moño ocupa 0.5 metros de listón. ¿Cuántos moños puede hacer?

Este problema se puede resolver con la división 3.72 entre 0.5. En la aritmética hay una técnica para resolver divisiones en las que ambos números tienen punto decimal. Esta técnica consiste en correr el punto a la derecha el mismo número de lugares en dividendo y divisor, de tal manera que este último quede como un número entero. Después se hace la división normalmente y “se sube el punto” a donde corresponda.

$$0.5 \overline{) 3.72} \implies 0 \times 5 \overline{) 3.7 \cdot 2} \implies 5 \overline{) 37.2} \implies 5 \overline{) 37.2} \begin{array}{r} 7.44 \\ 22 \\ \underline{20} \\ 20 \\ \underline{20} \\ 0 \end{array}$$

El algoritmo anterior funciona para todas las divisiones en las que el dividendo y el divisor tienen punto decimal. Es probable que no comprendamos bien la razón de algunos de sus pasos. Por ejemplo:

- ♦ ¿Qué propiedad de las divisiones permite tachar el punto del divisor y recorrer un lugar el punto del dividendo?
- ♦ ¿Por qué dividir 3.72 entre 0.5 equivale a dividir 37.2 entre 5?
- ♦ ¿Por qué al hacer la división “se sube” el punto?
- ♦ ¿Qué valor relativo tiene el 20, que es el penúltimo residuo de la división?

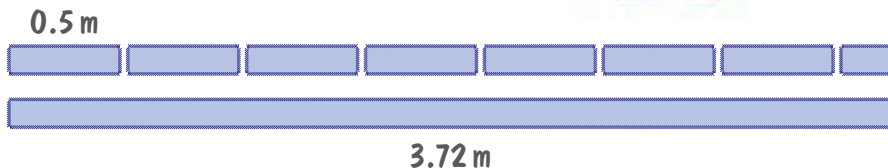
Las respuestas respectivas a estas preguntas son:

- ♦ La propiedad en juego es: si dividendo y divisor se multiplican por el mismo número el cociente no se altera.
- ♦ Porque aplicando la propiedad anterior, el dividendo y el divisor se multiplicaron por 10.
- ♦ Porque se empiezan a dividir los décimos.
- ♦ 2 décimos.

En el desarrollo del sentido numérico se promueve que los alumnos, además de entender el procedimiento anterior, construyan otros procedimientos que, en algunos casos, resulten más prácticos y adecuados a ciertos contextos. Por ejemplo, para este caso se puede buscar cuántas veces cabe 0.5 en 3.72.



Gráficamente se observa:



Salen 7 moños y el pedazo que resta es poco menos de la mitad de medio metro.

Veamos otra forma de resolver la división en juego. Ya anteriormente se observó que de 1 metro se obtienen 2 moños. Observe que el número de moños se obtiene con la división:

$$1 \div 0.5 = 2$$

Sentido numérico

¿Cuántos moños de medio metro se obtienen si se tienen 2 metros de listón?, ¿y si se tienen 3 metros?, ¿4 metros?, ¿10 metros?, ¿20 metros? Es muy probable que ya se haya dado cuenta de que el resultado de dividir un número entre 0.5 es el doble de ese número:

$$2 \div 0.5 = 4$$

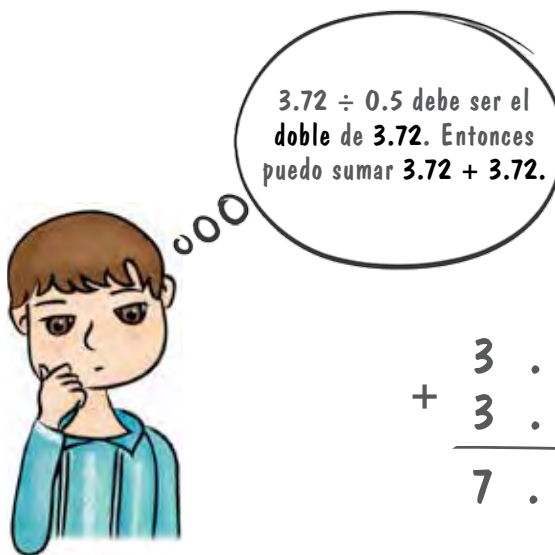
$$10 \div 0.5 = 20$$

$$3 \div 0.5 = 6$$

$$20 \div 0.5 = 40$$

$$4 \div 0.5 = 8$$

Entonces, ¿cuál es el resultado de $3.72 \div 0.5$?



$$\begin{array}{r} 3.72 \\ + 3.72 \\ \hline 7.44 \end{array}$$

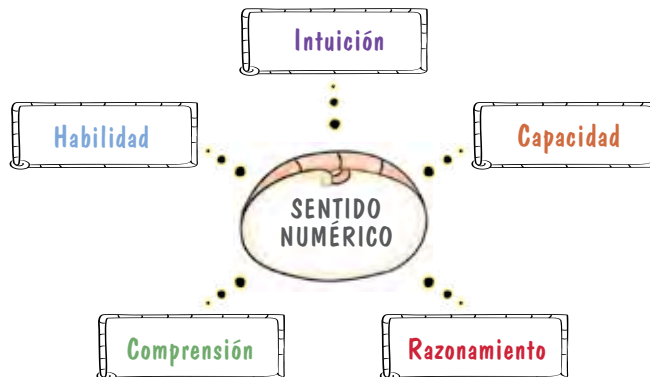
Es el mismo resultado que se obtuvo al resolver la división usando el algoritmo convencional para dividir números con punto decimal.

Otra cuestión importante en el desarrollo del sentido numérico es saber interpretar el resultado obtenido. ¿Qué significado tiene en esta operación el número 7.44? Como se mencionó anteriormente, al resolver la división 3.72 entre 0.5 se encuentra cuántas veces cabe el 0.5 en el 3.72. Como 7.44 es muy cercano a $7\frac{1}{2}$, concluimos que 0.5 cabe en 3.72, aproximadamente, 7 veces y media.

Los ejemplos anteriores muestran lo enriquecedor que resulta dar oportunidad de usar el sentido numérico en la resolución de problemas y lo que aporta al conocimiento de los números, sus relaciones y sus operaciones. Pero ¿qué es el *sentido numérico*? En el siguiente apartado se tratará de dar respuesta a esta pregunta.

Hacia el concepto del sentido numérico

Para la pregunta ¿qué es el sentido numérico? no existe una respuesta única, ni inmediata, ni sencilla. En la bibliografía sobre el tema se encuentran diferentes posturas a partir de la consideración de que el sentido numérico es una habilidad, una intuición, comprensión, conocimiento o razonamiento acerca de los números.²





A continuación se ofrecen algunas definiciones de sentido numérico que dan diferentes autores.³


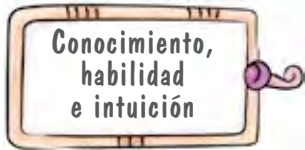
² Adaptado de Bernabe (2008).

³ Citado por Bernabe (2008).

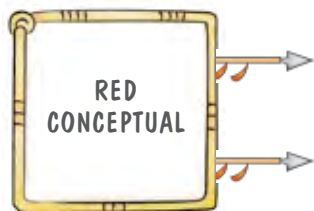
Sentido numérico

		Habilidad y propensión para el uso de los números y las operaciones en formas flexibles para hacer juicios cuantitativos y para desarrollar estrategias eficientes con los números y los métodos cuantitativos (Mcintosh, Reys y Reys, 1997).
		Es una buena intuición acerca de los números y de sus relaciones. Es no algorítmico, genera múltiples soluciones, así como una eficiente aplicación con base en múltiples criterios (Van de Walle y Browman, 1993).
		Capacidad de resolver diferentes problemas a partir del uso de estrategias múltiples y seleccionar la más adecuada para generar claridad en el trabajo que hace (Trafton y Hartman, 1997).
		Una comprensión de los números y de sus múltiples relaciones, del reconocimiento relativo de las magnitudes de los mismos, de los efectos de las operaciones y el desarrollo de referentes sobre cantidades y medidas (Sowder, 1988).
		Razonar con cantidades a fin de poder captar la magnitud de los números, comparar números grandes, comprender los números en diferentes contextos (Friel, 2000).

Hay autores que integran las ideas anteriores al considerar el sentido numérico como comprensión y habilidad, o bien como conocimiento, habilidad e intuición acerca de los números.

	El sentido numérico se refiere a la comprensión general que tiene una persona sobre los números y las operaciones, junto con la habilidad para usar esta comprensión de forma flexible para hacer juicios matemáticos y para desarrollar estrategias numéricas (Bruno, 2000).
	El sentido numérico consiste en los conocimientos, las habilidades y las intuiciones que una persona desarrolla acerca de los números y sus operaciones, junto con la habilidad e inclinación hacia el empleo del conocimiento numérico de manera flexible para formular proposiciones matemáticas, desarrollar estrategias útiles para manipular números, realizar operaciones y resolver problemas (Sánchez, Hoyos y López, 2011).

Otros autores definen el sentido numérico a partir de la idea de red conceptual:

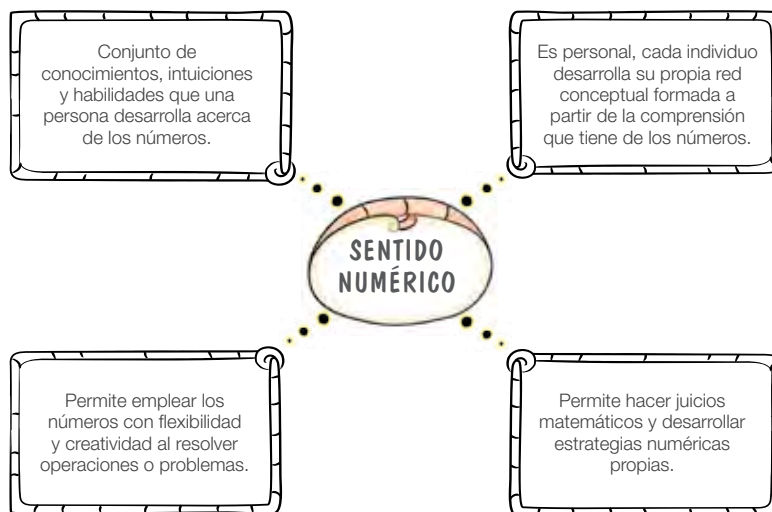


En términos de estructura, se hace referencia a que el sentido numérico es una red conceptual bien organizada, propia de cada individuo, por la cual es capaz de relacionar números y propiedades de las operaciones para resolver problemas de manera flexible y creativa (Castro, Castro y Rico, 2004).

La idea de sentido numérico se basa en la posesión por parte de los estudiantes de una red conceptual que relaciona los conceptos de agrupamiento y valor de posición con la habilidad de usar las magnitudes absolutas y relativas de los números para:

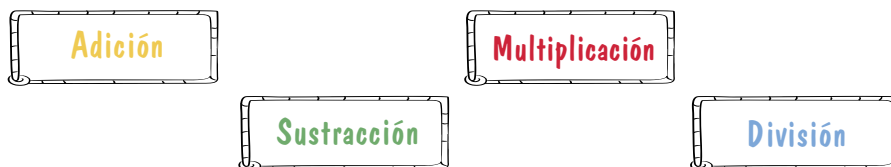
- Emitir juicios sobre la racionalidad de resultados producidos en problemas numéricos.
- La posibilidad de generar algoritmos no convencionales.
- Relacionar los números con las propiedades de las operaciones, etc. (Linares, 2001).

No resulta sencillo resumir todas las ideas expuestas anteriormente; no obstante, el siguiente diagrama es un intento de hacerlo.

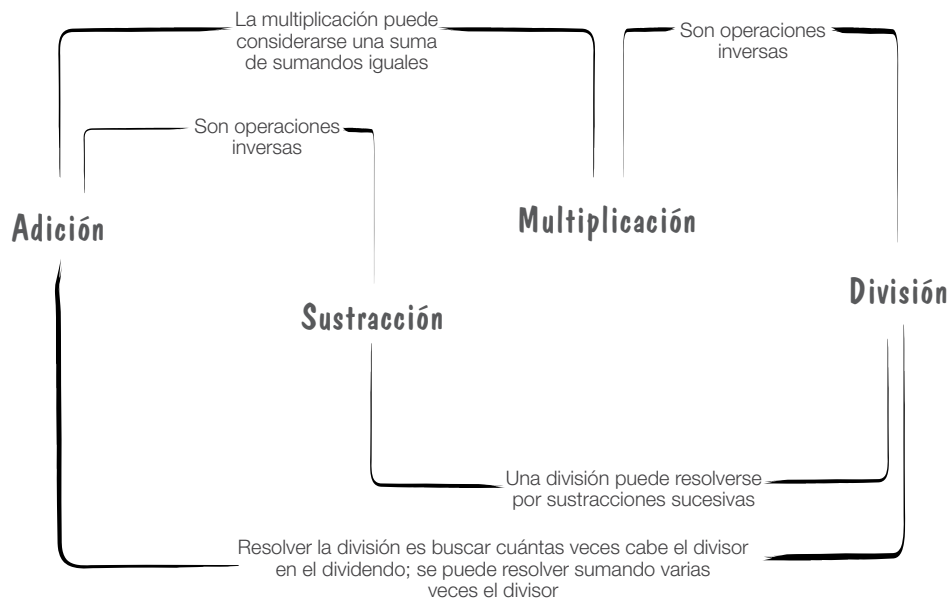


Sentido numérico

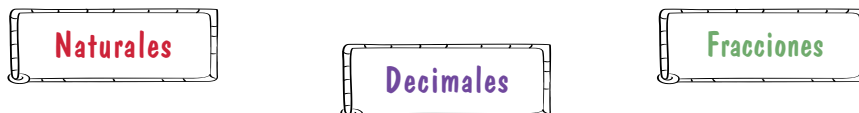
¿Cómo lograr que los estudiantes tengan una red conceptual sobre los números lo más amplia posible? Cuando en clase se trabaja la matemática de manera fragmentada, la red conceptual que los estudiantes construyen también está fragmentada. Por ejemplo, si se enseñan las operaciones básicas sin relacionarlas entre sí, los estudiantes tienen una red conceptual como la siguiente:



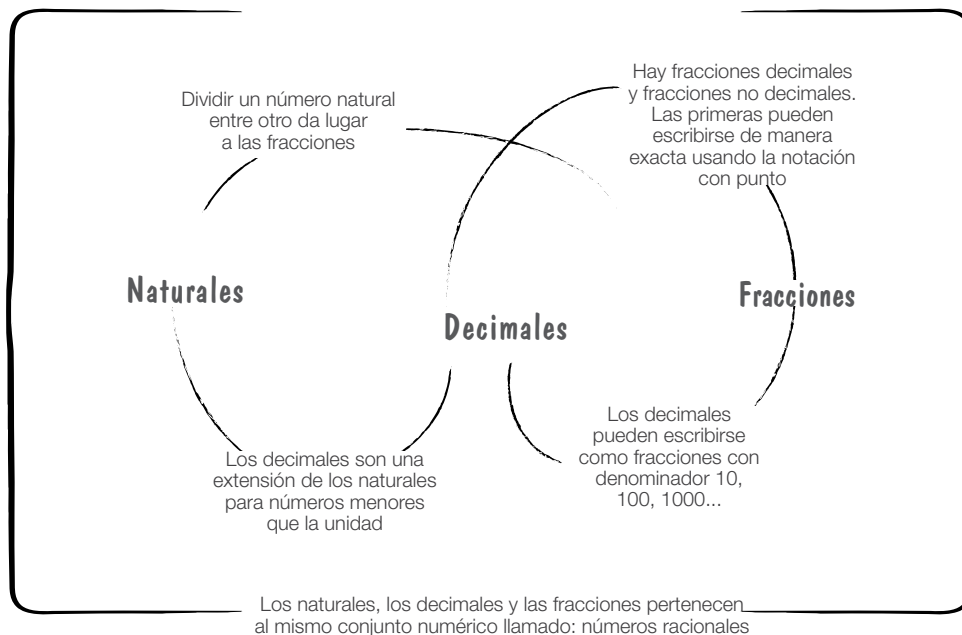
En cambio, si las tareas propuestas logran que los estudiantes aprendan las relaciones entre las operaciones pueden construir redes conceptuales como la siguiente:



Del mismo modo, a partir de la manera en que han trabajado en sus clases de aritmética muchos alumnos conocen los números naturales, los decimales y las fracciones sin considerar las relaciones entre ellos.

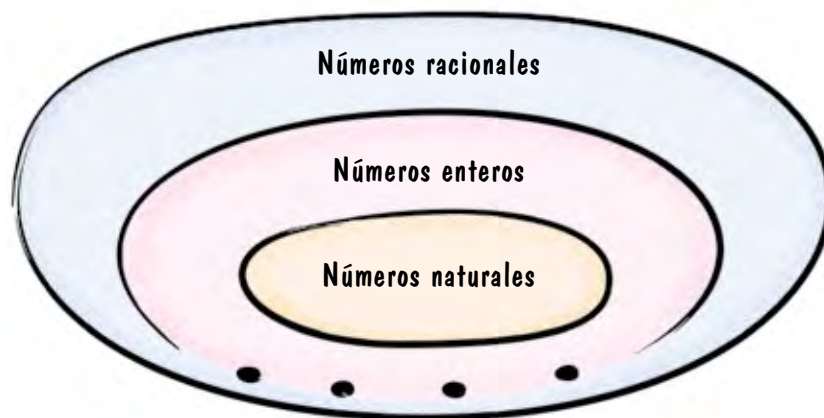


En cambio, una mayor comprensión de los números permite que el alumnado encuentre esas relaciones, construyendo redes conceptuales similares a la siguiente:



Sentido numérico

Cuando los alumnos ingresen a secundaria estudiarán los números negativos y podrán seguir enriqueciendo esta red conceptual, ampliando sus conocimientos de los números naturales, los enteros y los racionales. Es importante elegir secuencias didácticas adecuadas con el propósito de que los estudiantes tengan claridad de la relación entre todos los conjuntos numéricos y que formen una red conceptual a partir de la cual comprendan que se trata de conjuntos de números que están relacionados entre sí pues unos son subconjuntos de otros. Un número puede ser natural, entero y racional al mismo tiempo. Esto se muestra en el siguiente diagrama.



Los números racionales son todos aquellos que pueden escribirse como una fracción cuyo numerador y denominador son números enteros y el denominador nunca puede ser cero. Los números enteros pueden ser positivos o negativos. Los números naturales son los que se utilizan para contar.

El 5 es número natural; también es un entero positivo y un número racional porque puede escribirse como una fracción, por ejemplo $\frac{10}{2}$. En cambio, -5 no es un número natural, sino un entero negativo y un racional porque puede escribirse como una fracción, por ejemplo $-\frac{15}{3}$. Mientras que 2.5 no es natural ni entero, pero sí es un racional porque se puede escribir como fracción, por ejemplo $\frac{25}{10}$.

Con una enseñanza de la aritmética que considere como parte fundamental de ella el desarrollo del sentido numérico se busca que los alumnos conozcan estas relaciones entre los números, sus propiedades y sus operaciones, lo que les ayudará a usar los números con flexibilidad y creatividad al enfrentarse a situaciones problemáticas.

El desarrollo del sentido numérico puede o no favorecerse en la escuela, dependerá de muchos factores, siendo sin duda uno de los más importantes el tipo de tareas que el maestro proponga a los alumnos y la manera en que les invite a acercarse a ellas. ¿Cómo promover en los alumnos el desarrollo de su sentido numérico? ¿Favorece el enfoque de resolución de problemas el desarrollo del sentido numérico de los estudiantes? Sobre ello reflexionaremos a continuación.

El enfoque de resolución de problemas y el desarrollo del sentido numérico

A partir de la reforma educativa de 1993 se da un nuevo impulso, desde una perspectiva distinta, al añejo propósito de dar a la resolución de problemas un papel destacado en el aprendizaje de las matemáticas.

En este enfoque la resolución de problemas no sólo es el propósito de aprender matemáticas sino también el medio para hacerlo. Se promueve que los alumnos se enfrenten a problemas utilizando procedimientos propios; no se trata de enseñarles de entrada a resolver el problema, sino que ellos construyan estrategias personales haciendo uso de sus conocimientos previos.

“Cuando los alumnos tienen libertad para buscar la manera de resolver un problema, por lo general encuentran al menos una forma de aproximarse al resultado. Esto, a su vez, puede generar en el grupo una valiosa diversidad de procedimientos” (SEP, 1995).

Sentido numérico

Aunque en los programas de la reforma de 1993 no aparece explícitamente la expresión *sentido numérico*, puede observarse que el enfoque de resolución de problemas, propuesto tanto en esos programas como en los actuales, favorece su desarrollo al dejar que los alumnos resuelvan los problemas en completa autonomía, antes de enseñarles la herramienta matemática que los resuelve de manera eficiente. Asimismo, el enfoque destaca y valora la existencia de procedimientos alternativos al convencional.

Por ejemplo, en el problema:

Gaby tiene 8 canicas, juega y gana 5. ¿Cuántas tiene ahora?

La herramienta matemática más eficiente para resolverlo es la suma $5 + 8$; no obstante, este problema puede ser resuelto por alumnos que sepan contar hasta el 13 y que no hayan estudiado aún la suma, incluso si no saben leer y escribir y se les plantea de manera oral.

Otro ejemplo es el siguiente problema con fracciones:

Don Raúl mezcló $2\frac{1}{2}$ litros de pintura roja con $2\frac{1}{4}$ litros de pintura blanca. ¿Qué cantidad de líquido tiene en total la mezcla?

Si el problema se plantea cuando los alumnos han estudiado los medios y los cuartos, aunque no se haya estudiado la suma de fracciones mixtas, y se deja en total libertad de resolverlo, los estudiantes buscarán diferentes estrategias para obtener el resultado. No es necesario haber estudiado cómo convertir una fracción mixta en impropia ni cómo sumar fracciones mixtas con algoritmos convencionales buscando el común denominador. Por ejemplo, pueden sumar los enteros y luego las fracciones; como un medio es igual a dos cuartos, el resultado es:

$$2 + 1 + \frac{2}{4} + \frac{1}{4} = 3 \frac{3}{4}$$

Finalmente, un ejemplo con decimales:

Si el dólar está a 13.20 pesos, ¿cuál es el precio en pesos de un producto que vale 14 dólares?

¿Será indispensable saber multiplicar números decimales para resolver este problema? La respuesta es no. Hay otras maneras de calcular lo que se pide; por ejemplo:

- ♦ De 10 dólares son \$132.
- ♦ De 2 dólares son \$26.40.
- ♦ De 4 dólares son \$52.80.
- ♦ De 14 dólares son $\$132 + \$52.80 = \$184.80$.

El procedimiento alternativo que se ha mostrado es posible porque, en este caso, el multiplicador (número de dólares) es entero. Como ya se ha comentado, muchas veces los procedimientos alternos se aplican sólo en algunos casos, pero esto no les quita su valor. En resumen, son útiles pero no suficientes, y de ahí se deduce la importancia de conocer también los algoritmos convencionales que permiten resolver cualquier operación sin importar los números que se tienen que operar.

Otra característica del enfoque de resolución de problemas que favorece el desarrollo del sentido numérico son las confrontaciones o puestas en común que se sugiere hacer después de que los alumnos hayan resuelto un problema.

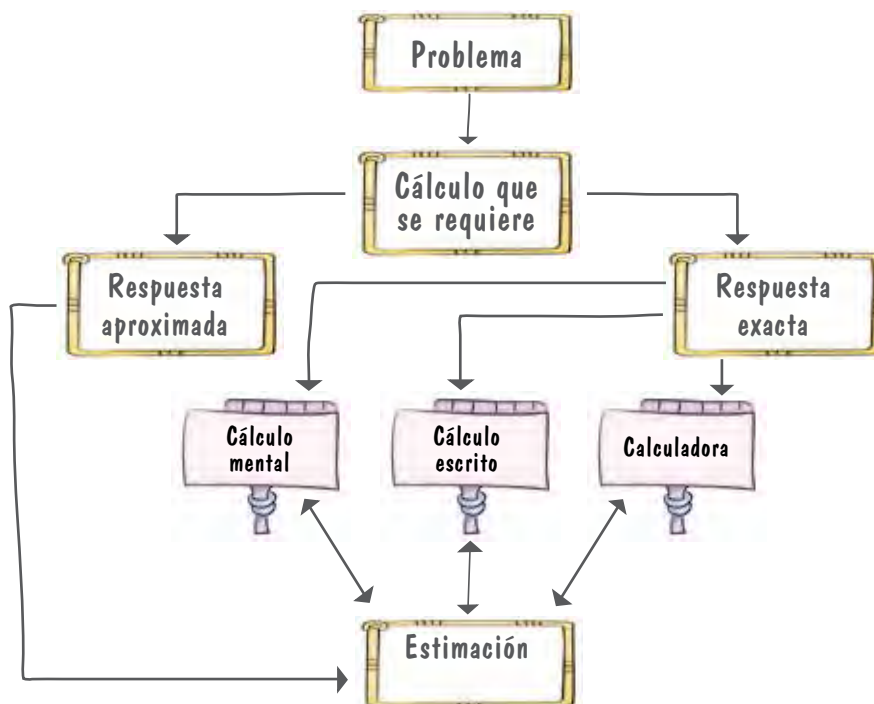
Que los alumnos conozcan las diferentes formas de solución que encontraron sus compañeros para un mismo problema tiene un gran valor didáctico, ya que les permite darse cuenta de que para resolver un problema existen varios caminos, algunos más largos y complicados que otros, pero lo importante es acercarse a la solución. Les permite también percatarse de sus errores y favorece que por sí mismos valoren sus resultados (SEP, 1995).

Sentido numérico

No sólo el hecho de ver que hay diferentes procedimientos para resolver la misma operación o el mismo problema enriquece su sentido numérico, también es enriquecedor para su conocimiento de los números tratar de comprender el procedimiento que siguieron otros compañeros: ¿cómo maneja los números el otro compañero?, ¿qué relaciones usa?, si no llega al resultado correcto ¿qué error cometió?, etcétera.

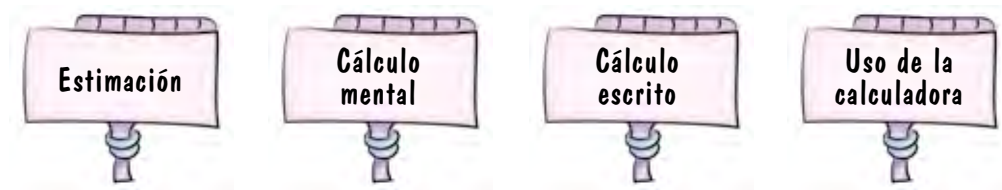
Aspectos del cálculo relacionados con el sentido numérico

Ante un problema matemático, una persona con sentido numérico decide si es suficiente con estimar el resultado o, en caso de que requiera el resultado exacto, si lo puede calcular mentalmente, por escrito, usando la calculadora o combinando dos o más de estos recursos. El siguiente esquema resume lo anterior en una adaptación a lo expresado por Parra (1994):



Se espera que los alumnos, al resolver una operación o un problema, hagan una estimación del resultado y, además, que no siempre los resuelvan haciendo uso de los algoritmos con cálculo escrito, sino que también utilicen el cálculo mental y, ¿por qué no?, la calculadora.

En los siguientes capítulos se abordarán estos cuatro aspectos del cálculo relacionados con el sentido numérico:





ACTIVIDADES para el maestro

1

Escriba con sus propias palabras lo que entiende por *sentido numérico*.

2

Reflexione:

- Con la manera en que trabajo los números, sus relaciones y operaciones, ¿promuevo el desarrollo del sentido numérico en los alumnos?
- ¿Cuánto he influido para que mis alumnos tengan o no actitudes positivas ante el trabajo con los números?

3

Redacte un problema y una manera de resolverlo sin usar algoritmos convencionales, utilizando el sentido numérico.

4

Identifique en un libro de texto de matemáticas del nivel en el que trabaja.

- Una actividad que usted considere que, a partir de las preguntas que se plantean, desarrolla el sentido numérico.
- Argumente su elección.

5

Plantee una división y resuélvala usando sumas o restas.

6

Considere el siguiente problema:

*Una falda que cuesta \$250 tiene un descuento de 25%.
¿Cuánto cuesta la falda con el descuento?*

- a) Resuelva el problema de forma tradicional, usando el cálculo de porcentajes con multiplicación.
- b) Resuelva el problema haciendo uso de su sentido numérico, calculando el porcentaje de una manera diferente.

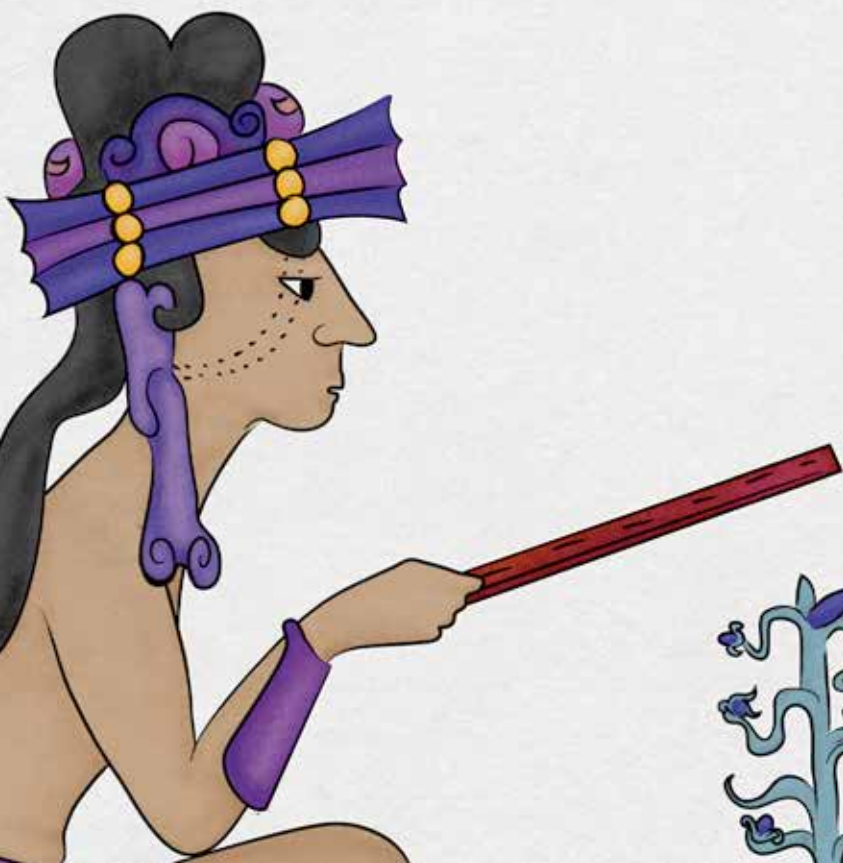
7

En un libro de texto del nivel en el que trabaja (preescolar, primaria o secundaria) identifique una actividad en la que se promueva:

- a) La estimación.
- b) El cálculo mental.
- c) El cálculo escrito.
- d) El uso de la calculadora.

8

En el mismo libro de texto de la actividad anterior haga una valoración rápida de a cuál de los cuatro aspectos del cálculo relacionados con el sentido numérico es al que se le dedica el mayor porcentaje de actividades.





3



Estimación



La estimación juega un papel primordial en el desarrollo del sentido numérico porque, aunque se pida el resultado exacto, una práctica deseable y muy útil es hacer antes una estimación de éste, lo que permite comprobar si el resultado que se obtuvo por cálculo mental, escrito o con la calculadora es o no lógico. Además, como se verá en este capítulo, el desarrollo de la habilidad de estimar implica el uso de relaciones complejas entre los números y sus operaciones.

Durante los Juegos Olímpicos de Londres 2012 un comentarista de televisión mencionó lo siguiente:

Hubo 4 000 millones de televidentes durante la carrera de los 100 metros, cuyo ganador fue el jamaicano Usain Bolt, con un tiempo de 9.63 segundos.

En el párrafo anterior aparecen tres cantidades, ¿cuáles son exactas?, ¿cuáles son estimaciones?

Estimar es obtener de manera mental y rápida un resultado aproximado cuando sea más apropiado que realizar un cálculo exacto (Flores, Reys y Reys, 1990)

Desde la reforma de 1993, las recomendaciones que se daban a los maestros en los libros promovían el uso de la estimación:

La estimación de resultados es otro aspecto importante que se debe desarrollar; con este fin, antes de resolver los problemas el maestro puede hacer preguntas para que los alumnos busquen una primera aproximación al resultado. Por ejemplo, si en el problema se quitan 6 objetos a una colección de 15, puede preguntarles: ¿quedarán más de 15 objetos? ¿Creen que queden más de seis objetos? ¿Creen que el resultado es mayor que diez? Estas interrogantes ayudan a los niños a comprender las relaciones entre los datos del problema.

Sentido numérico

Con el tiempo la estimación de resultados permite al alumno valorar si el que él obtuvo mediante procedimientos informales o convencionales es razonable, posible o imposible (SEP, 1995).

De acuerdo con Segovia *et al.* (1989), las características de la estimación son:

- ♦ Valorar una cantidad o el resultado de una operación.
- ♦ El sujeto que debe hacer la valoración tiene alguna información, referencia o experiencia sobre la situación que debe enjuiciar.
- ♦ La valoración se realiza, por lo general, de forma mental.
- ♦ Se hace con rapidez y empleando números lo más sencillos posibles.
- ♦ El valor asignado no tiene que ser exacto, pero sí adecuado para tomar decisiones.
- ♦ El valor asignado admite distintas aproximaciones, dependiendo de quién realice la valoración.

Entre las razones para trabajar la estimación en la clase de matemáticas se encuentran las siguientes:

- ♦ Se usa en aquellas situaciones reales para las que no se requiere un resultado exacto sino aproximado para tomar decisiones.
- ♦ Enriquece la visión de las matemáticas al comprobar que no siempre se requiere exactitud y precisión para dar un resultado, además de que rompe con la idea de que sólo hay una manera de resolver las operaciones y los problemas.
- ♦ Mejora y desarrolla el sentido numérico al usar de manera flexible los números.
- ♦ Permite la construcción de estrategias propias y con ello desarrolla un conocimiento más profundo de los números, las relaciones entre ellos y las operaciones.
- ♦ Es un apoyo invaluable en la resolución de problemas. Al estimar primero el resultado, los alumnos atienden la relación entre los datos del problema antes de enfrascarse en las operaciones. Asimismo, permite valorar si el resultado obtenido en una operación o problema es o no razonable.

La estimación tiene un amplio uso social. Al estimar no se espera que se den resultados exactos, sino aproximados. Veamos algunos ejemplos.

Imagine que va al supermercado y compra 5 productos iguales que tienen un precio de \$19 cada uno; usted lleva \$100. Sin hacer la operación de 5×19 usted puede saber si le alcanza con el dinero que lleva, ¿cómo lo puede hacer?

El problema anterior es un ejemplo en el que se usa la estimación, basta con saber si este resultado es menor o mayor que 100. Una posible estrategia es la siguiente:



Observe que hay varios conocimientos implicados en este razonamiento; se sabe que:

- ♦ 5×20 son 100.
- ♦ 19 es menor que 20.
- ♦ Si uno de los factores permanece igual y el otro disminuye, el producto disminuye.

Ahora considere el siguiente problema: *En un periódico deportivo se reporta que la asistencia a los últimos cinco partidos de cierto equipo de futbol fue:*

Partido	1	2	3	4	5
Asistencia	32 654	31 375	28 466	27 299	29 572

Sentido numérico

Sin hacer operaciones escritas, ¿podría usted decir cuál fue, aproximadamente, la asistencia total de estos cinco partidos? Una manera de hacerlo es la siguiente:



Veamos otro ejemplo. *Considere que tiene que estimar rápidamente la suma de los números 3 258, 2 146 y 1 601. Una manera de hacerlo es:*



En los ejemplos anteriores se puede ver que la estimación implica conocimientos de las propiedades de los números y las operaciones; involucra comprender los datos que se manejan y la relación entre ellos, poner en juego conocimientos aritméticos y estrategias de solución. Hacer estimaciones del resultado de problemas, de operaciones o de medidas forma parte del desarrollo del sentido numérico.

Si bien las estimaciones no exigen resultados exactos, esto no significa que sea sencillo hacerlas; como opinan algunos autores, la capacidad de hacerlas no siempre surge de manera espontánea en las personas, su desarrollo requiere de instrucción escolar.

Para Reys (1995) existen diferentes maneras de hacer estimaciones; algunas de ellas son:

Redondeo de cantidades. Las cantidades involucradas se redondean a números que sean más sencillos de manejar. Esto se hizo en el ejemplo de la multiplicación 5×19 : el 19 se redondeó a 20 y se calculó 5×20 . En el caso de las fracciones se puede redondear a fracciones más sencillas de manejar; por ejemplo, si se desea resolver $\frac{23}{12} - \frac{3}{5}$ el resultado es aproximado a $2 - \frac{1}{2}$, esto da $1\frac{1}{2}$, aproximadamente.

Sacar promedios aproximados. Se busca una cantidad que represente a los datos, un promedio aproximado. Esto se hizo en el ejemplo de los asistentes a los partidos de fútbol: las cantidades se promediaron a 30 000. En el caso de las fracciones, un ejemplo es la suma $\frac{8}{17} + \frac{4}{9} + \frac{5}{11} + \frac{3}{7}$, donde todas las fracciones son próximas a $\frac{1}{2}$, por lo que un resultado aproximado de esta operación es 2.

Considerar extremos. Se manejan los extremos de las cantidades y luego se hacen ajustes. Esto se hizo en el ejemplo de la suma que dio un resultado aproximado de 7 000.

En la práctica estas estrategias se pueden emplear simultáneamente (a veces incluso se confunden una con otra).

Muchas veces los niños intentan dar el resultado exacto; para llevarlos a estimar puede ser útil:

1. Darles poco tiempo para contestar (por ejemplo, que apunten el resultado y suban las manos para cerciorarse de que no siguen escribiendo);
2. Realizar ejercicios en los que deben decir, a partir de varios rangos, en cuál caería el resultado; o bien, a partir de varios resultados, cuál es el que creen que más se acerca. Puede ser práctico usar la calculadora después para ver quién se acercó más.


ACTIVIDADES
 para el maestro

1

Describe dos situaciones en las que es suficiente una estimación de las cantidades involucradas y dos situaciones en las que se requiere un resultado exacto.

2

Describe tres razones por las que usted considera que es importante trabajar la estimación en sus clases de matemáticas.

3

Estime el resultado de las siguientes operaciones:

- | | | | |
|---------------------------------|---------------------------------|---|------------------------------------|
| a) $3\,497 + 2\,788$ | b) $5\,699 - 1\,706$ | c) 39×12 | d) $5\,698 \div 71$ |
| e) $1.005 + 2.004$ | f) $91.87 - 11.21$ | g) 4.8×2.9 | h) $0.167 \div 0.99$ |
| i) $\frac{9}{10} + \frac{7}{8}$ | j) $\frac{9}{10} - \frac{7}{8}$ | k) $\frac{13}{25} \times \frac{11}{12}$ | l) $\frac{1}{17} + \frac{200}{99}$ |

4

Sin hacer las operaciones, identifique aquéllas cuyo resultado sea mayor que 1.

- | | | | |
|---------------------------------|---------------------------------|---------------------------------|---|
| a) $\frac{1}{2} + \frac{1}{3}$ | b) $\frac{1}{4} + \frac{4}{5}$ | c) $\frac{7}{8} + \frac{3}{16}$ | d) $\frac{1}{10000} + \frac{999}{1000}$ |
| e) $\frac{5}{18} + \frac{2}{3}$ | f) $\frac{5}{9} + \frac{4}{12}$ | g) $\frac{4}{5} + \frac{1}{6}$ | h) $\frac{567}{1000} + \frac{1}{2}$ |

5

Sin hacer las operaciones, ubique en la recta numérica el lugar que, aproximadamente, corresponde al resultado; utilice la letra de cada operación.

a) $4 \div 5$

b) $0.1 \div 0.09$

c) $0.1 \div 0.5$

d) $0.05 \div 0.1$



6

Estime el resultado de los siguientes diez ejercicios:¹

$$\begin{array}{r}
 87\ 419 \\
 92\ 765 \\
 +\ 90\ 045 \\
 81\ 974 \\
 \hline
 98\ 102
 \end{array}$$

2. $474\ 257 \div 8\ 127 =$

3. $\frac{12}{13} + \frac{7}{8} =$

4. $486 \times 0.24 =$

5. Calcule el área aproximada de un rectángulo de: 28 cm x 47 cm

6. Si 30% de los aficionados de la serie mexicana de beisbol compran un refresco, ¿como cuántos refrescos se vendieron, si la asistencia fue de 54 215 personas?

7. Las concesiones de la serie mexicana de beisbol tuvieron ingresos por \$ 21 319 908 00. Si dicha cantidad se divide en partes iguales entre los 26 equipos, ¿como cuánto recibe cada equipo?

8. Ésta es una cuenta del mercado que aún no ha sido sumada, ¿como cuánto es el total?
79 + 44 + 130 + 34...

9. Estima 15% de descuento para una chamarra que cuesta \$28 000.00

10. ¿Qué respuesta es razonable?

$$\frac{4}{9} + \frac{5}{10} = 1\frac{5}{90}$$

$$\frac{6}{8} + \frac{4}{7} = \frac{8}{15}$$

$$\frac{8}{15} + \frac{11}{20} = 1\frac{1}{12}$$


¹ Esta actividad fue tomada de Cortés, Backhoff y Organista (2005).


REFLEXIÓN
sobre la práctica

ACTIVIDAD 1

A los alumnos de un grupo de quinto grado de primaria el profesor les propuso resolver el siguiente ejercicio:






INSTITUTO DE EDUCACIÓN DE AGUASCALIENTES
ESCUELA PRIMARIA JOSÉ MARÍA IGLESIAS
CLAVE: 01DPR0105Q

SECRETARÍA DE EDUCACIÓN


NOMBRE DEL ALUMNO: Juan Alejandro Ramos Herrera, 5° "B"

ESTIMACIÓN

Los alumnos del 5° "B" de la escuela "José María Iglesias, van a preparar limonada para la fiesta de día de muertos; para ello, están haciendo combinaciones utilizando jugo de limón y agua. Uno de los equipos ha realizado las siguientes combinaciones. En equipos dialoguen y completen la última columna de la tabla, anotando más, menos o igual, a un litro, estimando el resultado que crean correcto.

Niños	Cantidad de agua	Cantidad de jugo de limón	¿Preparó más, menos o igual a un litro de limonada?
	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	Más
	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	Más
	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	Igual
	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	Más
	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	Menos

Cuando los alumnos terminaron de resolverlo, el maestro realizó una puesta en común. El siguiente es un fragmento de dicha confrontación:²

² Maestro Gerardo Ramos Martínez.



Maestro: A ver, Alex. ¿A ustedes cuánto les dio: más, menos o igual?

Niños del equipo de Alex: Más.

Maestro: ¿Por qué más?

(Los niños del equipo de Alex hablan varios al mismo tiempo.)

A ver, uno solo.

Jafet: Porque si sumamos un medio más dos cuartos se hace un litro, más el otro cuarto.

Maestro: A ver, otra vez. ¿Por qué? Porque si sumamos ¿cuánto?

Jafet: Dos cuartos de los tres cuartos da un litro, y si sumamos el otro cuarto nos queda más de un litro.

Para el caso en el que hay $\frac{3}{4}$ de agua y $\frac{3}{4}$ de jugo de limón un alumno comenta:

Alumno: Porque $\frac{2}{4}$ forman $\frac{1}{2}$, más los otros $\frac{2}{4}$ del otro forman un litro y sobran $\frac{2}{4}$, que forman $\frac{1}{2}$, y se formaría $1\frac{1}{2}$ litro.

Ante este mismo problema, en otro grupo de cuarto grado los alumnos sugirieron diferentes procedimientos.³

³ Maestro Víctor Manuel Roque Márquez.

Sentido numérico

- Porque dos cuartos es un medio, y los otros tres cuartos forman dos cuartos, que es más de un litro.
- Porque tres cuartos forman casi el entero; nomás le falta un cuarto, y dos cuartos es un medio, más otro medio es un entero, y sobraría un cuarto.
- Tres cuartos y tres cuartos se vuelven seis cuartos, y se pasa de un litro.
- Tres cuartos y tres cuartos son seis cuartos, y nomás se necesitan cuatro cuartos para un litro.



Preguntas para reflexionar

1. ¿Por qué es importante que los maestros realicen una puesta en común de procedimientos cuando los alumnos terminan de resolver el ejercicio?
2. ¿Por qué considera que esta actividad es de estimación?
3. ¿Es necesario que los niños sepan el algoritmo para sumar dos fracciones de igual o diferente denominador para resolver el ejercicio?
Argumente su respuesta.



ACTIVIDAD 2

A un grupo de 248 estudiantes de secundaria de Ensenada (BC) se les plantearon los problemas que usted resolvió en las actividades sobre estimación. El problema 6 es el siguiente:

Si 30% de los aficionados de la serie mexicana de beisbol compra un refresco, ¿como cuántos refrescos se vendieron, si la asistencia fue de 54 215 personas?

A continuación se muestra cómo resolvieron este último problema algunos estudiantes (Cortés *et al.*, 2005).

Alumno	Respuesta al problema 6
A	Veo el número y le saco la mitad (50%), otra vez (25%) y le aumento un poquito para 30%.
B	Veo que el 30 es como $\frac{1}{3}$ de 100, entonces dividido entre tres el número.
C	El 54 lo tomo como 100 (el doble) y saco 30%, al resultado le saco la mitad.
D	Pienso en sacar 10% y a lo que sale lo multiplico por tres.
E	Como me piden 30%, saco 50% y luego otra mitad (25%) y luego le aumento un poco.

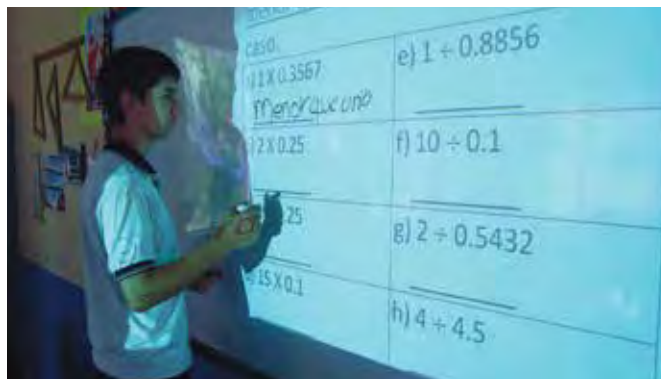


Preguntas para reflexionar

1. Usted resolvió este problema en el apartado anterior. ¿Alguno de estos cálculos estimativos coincide con el suyo? ¿Cuál?
2. ¿Cuál de estos cálculos estimativos le parece más adecuado para el problema? ¿Por qué?
3. ¿Considera que, aunque no se obtenga el resultado exacto, se puede decir que los alumnos utilizan matemáticas? Argumente su respuesta.
4. Redacte un texto breve dando respuesta a la pregunta ¿cómo podría desarrollarse la habilidad de estimar en los alumnos del grado en que laboro?

ACTIVIDAD 3

El siguiente es un fragmento de una puesta en común que se desarrolló en un grupo de tercero de secundaria con el que el maestro está trabajando estimación usando números con punto decimal:⁴



Maestro: Uno entre 0.8856 ¿es menor que uno o mayor que uno?

Diego: Es menor que uno.

Maestro: Diego dice que es menor que uno.

Fabián: No, Diego, estás en un error.

Maestro: A ver, explícale, Fabián.

Fabián: No es multiplicación, Diego, es resta; digo, división.

Diego: ¿Y qué es lo opuesto a la división?

Fabián: Sí, en la multiplicación le vas sumando números y te va dando más. Aquí es todo lo contrario, le vas sumando números y es menos.

⁴ Maestro Enrique Corona Alarcón.

Maestro: A ver, Diego, usa tu calculadora en la computadora.

Diego: Sí, sí es mayor que uno.

Maestro: ¿Por qué es mayor que uno, Diego? ¿Por qué crees que sea mayor que uno?

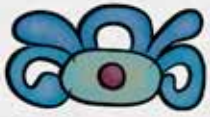
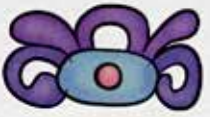
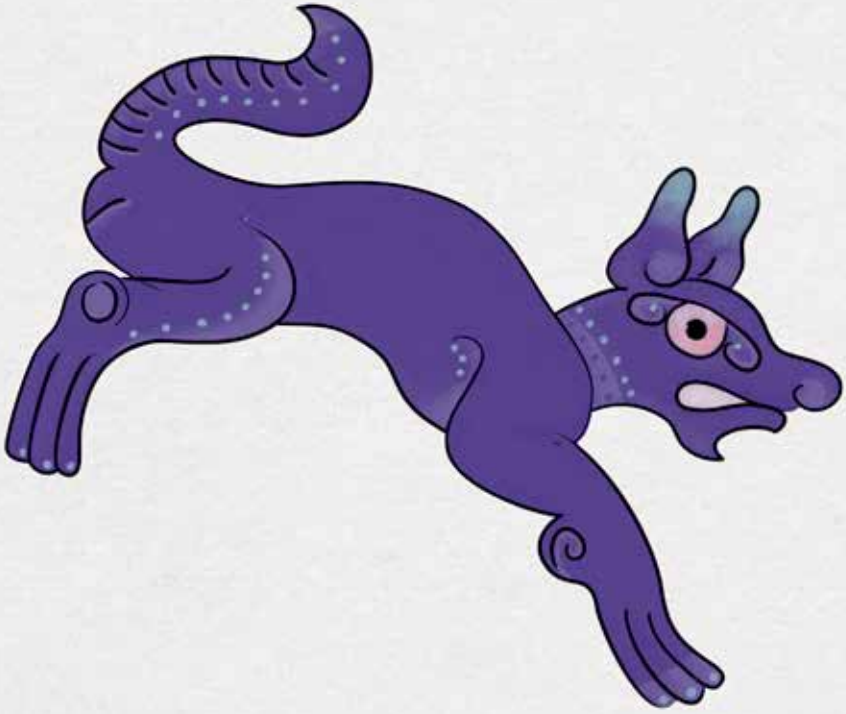
Diego: No sé.

Fabián: Uno lo divides entre uno, te da uno. Le sumas, te da menos; le restas, te da más.



Preguntas para reflexionar

1. ¿Por qué la actividad anterior involucra la estimación?
2. ¿Qué opina de las intervenciones del maestro?
3. ¿Qué opina de que el maestro haya pedido a Diego que usara la calculadora?
4. ¿Por qué Diego concluyó que la operación propuesta tiene un resultado mayor que uno? ¿Entendió el porqué? Argumente su respuesta.
5. Trate de explicar con sus propias palabras el razonamiento de Fabián. (Pista: resuelva con su calculadora divisiones entre números decimales menores que uno y mayores que uno.)





4



Cálculo mental



Imagine que está en una tienda y no tiene lápiz ni papel ni calculadora a la mano; su compra es de 372 pesos y pagó con un billete de 500 pesos. ¿Cómo calcularía su cambio exacto? Es muy probable que haya respondido que haría la cuenta mentalmente. El cálculo mental es muy útil en algunas situaciones en que las cantidades no son difíciles de manejar, no se cuenta con algún recurso para realizar cálculos y se requiere una respuesta exacta.

Se entiende por cálculo mental una serie de procedimientos mentales que realiza una persona sin la ayuda de papel ni lápiz y que le permite obtener la respuesta exacta de problemas aritméticos sencillos (Mochón y Vázquez, 1995)

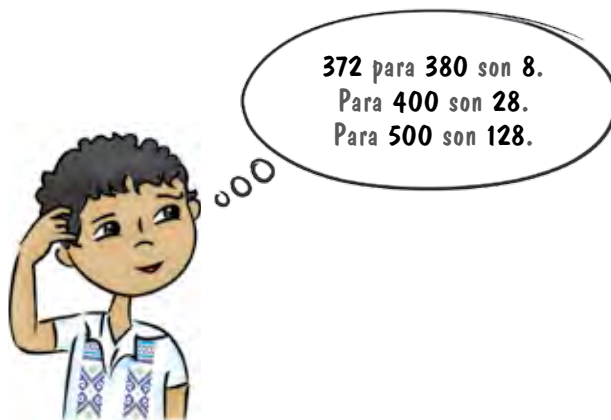
La enseñanza del cálculo mental ofrece muchas ventajas:

- ◆ Enriquece el conocimiento de los números, las relaciones entre ellos y sus operaciones.
- ◆ Fomenta la creatividad y flexibilidad en el uso de los números.
- ◆ Desarrolla la atención, la concentración y la memoria.
- ◆ Fomenta la habilidad de tomar decisiones sobre cómo proceder para llegar al resultado.
- ◆ Desarrolla la autonomía, pues el alumno decide por sí mismo el método que empleará; las estrategias de cálculo mental son personales.

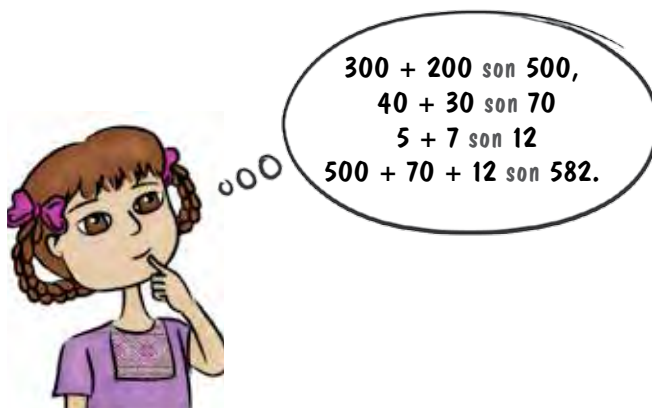
Utilizar mentalmente un algoritmo convencional para calcular la diferencia entre 500 y 372 resulta muy difícil porque involucra dos transformaciones y el minuendo tiene dos ceros consecutivos. Lo invitamos a que intente hacerlo para que tome conciencia de que el algoritmo convencional no siempre es la mejor manera de resolver mentalmente una operación; depende mucho de los números involucrados.

Sentido numérico

Un procedimiento muy utilizado con cálculo mental, que ya se ha expuesto con anterioridad y que incluso usan los adultos no alfabetizados, es ir agregando cantidades al sustraendo hasta obtener el minuendo, buscando que los sumandos parciales sean fáciles de determinar. Lo que le falta a 372 para 500 se puede calcular de la siguiente manera:



Veamos otro ejemplo: Sumar $345 + 237$ mentalmente. No se trata de sumar estos números usando el algoritmo convencional; la idea del cálculo mental es que se usen procedimientos propios. Por ejemplo:



En el algoritmo convencional se procede siempre de la misma manera, sin importar los números que estén en juego. Por el contrario, en el cálculo mental no siempre se procede de la misma manera; depende de los números, de las relaciones que ha construido la persona, de su capacidad de memorizar datos intermedios, de las propiedades que conoce y de sus preferencias.

En ciertas ocasiones resulta útil apoyar el cálculo mental con algunas notas escritas para ayudar a la mente a guardar ciertos resultados parciales. Es decir, en ocasiones se puede complementar el cálculo mental con el cálculo escrito o, incluso, con el uso de la calculadora.

Además de la construcción de procedimientos personales, tener ciertos resultados sistematizados facilita realizar cálculos mentales. Ejemplos de este tipo de resultados útiles para el cálculo mental son reconocer las parejas de números que sumados dan diez o las tablas de multiplicar.

Asimismo, los alumnos pueden construir algunas técnicas o atajos para obtener resultados rápidamente después de observar regularidades y generalizaciones.

Por ejemplo, que los alumnos se den cuenta de que si:

$$5 + 4 = 9$$

$$3 + 8 = 11$$

Entonces:

$$50 + 40 = 90$$

$$500 + 400 = 900$$

$$30 + 80 = 110$$

$$300 + 800 = 1100$$

Sentido numérico

Con respecto a los procedimientos propios, se espera que sean desarrollados por los mismos estudiantes, aunque no se descarta que se les den pistas para que los construyan. Es importante que los procedimientos se expliciten y socialicen en el grupo. También es recomendable que si los alumnos no pueden construir una estrategia de cálculo mental el maestro los guíe para que lo hagan.

Los ejercicios que se planteen para resolverse con cálculo mental realmente deben poder solucionarse mentalmente. Dado que el cálculo mental requiere que los alumnos se concentren, guarden resultados en la memoria, encuentren relaciones entre los números y sepan manejarlas, si se les dan números muy difíciles la tarea puede resultar demasiado cansada y provocar una actitud de poco interés. Los números y las actividades deben elegirse con el propósito de promover la autoconfianza en los estudiantes, lo que también se logra si se dosifican los ejercicios, empezando con cálculos sencillos que se pueden ir complicando conforme se note que los alumnos van adquiriendo confianza en el uso del cálculo mental.

La siguiente tabla presenta una guía para identificar las operaciones que pueden proponerse a los alumnos para realizar cálculos mentales (Mochón y Vázquez, 1995):

Tabla 1

Roja	Naranja	Amarilla	Verde	Azul
$5 + 9$	$130 + 100$	$139 + 28$	$592 + 276$	$3964 + 7123$
$13 - 8$	$85 - 20$	$83 - 26$	$592 - 276$	$5960 - 4981$
4×7	5×30	17×3	931×8	931×768
$35 \div 5$	$90 \div 3$	$72 \div 4$	$693 \div 7$	$8321 \div 57$

En la banda roja hay operaciones que los alumnos pueden resolver de memoria. En la naranja se encuentran las de la primera banda pero con ceros. En la banda amarilla hay operaciones que se pueden resolver con estrategias de cálculo mental a partir de un entrenamiento adecuado. Las operaciones de la banda verde se pueden

resolver con el algoritmo convencional o calculadora; si se quiere usar el cálculo mental en las operaciones de esta banda se necesita mucho entrenamiento. Finalmente, en la banda azul se encuentran operaciones cuyas respuestas se obtienen con el algoritmo convencional realizado con lápiz y papel o con la calculadora.

Por otro lado, el tiempo dedicado exclusivamente a cálculo mental no debe ser muy prolongado, quizás diez minutos en cada clase. No obstante, también hay que subrayar que el cálculo mental se puede trabajar de manera transversal, en otras actividades, como el cálculo de perímetros, áreas y volúmenes, porcentajes, problemas de proporcionalidad, análisis de datos en tablas y gráficas, etcétera. En estos casos, dado que el propósito no es trabajar cálculo mental, debe ser decisión de los alumnos si lo usan o no.



ACTIVIDADES para el maestro

1

Resuelva mentalmente:

- a) Carlos compró un juguete de 18 pesos y uno de 99 pesos, ¿cuánto pagó?
- b) Daniel compró un juguete de 18 pesos y uno de 999 pesos, ¿cuánto pagó?
- c) Eric compró un juguete de 18 pesos y uno de 9 999 pesos, ¿cuánto pagó?

2

Explique una manera rápida de sumar mentalmente el 9, el 99, el 999 y el 9 999 a un número.

3

Resuelva mentalmente:

- a) 4×25 c) 8×25 e) 9×25
b) 12×25 d) 17×25 f) 1.20×25

4

Multiplique mentalmente por 100 los siguientes números y obtenga la cuarta parte del resultado.

- a) 4 b) 12 c) 8 d) 17 e) 9 f) 1.20

5

Compare los resultados que obtuvo en los ejercicios 3 y 4.
¿Qué observa?

- a) Describa una manera de multiplicar mentalmente un número por 25.
b) Describa una manera de multiplicar mentalmente un número por 50.
c) Describa una manera rápida de multiplicar un número por 12.5.

6

Un alumno propuso que, para multiplicar por 25, *primero se divide el número entre 4 y el resultado se multiplica por 100.*

- a) ¿Es correcto este procedimiento?
b) ¿Cuáles son sus desventajas?

7

Resuelva mentalmente las operaciones de la columna amarilla de la tabla de la página 92. Recuerde que no se trata de usar mentalmente el algoritmo convencional; trate de crear procedimientos propios.

8

Invente una suma, una resta, una multiplicación y una división con números con punto decimal que usted considere que se pueden resolver mentalmente.

Resuélvalas.

9

Anteriormente se mostró que dividir entre 0.5 equivale a multiplicar por 2. Con base en esto investigue:

- ¿A qué equivale dividir entre 0.25?
- ¿A qué equivale dividir entre 0.125?
- ¿A qué equivale multiplicar por 0.25?
- ¿A qué equivale multiplicar por 0.125?

10

Investigue a qué equivalen las divisiones y multiplicaciones siguientes:

- Divisiones de fracciones entre $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$.
- Multiplicaciones de fracciones por $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$.

11

A un alumno de primero de secundaria se le pidió que resolviera mentalmente la operación $704 - 199$; lo resolvió de la siguiente manera:

*Cierro el 199 a 200 sumándole 1 para que sea más fácil.
Resto $704 - 200$, me da 504. Como le aumenté 1 a 199, al resultado le resto 1. Entonces $504 - 1$ el resultado es 503.*

- ¿Qué error cometió el alumno en su razonamiento?



REFLEXIÓN sobre la práctica



ACTIVIDAD 1

El siguiente es un fragmento de una puesta en común en una clase de matemáticas donde el docente estaba trabajando cálculo mental con alumnos de primer grado.¹

Maestro: Bien, atentos a lo que les voy a decir, ¿sale? Fíjense bien. ¿Se acuerdan que el otro día platicamos que ustedes jugaron mucho a la oca en el kínder? Aquí también jugamos a la oca el otro día, ¿se acuerdan? (*Trae en sus manos un dado muy grande hecho de cartulina*).

[...]

Muy bien. Fíjense bien. Escúchenme bien atentos para que me puedan contestar, ¿sí? A ver, éste... voy a aventarlo al aire; listos... (*Se refiere al dado, pero no lo lanza*.) Supongamos que estamos jugando oca y estamos en el número dos, y supongamos que yo aviento mi dado y al caer sale este número. (*Se los muestra*).

Niños: (*A coro*) Seis.



Maestro: ¿A qué número voy a llegar?

Niños: (*A coro*) Seis.

¹ Maestro Víctor Manuel Roque Márquez.

Maestro: ¿A qué número voy a llegar?

Niños: (A coro) Seis.

Maestro: ¿Al seis?

Juan: No, al ocho.

Maestro: Al ocho. Juan, ¿por qué dices que al ocho?

(Juan habla con volumen muy bajo, no se escucha).

¿Sí escucharon a Juan?

Niños: (A coro) No.

Maestro: Juan dijo que porque estamos en el dos; ya estamos en el dos y me sale seis, avanzo hasta el ocho. Estamos de acuerdo con él, ¿sí o no?

(Varios dicen que sí, otros que no).

¿No? A ver, a ver, vamos a repetir. Estamos jugando oca y estoy en el número dos. Yo ya estoy en el número dos de la oca, aviento mi dado, y el dado me cae en esta cara. (Vuelve a mostrar el 6).



Max: En el once.

Niños: (Varios, a coro) En el seis.

Maestro: ¿A qué número llego?

(Varios dicen seis, Juan dice ocho y Max dice once).

Max: Al once.

Maestro: Al once. ¿Estamos de acuerdo con Max?, ¿sí o no?

Niños: (A coro) Nooo.

Maestro: ¿Por qué no estás de acuerdo, Judith?

Judith: No.

Sentido numérico

Maestro: Entonces ¿a qué número llegamos, Judith?
(*Judith se queda callada, se oye la voz de un niño que dice seis*).

César, ¿a qué número llegamos?

César: Hasta el diez.

Maestro: Hasta el diez, ¿estamos de acuerdo con César?

Niños: (A coro) Noooo.

Niño 3: Al seis, hasta el seis.



Preguntas para reflexionar

1. ¿Por qué la actividad anterior involucra el cálculo mental?
2. ¿Considera que es adecuada para primer grado?
Argumente su respuesta
3. Si usted fuera el maestro de la clase, ¿cómo continuaría la clase?


ACTIVIDAD 2

El siguiente es un fragmento de una puesta en común en tercer grado de secundaria.²

Maestro: 77 para 100, ¿dime tú cómo le harías?

Alumna 1: Yo le sumaría 3 a 77, que sería lo que le falta para llegar a 80. Y al 80 ya nada más le sumo 20; me quedarían 23.

Maestro: *Ok.* 65 para 100. ¿Cuánto le falta a 65 para 100?

Rodolfo: 45.

Maestro: 45. ¿Cómo lo piensas, Rodolfo?

Alumnos: 35.

Maestro: Ah, 35. ¿Cómo lo piensas, Rodolfo?

Rodolfo: A ese 65 le sumo 5, llega al 70. A 70, con 30 llego a 100.

Maestro: *Ok.* ¿Podríamos hacer un procedimiento que siempre funcionara? Por ejemplo, 31 para 100. Díganme; no quiero el resultado, ¿cuál es el procedimiento?

Alumna 2: A 31 le sumo 9 para llegar a 40 y a 40 le sumo 60 para llegar a 100.

Maestro: Muy bien. Entonces, a 31 le sumas 9 y llegas a 40, y a 40 le faltan 60. Ahora dime entonces el resultado que te dio para 100.

Alumna 2: 69.

Maestro: 69. ¿Éste podría ser un procedimiento que siempre funcione?

Alumnos: Sí.

Maestro: *Ok.* ¿Alguien tiene otro?

Raúl: Restarle.

Maestro: Restarle. A ver, ¿cómo?

Raúl: Primero restarle decenas y luego unidades.

Maestro: Decenas y unidades. Explícamelo, 31 para 100.

Raúl: 31 para 100. A 100 primero le resto 30 y luego 1.

² Maestro Enrique Corona Alarcón.

Maestro: Le restas 30 y después 1. *Ok.* A 100 primero le restas 30, quedan 70, y luego le quitas 1, quedan 69, ¿verdad? Entonces, ¿se dieron cuenta que encontramos cuando menos dos mecanismos que siempre funcionan? ¿Se podrían encontrar más? Es cuestión... de hacerlo directo, hacer la resta.



Preguntas para reflexionar

1. ¿Considera adecuada la actividad anterior para alumnos de tercer grado de secundaria? Argumente su respuesta.
2. ¿Cuántos procedimientos diferentes surgieron en la clase para saber cuánto le falta a un número para llegar a 100? ¿Cuáles son? ¿Alguno es el algoritmo convencional para restar?
3. ¿Cuál cree que era la intención del docente al preguntar sobre un procedimiento que siempre funcionara?
4. ¿Quién dio una respuesta a la pregunta que planteó el maestro? Argumente su respuesta.


ACTIVIDAD 3

Se propuso una actividad parecida a alumnos de quinto grado de primaria; algunos de los procedimientos que surgieron se muestran a continuación:³

Calcula **mentalmente** la cantidad que falta en cada número para llegar a 1000 y describe la estrategia que utilizaste para lograr el resultado.

NÚMERO	FALTANTE PARA EL 1000	DESCRIPCIÓN DE LA ESTRATEGIA UTILIZADA
345	655	Primero puse el 5 que $50+50$ da 400 y le sumo 600 y da 1000.
470	530	Primero a 70 le sumo 30 y da 500 y esos 500 los sumo y da 1000.
507	493	Primero sumo $7+93$ da 500 y los 500 los sumo y da 1000.
656	344	A 56 le sumo 44 y da 700 y esos 700 los sumo y da 1000.
880	120	A 80 le sumo 10 y da 100 y a 900 le sumo 100 y da 1000.

Mtra. Gerardo Ramos Martínez

³ Maestro Gerardo Ramos Martínez.

Sentido numérico

Calcula mentalmente la cantidad que falta en cada número para llegar a 1000 y describe la estrategia que utilizaste para lograr el resultado.

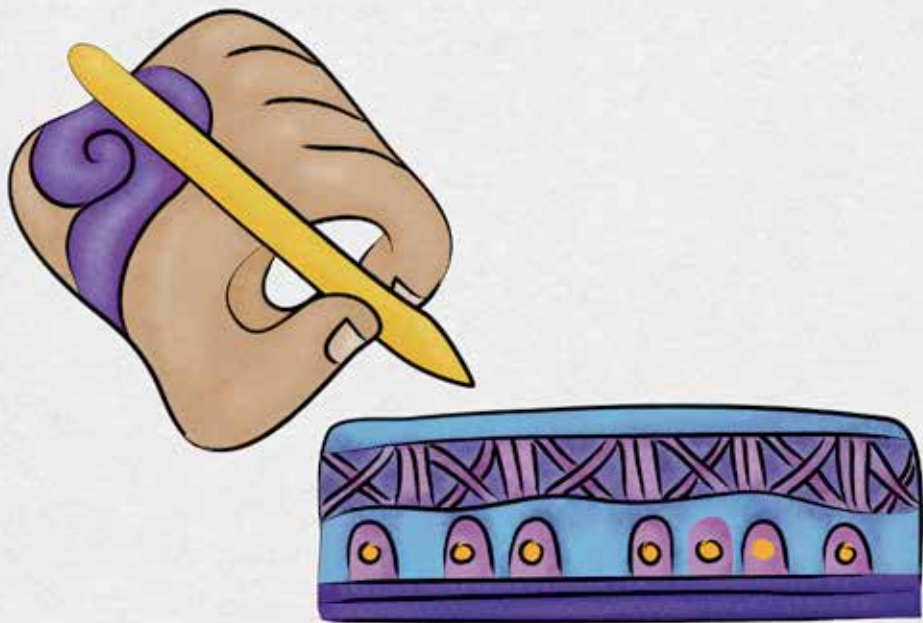
NÚMERO	FALTANTE PARA EL 1000	DESCRIPCIÓN DE LA ESTRATEGIA UTILIZADA
345	655	Simplemente veo unidades y decenas y veo cuánto falta para llegar a 100 y luego a 1000.
470	530	Simplemente veo unidades y decenas y cuánto falta para llegar a 100 y luego a 1000.
507	493	Simplemente veo unidades y decenas y veo cuánto falta para llegar a 100 y a 1000.
656	344	Simplemente veo unidades y decenas y cuánto falta para llegar a 100 y a 1000.
880	120	Simplemente veo unidades y decenas y cuánto falta para llegar a 100 y a 1000.

Mrs. Graciela Rosmi Hernández



Preguntas para reflexionar

1. ¿En qué se parecen las estrategias de estos dos alumnos?
¿En qué son diferentes?
2. Explique con sus propias palabras la estrategia que utilizó el segundo alumno.





5



Cálculo escrito

El cálculo escrito es quizás el contenido que mayor tradición tiene dentro de la enseñanza de las matemáticas. Resolver “cuentas” con enteros, decimales o fracciones es una actividad que la mayoría de los maestros trabaja de manera frecuente.

Es importante que los alumnos construyan la idea de que hay diferentes maneras de resolver una operación y no sobreestimen el valor de los algoritmos convencionales. Esto se logra cuando ellos se dan cuenta de que, como ya se mencionó, muchas veces llegan al mismo resultado por caminos más eficientes que el algoritmo convencional.

Por otro lado, comprender cada uno de los pasos de los algoritmos convencionales no siempre resulta sencillo para los alumnos. El principal problema de los algoritmos convencionales no es que se aprendan mecánicamente, sin comprender lo que subyace, pues en realidad ésta es la gran ventaja de un buen algoritmo, como de cualquier técnica: facilitarle a la gente el trabajo sin que tenga necesariamente que entender el funcionamiento que lo permite (como una calculadora). No obstante, en aras de la formación matemática que se quiere dar en la escuela se aspira a que los alumnos vayan más allá de saber usar los algoritmos. Por ello a veces, cuando es posible, se propicia que entiendan el algoritmo, o también se valoran procedimientos que, aunque no sean los convencionales, son más fáciles de comprender.

Entonces,

1. No está mal, en sí, que se aprenda a usar un algoritmo “sin comprender su funcionamiento”; lo que está mal es reducir la enseñanza de una operación sólo a eso.
2. Hay algoritmos que los alumnos pueden reconstruir y que resulta formativo que lo hagan. En esos casos conviene propiciarlo (como el de la suma).

Sentido numérico

3. Hay algoritmos relativamente fáciles de usar, pero difíciles de comprender o de reconstruir. En ese caso no vale la pena invertir tiempo tratando de que los comprendan. Se puede dejar que los estudien “mecánicamente”, pero que no sea el único procedimiento del que disponen.

Analicemos cómo se resuelve, mediante el algoritmo convencional, la multiplicación 76×32 .

$$\begin{array}{r}
 76 \\
 \times 32 \\
 \hline
 152 \\
 228 \\
 \hline
 2432
 \end{array}$$

Tabla 1

Lo que se hace	Lo que es
Se multiplica 2×6 y se obtiene 12, el alumno sabe que pone el 2 y lleva “1”	Realmente es una decena la que se lleva y no 1
Se multiplica 2×7	En realidad se multiplica 2×70
Y se obtiene 14	Son 14 decenas, es decir, 140
Al 14 se le suma el 1 que llevan	A las 14 decenas se le suma la decena que llevan
Y el resultado es 15	Son 15 decenas: 150
Se pone el 15 a la izquierda del 2	El 15 se pone a la izquierda del 2 porque debe quedar abarcado el lugar de las decenas y las centenas
Se multiplica 3×6	En realidad se multiplica 30×6
Da 18	Son 180
Se pone el 8 y se lleva “1”	Se pone 80 (por eso se deja un lugar vacío a la derecha) y se lleva 1 centena, es decir, 100
Se multiplica 3×7	Se multiplica 30×70
El resultado es 21	El resultado es 2100
Y se agrega el 1 que llevamos	A los 2100 se le agrega la centena que se lleva
El resultado es 22, se escribe	El resultado es 2200, por eso el 22 queda abarcando el lugar de las centenas y los millares
Finalmente se suman los dos productos parciales	

Los algoritmos convencionales de las operaciones aritméticas son herramientas muy poderosas porque funcionan siempre, no importa los números que estén involucrados, y por ello deben ser estudiados, comprendidos y aprendidos por los alumnos. No obstante, como se vio en el ejemplo anterior, no son transparentes, es decir, los pasos “ocultan” los hechos numéricos que realmente están involucrados. En dicho ejemplo se observa una fragmentación de los números, ya que la multiplicación de dos números de dos cifras en realidad se vuelve una multiplicación de cuatro números de una cifra. ¿Por qué? ¿Los alumnos entienden qué es lo que se hace?

El cálculo escrito no es sinónimo de algoritmos convencionales para resolver las operaciones básicas. Es decir, estos algoritmos forman parte del cálculo escrito, pero no todo el cálculo escrito los involucra a ellos, ya que existen otros algoritmos escritos. A continuación se presentan, a manera de ejemplos, algoritmos escritos que son diferentes al algoritmo convencional para resolver las operaciones básicas con números naturales.¹

Adición

Para sumar $915 + 318$ con el algoritmo tradicional se tiene:

$$\begin{array}{r} 915 \\ + 318 \\ \hline 1233 \end{array}$$

Para esta misma suma se pueden emplear otros algoritmos escritos, diferentes al anterior. Por ejemplo:

$$\begin{array}{r} 915 \\ + 318 \\ \hline 1200 \\ \quad 20 \\ \quad \quad 13 \\ \hline 1233 \end{array}$$

¹ Varios de los algoritmos que aquí se presentan se obtuvieron de Martínez (2000).

Sentido numérico

En este algoritmo se suman $900 + 300$ y se anota 1 200; luego se suman $10 + 10$ y se anota 20; finalmente se suman $5 + 8$ y se anota 13. Se colocan los resultados de tal manera que unidades queden debajo de unidades, decenas debajo de decenas, centenas con centenas, y se obtiene el resultado total sumando los tres resultados parciales. Note que este algoritmo es más transparente que el algoritmo convencional.

El siguiente también es un algoritmo más transparente o intuitivo.

$$\begin{array}{r|l} & 915 \\ \hline \text{Más } 300 & 1215 \\ \text{Más } 10 & 1225 \\ \text{Más } 8 & 1233 \end{array}$$

Se descompone el sumando 318 en $300 + 10 + 8$ y se suman uno cada vez al 915.

Estos algoritmos también se pueden emplear con los números decimales. Por ejemplo, para sumar $0.25 + 0.18$:

$$\begin{array}{r|l} & 0.25 \\ \hline \text{Más } 0.1 & 0.35 \\ \text{Más } 0.08 & 0.43 \end{array}$$

Sustracción

Para restar $517 - 279$ con uno de los algoritmos convencionales se tiene:

$$\begin{array}{r} 517 \\ - 279 \\ \hline 238 \end{array}$$

Podemos proceder con los siguientes algoritmos escritos:

	5 1 7
Menos 200	3 1 7
Menos 70	2 4 7
Menos 9	2 3 8

Este algoritmo es similar a uno de los presentados con la suma. El sustraendo 279 se descompone en $200 + 70 + 9$ y se van restando por separado al 517.

Otro algoritmo, útil para convertir una sustracción con transformaciones (reagrupaciones) a otra que no tenga transformaciones y sea más fácil de resolver, es el siguiente:

**Se suma 21 a los dos números
y se obtiene una nueva sustracción**

$$\begin{array}{r} 538 \\ - 300 \\ \hline 238 \end{array}$$

Sentido numérico

Este algoritmo hace uso de una propiedad de la sustracción que ya se mencionó anteriormente: si a minuendo y sustraendo se le suma el mismo número, la diferencia no se altera. Se decide sumar 21 para obtener un número con ceros en el sustraendo: $279 + 21 = 300$. Pero si se suma 21 al sustraendo, para que el resultado no se altere, se debe hacer lo mismo con el minuendo: $517 + 21 = 538$. La resta $538 - 300$ es más sencilla de resolver que $517 - 279$, y en ambas se obtiene el mismo resultado.

Para la resta $0.532 - 0.175$ se puede usar alguno de los algoritmos anteriores:

$$\begin{array}{r} \phantom{\text{Menos}} 0.532 \\ \text{Menos } 0.1 \\ \text{Menos } 0.07 \\ \text{Menos } 0.005 \\ \hline 0.432 \\ 0.362 \\ 0.357 \end{array}$$

Multiplicación

Para multiplicar 56×18 con el algoritmo tradicional se procede de la siguiente manera:

$$\begin{array}{r} 56 \\ \times 18 \\ \hline 448 \\ 56 \\ \hline 1008 \end{array}$$

La misma multiplicación se puede resolver con otros algoritmos escritos, por ejemplo:

x	50	6	Total
10	500	60	560
8	400	48	448
			1008

Se colocan los factores escritos en notación desarrollada en un cuadro de doble entrada y se resuelven las multiplicaciones por separado. Después se suman los resultados obtenidos. Compare este algoritmo con el convencional y note que podría trabajarse antes y preparar al alumno para comprender los “pasos ocultos” que presenta.

Un ejemplo con decimales (0.52×0.17) es el siguiente:

x	0.5	0.02	Total
0.1	0.05	0.002	0.052
0.07	0.035	0.0014	0.0364
			0.0884

Otra manera de hacer multiplicaciones proviene de la forma en que las resolvían los egipcios; esto es, obteniendo sucesivamente el doble de uno de los factores y después sumando los que sean convenientes. En la multiplicación 56×18 se requiere sumar 18 veces el 56; con esto en mente se calculan los dobles necesarios:

1 vez	56
2 veces	112
4 veces	224
8 veces	448
16 veces	896

18 veces es igual a 16 veces más 2 veces, entonces el producto buscado es:

18 veces 56

Sentido numérico

Que se obtiene sumando 16 veces 56 más 2 veces 56:

$$896 + 112 = 1008$$

División

Para dividir 345 entre 9 con el algoritmo convencional se procede de la siguiente manera:

$$\begin{array}{r} 38 \\ 9 \overline{) 345} \\ \underline{75} \\ 3 \end{array}$$

Otra manera de resolver esta división es con el algoritmo denominado por cocientes parciales (Balbuena, Block, Dávila, Schulmaister, García y Moreno, 1995). En este algoritmo se ponen cantidades en el cociente y se multiplican por el divisor. Las cantidades son arbitrarias, cuidando siempre de elegir números que al multiplicarse por el divisor sean menores que el dividendo.

Por ejemplo, supongamos que la división se refiere al problema de repartir 345 pesos entre nueve personas, primero se le dan 20 pesos a cada una y con ello ya se repartieron 180 pesos; quedan 165 pesos por repartir.

$$\begin{array}{r} 20 \\ 9 \overline{) 345} \\ \underline{180} \\ 165 \end{array}$$

Después se dan 10 pesos a cada persona; esto hace que se repartan 90 pesos y queden pendientes 75 pesos; a cada persona se le han dado en total 30 pesos. En la operación esto quedaría indicado así:

$$\begin{array}{r}
 20+10 \\
 9 \overline{) 345} \\
 \underline{180} \\
 165 \\
 \underline{90} \\
 75
 \end{array}$$

Finalmente, se dan ocho pesos a cada persona, repartiendo con esta acción 72 pesos, y sobran tres pesos.

$$\begin{array}{r}
 20+10+8 \\
 9 \overline{) 345} \\
 \underline{180} \\
 165 \\
 \underline{90} \\
 75 \\
 \underline{72} \\
 3
 \end{array}$$

El resultado se obtiene sumando lo que se repartió cada vez: $20 + 10 + 8 = 38$.

Sentido numérico

La división anterior también se puede realizar en una tabla:

Repartir	Entre	Se puede dar a cada uno	Se reparten en total	Quedan
345	9	20	180	165
165	9	10	90	75
75	9	8	72	3

El resultado se obtiene sumando la tercera columna: $20 + 10 + 8 = 38$.

La práctica lleva a los alumnos a abreviar cada vez más los repartos, de tal manera que terminen más rápido la división; por ejemplo:

Repartir	Entre	Se puede dar a cada uno	Se reparten en total	Quedan
345	9	30	270	75
75	9	8	72	3

Con los ejemplos anteriores se desea demostrar que los algoritmos escritos no son únicos, pues existen muchas maneras de resolver las operaciones.


ACTIVIDADES
 para el maestro

1

Resuelva las siguientes operaciones por escrito usando un algoritmo diferente al convencional. Puede usar alguno de los algoritmos que se han trabajado en este apartado u otro que usted conozca.

- a) $456 + 718$ b) $678 - 123$ c) 65×39 d) $786 \div 7$

2

Resuelva las siguientes operaciones con decimales usando los algoritmos convencionales:

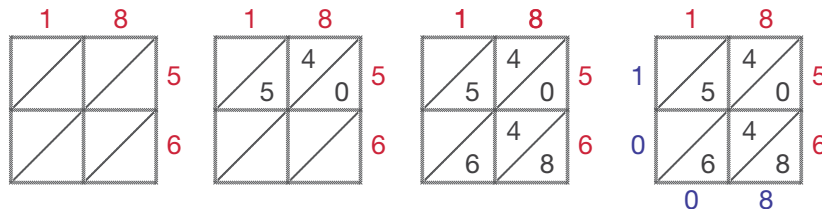
- a) $3.45 + 2.8$ b) $5.6 - 2.31$ c) 4.5×0.25 d) $3.75 \div 0.2$

3

Para cada una de las operaciones anteriores intente encontrar otro procedimiento escrito diferente al convencional.

4

Los siguientes esquemas muestran los pasos para multiplicar 18×56 por celosía (Balbuena *et al.*, 1995).



- a) Analice esta manera de multiplicar. ¿Dónde se colocan los factores?, ¿cómo se colocan los factores?, ¿cómo se obtienen los números en negro? Los números en azul forman el resultado (1008), ¿cómo se obtiene?
- b) Proponga una multiplicación de dos factores con dos o tres cifras cada uno y resuélvala por celosía.

5

Los algoritmos convencionales para resolver una división de fracciones son:

- a) Multiplicar en cruz: $\frac{3}{4} \div \frac{1}{2} = \frac{3 \times 2}{4 \times 1} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$
- b) Multiplicar por el recíproco: $\frac{3}{4} \div \frac{1}{2} = \frac{3}{4} \times \frac{2}{1} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$

Resuelva la siguiente división usando los dos algoritmos anteriores:

$$\frac{6}{8} \div \frac{3}{2}$$

6

Otra manera de dividir fracciones es dividiendo numerador entre numerador y denominador entre denominador:

a) $\frac{3}{4} \div \frac{1}{2} = \frac{3 \div 1}{4 \div 2} = \frac{3}{2}$

Resuelva la división del ejercicio 5 aplicando este algoritmo. ¿Llegó al mismo resultado?

7

Emplee el algoritmo del ejercicio anterior para resolver: $\frac{7}{8} \div \frac{3}{4}$

- a) ¿Qué observa?
- b) ¿Por qué sucedió esto?
- c) ¿Qué podría hacer para poder resolver esta división con el algoritmo del ejercicio 6?

8

Califique las siguientes restas realizadas por un alumno de tercero de primaria:

$$\begin{array}{r} 475 \\ - 296 \\ \hline 221 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 710 \\ - 493 \\ \hline 383 \end{array}$$

- ¿Qué error comete el alumno?
- ¿Cuál cree que sea el motivo por el que este alumno comete ese error?
- ¿Cómo podría apoyarlo para que resuelva correctamente las sustracciones?



REFLEXIÓN sobre la práctica



ACTIVIDAD 1

En un grupo multigrado (con tercero y cuarto grados de primaria) el maestro da a los niños la siguiente explicación para sumar $\frac{1}{2} + \frac{1}{4}$ (Ávila, 2010).

Maestro: Miren, yo quiero convertir este dos en cuatro, ¿sí? Entonces, me imagino por acá; yo quiero poner un dos por aquí (*escribe un dos pequeño a la izquierda de $\frac{1}{2}$*), que va a multiplicar a este número y a este otro. (*Señala el numerador y denominador de $\frac{1}{2}$*). [...]

Sentido numérico

$$2 \begin{cases} \nearrow \\ \searrow \end{cases} \frac{1}{2} + \frac{1}{4} =$$

Voy a bajar aquí el dos, voy a cambiar este número de acá, pero con esa... con esa diferencia, y luego dos por dos. Y ya convertí este dos en cuatro, ¿sí o no?

$$2 \begin{cases} \nearrow \\ \searrow \end{cases} \frac{1}{2} + \frac{2}{4}$$

Y a mí me enseñaron, cuando estaba como ustedes, en este grado, ¿verdad? Me dijeron que este número (*señala el cuatro del primer sumando*) le daba una patadita a este número. (*Señala el cuatro del segundo sumando*). Lógico, al sentir la patada, brinca hasta acá (*anota el cuatro del resultado*), nada más se recorre, ¿sí? Sale.

$$\frac{2}{4} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$



Preguntas para reflexionar

1. ¿Qué opina de la explicación que da el maestro?
2. ¿Considera que fue significativa esta explicación para los alumnos? Argumente su respuesta.
3. Cuando ha tenido que enseñar la suma de dos fracciones con diferente denominador, ¿cómo lo ha hecho?, ¿por qué lo ha hecho así? Con lo que ahora sabe, ¿considera que debe hacer cambios o no? Argumente su respuesta a esta última pregunta.



ACTIVIDAD 2

A un grupo de primaria se le propuso resolver el siguiente ejercicio:²

Completa la operación:

$$\begin{array}{r}
 876 \square \\
 - \square \square \square 7 \\
 \hline
 1943
 \end{array}$$

² Maestro Luis Guadalupe Fuentes Orozco.

Sentido numérico

Un alumno hizo lo siguiente:

$$\begin{array}{r} 8764 \\ - 71627 \\ \hline 1943 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 8764 \\ - 71627 \\ \hline 1943 \end{array}$$



Preguntas para reflexionar

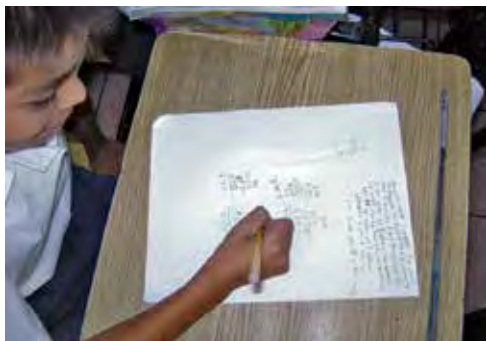
1. ¿Qué error cometió el alumno en el lugar de las unidades y en el de las centenas?
2. ¿Por qué cree que cometió ese error?
3. ¿Cómo apoyaría al alumno para que no cometiera ese tipo de errores?
4. ¿Considera que este alumno tiene desarrollado su sentido numérico? Argumente su respuesta.
5. ¿Por qué cree que, a pesar de que copió la operación del lado derecho, el alumno no se dio cuenta de su error?
6. En ese mismo grupo, otro alumno hizo lo siguiente:

$$\begin{array}{r} \overset{7}{8} \overset{1}{7} \overset{5}{6} \overset{1}{0} \\ - \boxed{6} \boxed{8} \boxed{1} 7 \\ \hline 1943 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 01 \\ 10 \\ - 7 \\ \hline 03 \end{array}$$

Escriba una posible estrategia que pudo haber seguido este alumno para llegar al resultado correcto.


ACTIVIDAD 3

En un grupo de quinto grado de primaria se le pidió a los alumnos que resolvieran la operación 231×25 con un procedimiento diferente al que sabían hacer (el maestro se refería al procedimiento convencional). Un alumno hizo lo siguiente:³



$\begin{array}{r} 231 \\ \times 25 \\ \hline 5000 \\ 450 \\ 25 \\ \hline 5775 \end{array}$	$\begin{array}{r} 200 \\ \times 25 \\ \hline 1000 \\ 4000 \\ \hline 5000 \end{array}$
$\begin{array}{r} 30 \\ \times 25 \\ \hline 750 \\ 600 \\ \hline 750 \end{array}$	$\begin{array}{r} 20 \\ \times 25 \\ \hline 100 \\ 400 \\ \hline 500 \end{array}$

³ Maestro Luis Guadalupe Fuentes Orozco.



Preguntas para reflexionar

1. ¿Cuál es el resultado de la multiplicación 231×25 ?
2. Explique qué es lo que hizo el alumno.
3. ¿Qué conocimientos puso en juego el alumno en su procedimiento?
4. Resuelva la misma multiplicación usando un procedimiento diferente al convencional y al del alumno.
5. Resuelva, con el procedimiento del alumno, la multiplicación 452×18 .



ACTIVIDAD 4

Un alumno al que se le pidió pasar al pizarrón para calcular 50% de 390 hizo lo siguiente:

$$100 \overline{) 390} \begin{array}{r} 3.9 \\ 900 \\ 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 39 \\ \times 50 \\ \hline 00 \\ 95 \\ \hline 950 \end{array}$$

Y obtuvo 950 como resultado.



Preguntas para reflexionar

1. ¿Este alumno tiene desarrollado su sentido numérico?
Argumente su respuesta.
2. ¿Qué error cometió el alumno?
3. ¿De qué habría servido que el maestro pidiera al alumno una estimación del resultado?
4. ¿Qué opina de la manera en que este alumno divide entre 100 y multiplica por 50?
5. ¿Es indispensable hacer la división entre 100 por escrito? ¿Qué haría para ayudar a este alumno a calcular de manera más eficiente divisiones entre 100?
6. En una multiplicación como la que hizo el alumno ¿es indispensable multiplicar por cero? ¿Qué haría para apoyar a este alumno para que resolviera con mayor eficiencia multiplicaciones por números que son decenas cerradas, como 10, 20, 30...?
7. ¿De qué otra manera se puede calcular 50% de una cantidad?





6



Uso de la calculadora

En nuestra sociedad la calculadora se ha convertido en una herramienta de uso cotidiano. Las personas la utilizan para hacer distintos cálculos en situaciones diversas.

Los siguientes datos registran la población de cada continente en 2008:

Año 2008	
Continente	Población
África	972 752 377
Asia	4 053 868 076
Europa	731 682 934
América	916 454 284
Oceanía	34 375 093

Para ese año el porcentaje de crecimiento anual medio era de 1.29%. ¿A cuántos habitantes del mundo corresponde este porcentaje en dicho año?

Lo más probable es que para dar respuesta a la pregunta planteada usted haya considerado apoyarse en una calculadora; esto es porque las cantidades involucradas llegan al orden de los miles de millones (en el caso de Asia) y el porcentaje que se debe calcular implica multiplicar por 0.0129.

Sentido numérico

La calculadora debe estar presente en el aula para:¹

- ♦ Facilitar la resolución de problemas.
- ♦ Apoyar el desarrollo conceptual.
- ♦ Permitir que la clase de matemáticas se centre en el significado y la comprensión.
- ♦ Reemplazar cálculos tediosos y repetitivos.
- ♦ Promover el sentido numérico.
- ♦ Facilitar patrones de exploración e investigación.
- ♦ Estimular la creatividad y la exploración.
- ♦ Eliminar la ansiedad creada por las exigencias del cálculo.
- ♦ Elevar la motivación y la confianza.

Existen al menos tres maneras de usar la calculadora en las clases de matemáticas.

Como instrumento de verificación

En este caso se utiliza la calculadora para comprobar si los resultados obtenidos al estimar o resolver operaciones o problemas son correctos. En este sentido, la calculadora es un instrumento de validación o verificación. Una actividad interesante en la que se le ha dado este uso a la calculadora es la que presentan Espinosa, García y García (1995).

Un alumno le propone a otro una multiplicación de dos números de dos cifras; por ejemplo:



¹ Los siguientes puntos se formulan a partir de Ralston *et al.* Citado por Martínez (2000).

El otro tiene que estimar rápidamente el resultado.



Con la calculadora, ambos resuelven 34×18 y obtendrán 612. La diferencia entre la estimación y el resultado exacto se toma como puntos a favor de quien propuso la multiplicación.

Después se intercambian los papeles y se repite la secuencia anterior varias veces. Quien obtenga más puntos gana el juego.

Obsérvese que en esta actividad se desarrolla la estimación de resultados y la calculadora se usa para verificar si la estimación es buena o no.

Como herramienta para hacer el trabajo mecánico

Dado que la calculadora no “piensa” cómo se relacionan los datos de un problema, otro uso que se le da es para que los estudiantes la utilicen para resolver problemas; es decir, mientras la calculadora hace el trabajo mecánico de resolver la operación el alumno se puede concentrar en determinar la operación que debe hacer. Tal es el caso del problema sobre la población mundial con el que abrió este capítulo.

Como recurso didáctico para explorar relaciones entre los números

Existen situaciones de aprendizaje en las que el propósito es aprovechar la rapidez con que la calculadora resuelve las operaciones para explorar patrones y poder generalizar algunas relaciones y hechos numéricos.

Sentido numérico

Se puede proponer a los alumnos que resuelvan multiplicaciones que involucran números con ceros multiplicados por números de una cifra y que los resuelvan usando la calculadora; por ejemplo:

$$30 \times 4 = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$50 \times 7 = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$80 \times 9 = \underline{\hspace{2cm}}$$

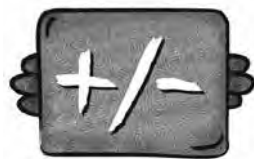
$$200 \times 6 = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$900 \times 4 = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$700 \times 7 = \underline{\hspace{2cm}}$$

Después se pide a los alumnos que analicen los resultados y piensen cómo obtener mentalmente el resultado de este tipo de multiplicaciones.

En secundaria, antes de que los alumnos estudien la multiplicación con números negativos, se les puede enseñar cómo usar la tecla de cambio de signo:



Y proponerles multiplicaciones que involucren números negativos y positivos con el propósito de que descubran las leyes de los signos.

Si bien el uso de la calculadora en la escuela puede ser polémico, nadie duda que, ante un problema matemático, la calculadora no hace el trabajo intelectual de la resolución del problema; lo que hace es apoyar con el trabajo mecánico de realizar las operaciones. Si durante una clase el profesor desea trabajar la resolución de problemas, el uso de la calculadora ahorrará tiempo y le permitirá que los estudiantes centren su

atención en la relación entre los datos del problema. Por otro lado, si lo que el maestro desea es trabajar el cálculo mental, la estimación o los algoritmos escritos de las operaciones, entonces tendrá que indicar a sus alumnos que en esa clase no se permitirá el uso de la calculadora, o quizás la utilicen como un medio de comprobación. Y, como ya se vio anteriormente, también hay actividades con la calculadora que permiten que los alumnos construyan conocimiento matemático.

Se ha demostrado que el uso de la calculadora mejora la actitud que los alumnos tienen hacia las matemáticas, sus destrezas de cálculo y su habilidad de resolver problemas; asimismo, les apoya para comprender mejor los conceptos (Alvarez, 2004).



ACTIVIDADES para el maestro

1

Resuelva mentalmente las siguientes operaciones y luego verifique sus resultados con la calculadora:

a) 45×25

c) $450 \div 8$

e) $678 + 568$

g) $879 - 203$

b) 1.5×4

d) $56.85 - 18.5$

f) $4 \div 0.1$

h) $2.45 + 39.15$

2

Resuelva en la calculadora 89×18 sin usar la tecla del 8.
Y la multiplicación 2.5×13 sin usar la tecla del punto.

3

Con una calculadora sencilla, encuentre el cociente entero y el residuo de $457 \div 7$.

4

Teclee en su calculadora el número 345 676; con una operación haga que el 4 que aparece “se convierta” en 0, es decir, después de hacer la operación que aparezca el número 305 676.

5

Teclee en su calculadora 0.14567; con una operación haga:

- Que el 6 “se convierta” en 7, es decir, después de hacer la operación que aparezca el número 0.14577.
- Que aparezca 145.67 en lugar de 0.14567.
- Que aparezca 0.0014568 en lugar de 0.14567.

6

Teclee en su calculadora los números del 1 al 8 en desorden; por ejemplo, 56 834 217. Ahora con una operación vaya “convirtiendo” los números en 0, empiece por el 1, luego el 2, luego el 3, etcétera.

Para el número anterior, en el primer paso deberá aparecer en la pantalla de la calculadora el número 56 734 207.

7

Diseñe una actividad usando la calculadora para que alumnos de secundaria encuentren la regla para dividir mentalmente cualquier número entre 10, 100 o 1 000.



REFLEXIÓN sobre la práctica



ACTIVIDAD 1

A continuación, una maestra de primer grado de primaria nos relata la experiencia que tuvo con su grupo.²

Hoy estamos haciendo cálculo mental de 10 en 10. Cada uno escribe en su calculadora $10 + 10 = 20$, y a partir de ahí sólo toca la tecla = y la calculadora va añadiendo 10 al resultado de la pantalla.

Antes de apretar la tecla el alumno o alumna debe hacer un cálculo estimado de cuál será el resultado.

Un alumno y una alumna trabajan en pareja. Llegaron hasta el 100 sin problema.

Maestra: ¿ $100 + 10$?

No dan ninguna respuesta. Pulsamos el igual. Sale 110.

¿Saben qué número es éste?

Alumna y alumno: No.

² El texto ha sido adaptado de Álvarez, 2004. Se cambiaron las palabras “sabéis” y “encerado” por “saben” y “pizarra”, respectivamente.

Sentido numérico

Maestra: Es el 110. ¿ $110 + 10$?

Siguen sin dar respuesta. Pulsamos el igual. Sale el 120.

Maestra: ¿Saben qué número es ése?

Alumna y alumno: No.

Maestra: Es el 120. ¿ $120 + 10$?

Alumno: 130.

Maestra: ¿Tú qué opinas? (*Pregunta a la alumna.*)

Alumna: Que sí.

Pulsamos ahora y comprobamos que sale 130.

Alumno: Ahora 140.

Maestra: Dale al igual y compruébalo.

Alumnos: Sí.

Maestra: ¿Y cuál vendrá ahora? (*Pregunta a la alumna.*)

Siguieron solos hasta el 190 sin problema. Yo les dije el 200 y siguieron hasta el 290. Yo les dije el 300. Volvimos a comenzar y lo hicieron solos. El que cambiaba la centena era él, a veces con ayuda. Pasamos a hacerlo de 100 en 100, ella empezó a contar sola.

Alumna: 100, 200, 300.

Contaron entre los dos y yo les dije el 1 000. Los dejé solos. En unos minutos vino él a decir que se había dado cuenta de algo.

Alumno: El 10 tiene un cero, el 100 tiene dos ceros y el 1 000 tiene tres ceros.

Maestra: Escríbelo en el pizarrón.

Lo escribió en una línea horizontal. Yo le escribí el 20 debajo del 10.

Maestra: ¿Cómo se escribiría entonces el 200?

Lo escribió sin problema.

Maestra: ¿Y el 2 000?

Lo escribió sin problema. Pedimos que todos atendieran y él explicó al grupo lo que había observado.



Preguntas para reflexionar

1. ¿Qué opina de lo que sucedió en el fragmento de la clase anterior?
2. ¿Qué uso de la calculadora de los mencionados anteriormente está presente en el fragmento anterior?
3. La clase continúa y se trabaja con 1000, 2000, 3000... ¿Qué opina de que, aun cuando los números de más tres cifras no se estudian en primero, la maestra lo hizo?



ACTIVIDAD 2

El siguiente es un fragmento de una clase de primero de telesecundaria en la que el uso de la calculadora también está presente.

Maestra: ¿Quiénes traen calculadora?

(La mayoría de los niños levantan la mano.)

Les voy a pedir que me ayuden a hacer unas divisiones. Yo las escribo en el pizarrón, ustedes hacen la división en la calculadora y me dictan el resultado. ¿Va?

5 318 entre 100; en la calculadora y yo anoto en el pizarrón.

(Escribe la división en el pizarrón.)

$$5\ 318 \div 100 =$$

Niños: 53 punto 18. *(Lo han dicho a coro, la maestra escribe el resultado.)*

$$5\ 318 \div 100 = 53.18$$

Maestra: Va, otra: 73 119 entre 100. *(Lo escribe en el pizarrón.)*

Niños: 731 punto 19. *(A coro, la maestra lo escribe repitiéndolo en voz alta.)*
(De la misma manera continúa con otros tres números más. Luego les dice:)

Maestra: Oigan, vean este número *(señala el dividendo de la primera división)* y vean el resultado. *(Lo señala.)* ¿Se parecen?

Niños: Sí.

Maestra: ¿En qué? Jonathan, ¿en qué se parecen?

Jonathan: En lo que empieza.

Maestra: En lo que empiezan, ¿verdad? ¿Sí?

Fer: Llevan un punto.

Maestra: Llevan un punto, ¿dónde?

Fer: Al final.

Maestra: A ver, quién de ustedes, viendo cómo están los resultados y cómo se parecen a este número *(señala el dividendo)* pero con un punto, ¿quién de ustedes me puede decir sin calculadora, mentalmente, el resultado de 17 315 entre 100? Vean cómo salieron los resultados y ya no necesitan la calculadora ni hacer la división y me pueden decir el resultado.

Varios niños: 173 punto 15.

Maestra: ¿Cómo lo supieron? A ver, Beto.

Beto: Dejé el 15 después del punto.

Fer: Dos lugares después del punto.



Preguntas para reflexionar

1. ¿Qué opina de lo que sucedió en el fragmento de la clase anterior?
2. ¿Qué uso de la calculadora de los mencionados anteriormente está presente en el fragmento anterior?
3. ¿Cómo seguiría la clase y cómo la terminaría?


ACTIVIDAD 3

En un estudio realizado con alumnos de los tres grados de secundaria (Guzmán, Kieran y Squalli, 2003) se les propuso un juego llamado “Los cinco pasos a cero”. La consigna fue:

Toma cualquier número entre 1 y 999 y trata de llevarlo a 0 en cinco pasos o menos. Usa sólo los números del 1 al 9 y las cuatro operaciones básicas: +, -, x, ÷, para hacer transformaciones. Puedes usar el mismo número más de una vez.

Las operaciones se hacían en una calculadora de las llamadas multilínea.³ Esta actividad podría hacerse con una calculadora sencilla, siempre y cuando se vayan anotando las operaciones y los resultados.

Por ejemplo, para 875 se puede llegar en cuatro pasos al 0:

$875 \div 5$	175
$175 \div 5$	35
$35 \div 7$	5
$5 - 5$	0

³ Estas calculadoras, en lugar de tener una pantalla donde cabe una operación en una línea, tienen una pantalla grande y en ellas es posible ver al mismo tiempo varias operaciones realizadas en diferentes líneas o renglones.

Sentido numérico

Mientras que para 153 se puede llegar en tres pasos:

$153 \div 9$	17
$17 - 9$	8
$8 - 8$	0

Una variante que le imprime mayor interés al juego es que los alumnos traten de llegar al 0 en el menor número de pasos.

Dos de las estrategias que los investigadores reportan que fueron encontradas por los alumnos son:

- ♦ Aumentar o disminuir el número dado para que éste termine en 0 o en 5, y después dividir entre 5.
- ♦ Aumentar o disminuir el número dado para obtener otro que sea divisible entre 9, y en seguida dividir entre 9.

A continuación se muestran algunos ejercicios resueltos por los alumnos (Guzmán Kieran y Squalli, 2003):

Dunia	
741	
$741 + 9$	750
$750 \div 5$	150
$150 \div 5$	30
$30 \div 5$	6
$6 - 6$	0

Erika	
757	
$757 - 7$	750
$750 \div 5$	150
$150 \div 5$	30
$30 \div 5$	6
$6 - 6$	0

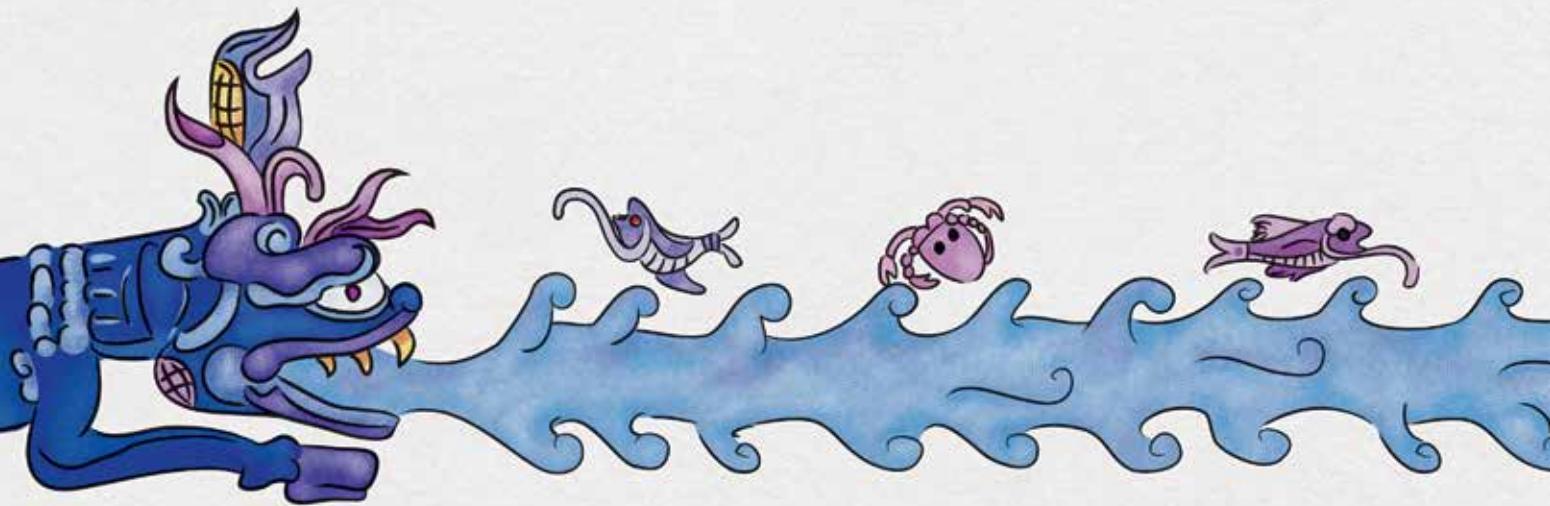
Ashyadeth	
971	
$971 + 4$	975
$975 \div 5$	195
$195 \div 5$	39
$39 \div 3$	13
$13 - 4$	9
$9 - 9$	0

Mariana V		Mariana P		Marisol	
891		823		683	
$891 + 9$	900	$823 - 4$	819	$683 - 3$	680
$900 \div 9$	100	$819 \div 9$	91	$680 \div 8$	85
$100 \div 5$	20	$91 \div 7$	13	$85 \div 5$	17
$20 \div 5$	4	$13 - 9$	4	$17 + 3$	20
$4 - 4$	0	$4 - 4$	0	$20 \div 5$	4
				$4 - 4$	0



Preguntas para reflexionar

1. ¿Qué pasos haría para llevar 151 a 0?
2. ¿Qué alumno no resolvió la actividad respetando las condiciones dadas?
¿Qué condición no cumplió?
3. ¿Podría resolver alguno de los ejercicios en un número menor de pasos de los que se presentan? ¿Con qué número? ¿Qué pasos seguiría?
4. Identifique cuál de las estrategias mencionadas anteriormente siguió cada alumno.

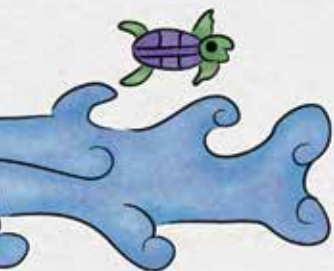




7



**Activar el sentido
numérico de los alumnos**



En este capítulo se muestran tareas matemáticas que puede proponer a sus alumnos para desarrollar su sentido numérico. Estas actividades promueven uno o más de los cuatro aspectos mencionados: estimación, cálculo mental, cálculo escrito, uso de la calculadora. Es importante aclarar que no constituyen una secuencia didáctica que haya que trabajar en un orden determinado. Todos los ejercicios que se presentan son ejemplos de lo que se puede trabajar con los alumnos, pero el maestro tendrá que hacerles las adecuaciones necesarias para el grado y nivel en el que trabaja, así como decidir el momento en que puede plantearlos de acuerdo a la secuencia didáctica que esté trabajando.

En el CD que acompaña este ejemplar encontrará materiales que puede imprimir para trabajar estas actividades, y si desea puede modificarlas para adaptarlas al grado y nivel que atiende, también podrá acceder al archivo electrónico en la página www.inee.edu.mx

En primer lugar se presenta una serie de ejercicios relacionados con el sistema decimal de numeración, cuyo propósito es profundizar en el conocimiento y la comprensión de este sistema porque es la base para otras habilidades relacionadas con el sentido numérico. Después se muestran algunas actividades con la recta numérica. En seguida, a manera de ejemplos, se presentan tareas de estimación, cálculo mental, cálculo escrito y uso de la calculadora para preescolar, primaria y secundaria. Se espera que trabaje estas actividades con sus alumnos haciendo las adecuaciones pertinentes al tipo de números y operaciones que desee trabajar.

Sistema decimal de numeración

Las actividades que se sugieren en este apartado permitirán que los estudiantes profundicen en su comprensión de nuestro sistema de numeración, lo que, al mismo tiempo, les ayudará a comprender diversos algoritmos de las operaciones básicas con números naturales y decimales y les permitirá construir procedimientos personales para resolver dichas operaciones de manera escrita o mental.

Le sugerimos resolver los ejercicios con anticipación para que advierta, de manera vivencial, los conocimientos y las habilidades que se requieren para resolver cada uno de ellos y, en caso de que lo crea pertinente, pueda hacer las adecuaciones necesarias.



ACTIVIDAD 1

Intención didáctica: Que los alumnos distingan entre la cifra de las decenas y la cantidad total de decenas que hay en un número.

Completa la tabla.

Número	Cifra que está en el lugar de las decenas	¿Cuántas decenas hay en el número?
38		
129		
1 315		
34 076		

Comentarios: Es importante que los alumnos identifiquen que, por ejemplo, en 345 la cifra de las decenas es 4, pero en ese número hay un total de 34 decenas. En el caso de que a los alumnos se les dificulte completar la última columna se puede hacer un ejercicio previo con problemas como:

Juan cambió \$345 por monedas de \$10, ¿cuántas monedas le dieron?

Puede utilizar monedas de \$10, billetes de \$100 o billetes de \$1 000.

Se puede trabajar con unidades, decenas, centenas, etcétera, así como con decimales, preguntando por décimos, centésimos, milésimos, etcétera, de acuerdo al grado y nivel en el que se aplique.



ACTIVIDAD 2

Intención didáctica: Que los alumnos identifiquen el número que se forma con ciertas unidades, decenas, centenas, etcétera.

Completa la tabla.

Número de centenas	Número de decenas	Número de unidades	Número que se forma
1	3	4	
2	6	15	
12	12	12	
23	41	100	
234	234	234	

Comentarios: Es importante que los alumnos resuelvan ejercicios diferentes a las tareas estereotipadas en las que siempre se pone una cifra en el número de las unidades, decenas y centenas. Los alumnos se darán cuenta de que un número puede descomponerse de diferentes maneras. Por ejemplo:

678 es 6 centenas + 7 decenas + 8 unidades

Sentido numérico

Pero también:

$$\begin{aligned} &67 \text{ decenas} + 8 \text{ unidades} \\ &6 \text{ centenas} + 78 \text{ unidades} \end{aligned}$$

Y también:

$$5 \text{ centenas} + 12 \text{ decenas} + 58 \text{ unidades}$$

La tabla puede adecuarse al grado y nivel que se desee trabajar.



ACTIVIDAD 3

Intención didáctica: Que los alumnos profundicen en su conocimiento del sistema decimal de numeración al descomponer un número en unidades, decenas, centenas, etcétera.

Completa la tabla. No puedes escribir en las casillas sombreadas y la suma de los números que escribas en las otras casillas de cada renglón te debe dar el número de la primera columna.

Número	Unidades de millar	Centenas	Decenas	Unidades
1 567				
3 456				
2 770				
1 000				
6 788				

Comentarios: Al igual que la actividad anterior, se trata de romper con las tareas en las que un número de cuatro cifras, por ejemplo, se descompone en unidades de millar, centenas, decenas, unidades. Al completar la tabla los estudiantes podrán darse cuenta de que hay diferentes maneras de descomponer aditivamente un número.

Los números involucrados en la tabla podrán adecuarse al grado y nivel en el que se trabaje; por ejemplo, para secundaria se pueden incluir números del orden de los millones.



ACTIVIDAD 4

Intención didáctica: Que los alumnos profundicen en su conocimiento sobre los números decimales al descomponer un número con punto decimal en décimos, centésimos, milésimos, etcétera.

Completa la tabla. No puedes escribir en las casillas sombreadas y la suma de los números que escribas en las otras casillas de cada renglón te debe dar el número de la primera columna.

Número	Unidades	Décimos	Centésimos	Milésimos
0.5				
1.5				
3.1				
4.2				

Comentarios: Los números decimales son de los contenidos de mayor dificultad en la educación básica, por ello es importante realizar diversas actividades sobre equivalencia entre décimos, centésimos y milésimos. La tabla anterior puede ajustarse al grado y nivel con el que se desee trabajar.

Sentido numérico

Es muy recomendable dosificar la secuencia didáctica de tal manera que en un principio se trabajen los números con una cifra después del punto, luego con dos, con tres, etcétera.

Otra variable importante es la inclusión de ceros entre el punto decimal y la primera cifra diferente de cero; por ejemplo:

3.065

4.005

1.0205



La recta numérica

La recta numérica constituye un valioso recurso para trabajar algunos de los contenidos relacionados con los números por ejemplo, comparación, orden, equivalencia, propiedad de densidad, etcétera.

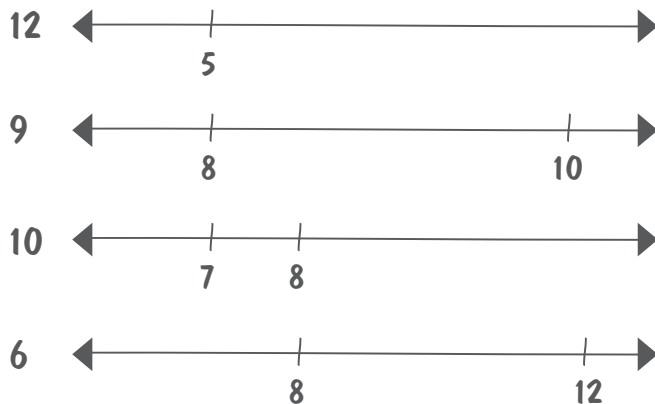
La mayoría de los ejercicios que se sugieren se puede adecuar al grado y nivel requeridos.



ACTIVIDAD 5

Intención didáctica: Que los alumnos profundicen en las convenciones para ubicar números en la recta numérica.

Ubica en cada recta el número que está indicado a la izquierda.



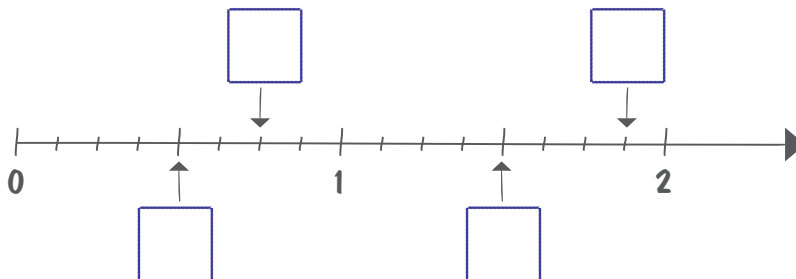
Comentarios: se espera que los alumnos noten que la primera recta tiene muchas soluciones, lo único que se requiere es que el 12 esté a la derecha del 5. El hecho de que en las otras tres rectas se ubiquen 2 puntos implica que ya no se puede colocar el número donde se desee. Los alumnos tendrán que investigar de qué tamaño es la unidad en cada recta para ubicar los puntos que se piden.



ACTIVIDAD 6

Intención didáctica: Que los alumnos profundicen en sus conocimientos de relaciones entre fracciones al ubicarlas en la recta numérica.

Anota el número que corresponde en cada flecha.



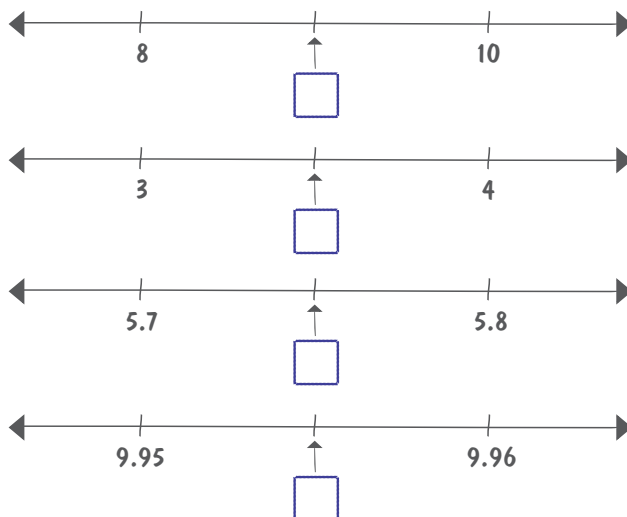
Comentarios: Las fracciones involucradas son medios, cuartos y octavos. La intención de dividir en ocho partes las unidades (del 0 al 1 y del 1 al 2) es para que surjan fracciones equivalentes. Por ejemplo, la primera flecha inferior corresponde a $\frac{1}{2}$, pero es muy probable que algunos alumnos anoten $\frac{4}{8}$. Esto dará lugar al análisis de las fracciones equivalentes. Si en este caso no surge la fracción $\frac{2}{4}$ para este mismo punto, usted puede sugerirla y que los alumnos discutan si es correcta o no.



ACTIVIDAD 7

Intención didáctica: Que los alumnos se den cuenta de que entre dos números decimales siempre es posible ubicar otro número decimal.

Anota el número que corresponde en cada flecha.



Comentarios: En este tipo de ejercicios se trabaja la propiedad de densidad de los números decimales. Es muy probable que los alumnos no tengan dificultad en anotar el número que falta en las dos primeras rectas. Las últimas dos son de mayor dificultad. Una manera de resolverlo es considerando que 5.7 y 5.8 son iguales a 5.70 y 5.80, de este manera se darán cuenta de que el número de la flecha es 5.75. De manera análoga, se encuentra que el número de la última recta es 9.955.

Estimación



ACTIVIDAD 8

Intención didáctica: Que los alumnos identifiquen colecciones con menos de cinco elementos.

Con fichas de dominó puestas al centro con los puntos a la vista juegan en parejas, el maestro dice: “Se toman las fichas que tengan menos de cinco puntos”. Por turnos, cada quien toma una. Si uno se equivoca y el otro se da cuenta, éste se queda con la ficha que el otro tomó. Si en su turno uno dice “ya no hay” y el otro ve una, puede tomarla. Gana el que al final tenga más fichas cuando en el centro ya no hay más fichas con menos de cinco puntos.

Comentarios: La actividad puede trabajarse con los pequeños de preescolar. Anteriormente se mencionó que en las tareas de estimación no es necesario encontrar un resultado exacto; por ello en esta actividad sólo se pide a los alumnos que elijan resultados menores que cinco, pero no se pide la cantidad exacta de puntos, lo cual no significa que los alumnos no cuenten; recuérdese que se les debe permitir emplear el procedimiento con el que ellos se sientan con mayor confianza.





También se puede trabajar con otras consignas en diferentes momentos: “Se toman las que tengan más de tres puntos”, “Se toman las que tengan menos de 10 puntos”. Lo importante es establecer una secuencia didáctica en la que se trabajen primero números pequeños y se vayan aumentando conforme se identifique que los alumnos van adquiriendo habilidad.



ACTIVIDAD 9

Intención didáctica: Que los alumnos estimen si la suma de dos fracciones es igual o no a la unidad.

Completa la última columna.

	Cantidad de agua	Cantidad de jugo de naranja	¿Preparó más de un litro de agua de naranja?
	Medio litro	Un cuarto de litro	
	Tres cuartos de litro	Medio litro	
	Un cuarto de litro	Un cuarto de litro	
	Tres cuartos de litro	Tres cuartos de litro	

Platica a tus compañeros cómo supiste las respuestas.

Sentido numérico

Comentarios: Esta tarea se puede poner desde tercero o cuarto grado de primaria. Se trata de una actividad de estimación porque no se requieren respuestas exactas, sólo comparar si al juntar la cantidad de agua y la de jugo se obtiene más o menos que la unidad. Las fracciones involucradas son las que marca el programa de tercero y se prescindió de la simbología de las fracciones porque por el momento se desea que los alumnos atiendan al “tamaño” que representa la fracción.





ACTIVIDAD 10

Intención didáctica: Que los alumnos estimen si el resultado de una operación con números decimales es mayor que uno.

Subraya las operaciones cuyo resultado sea mayor que 1.

$$1 \times 0.3567 \quad 2 \times 0.25 \quad 8 \times 0.005 \quad 15 \times 0.1$$

$$1 \div 0.8856 \quad 10 \div 0.1 \quad 2 \div 0.5432 \quad 4 \div 4.5$$

Platica a tus compañeros cómo supiste las respuestas.

Comentarios: Esta actividad se puede realizar en secundaria. Además de decimales, es conveniente hacer actividades similares con fracciones, involucrando las cuatro operaciones básicas. También se puede aplicar sin operaciones y que los alumnos estimen si una fracción es mayor o menor que otras; por ejemplo, que subrayen las fracciones menores que $\frac{1}{2}$ y poner fracciones como:

$$\frac{42}{60}$$

$$\frac{75}{160}$$

$$\frac{532}{1100}$$

Este tipo de ejercicios es de gran ayuda para que los alumnos estimen el tamaño de las fracciones. Es importante que, de ser posible, los alumnos socialicen la manera en que llegaron a la respuesta; esto enriquece el trabajo de todo el grupo.

Cálculo mental



ACTIVIDAD 11

Intención didáctica: Que los alumnos resuelvan mentalmente problemas aditivos simples.

Plantear a los niños, de manera oral, los siguientes problemas (utilizar dados para mostrar lo que se indica).

Paty está en el 2 y en el dado le sale:



¿A qué número llega?

A Raúl le salió en el dado:



Y llegó al 9, ¿en cuál número estaba?

Lilia está en el 9; muéstrame en el dado lo que le tiene que salir para llegar al 10.

Comentarios: Después de hacer varias veces con los pequeños de preescolar juegos de mesa en los que haya que lanzar un dado y recorrer casillas (la oca, el caminito, serpientes y escaleras, etcétera) se pueden proponer problemas como los anteriores sin proporcionarles el tablero pero sí dejándoles ver el dado. El propósito de poner esta limitante es que evolucionen en sus procedimientos, porque durante el juego generalmente cuentan de una en una las casillas del tablero para avanzar y ahora se trata de que lo hagan mentalmente.



ACTIVIDAD 12

Intención didáctica: Que los alumnos resuelvan mentalmente adiciones o sustracciones.

En cada caso calcula mentalmente lo que le falta al número para llegar a 100.

23 34 45 57 65 73

Platica a tus compañeros cómo supiste las respuestas.

Entre todos encuentren una manera para saber mentalmente cuánto le falta a un número para llegar a 100.





Comentarios: Esta actividad se puede proponer en cualquier grado y nivel haciendo las adecuaciones necesarias. Por ejemplo, para tercero de preescolar o primero de primaria se puede pedir que se calcule mentalmente lo que le falta a un número para llegar a 10. También se puede trabajar con la consigna: resta mentalmente a 100 cada uno de los siguientes números.



ACTIVIDAD 13

Intención didáctica: Que los alumnos resuelvan mentalmente problemas que impliquen el uso de números decimales.

Completa la tabla (haz las operaciones mentalmente).

	Cantidad de listón que tiene	Cantidad que ocupa en cada moño	¿Cuántos moños como máximo puede hacer?
	3 metros	0.5 metros	
	2 metros		8
		0.75 metros	3
		0.40 metros	12

Platica a tus compañeros cómo supiste las respuestas.

Comentarios: Esta tarea se sugiere para primer grado de secundaria, donde se estudian la multiplicación y división con números decimales, pero se puede adecuar al grado y nivel que se desee. Se usó un contexto fácil de entender para los alumnos para que tengan un referente concreto que les permita operar las cantidades mentalmente. Es importante socializar al final las estrategias de cálculo mental que cada uno usó porque esto enriquece el acervo de todos.

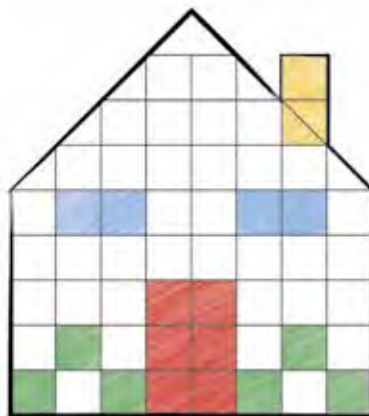
Cálculo escrito



ACTIVIDAD 14¹

Intención didáctica: Que los alumnos resuelvan problemas en los que tengan la necesidad de comunicar una cantidad.

Se coloca al frente del salón el diseño y a cada niño se le entrega una casita cuadriculada sin decorar, se pone una caja con cuadritos de colores en el escritorio.



¹ Esta actividad fue tomada de Ruiz (2006).

Sentido numérico

La educadora indica:

Voy a poner en su mesa una casita, cada uno debe decorarla exactamente igual al modelo. En mi escritorio hay cajas que contienen los cuadritos de colores. Deben pedirme por escrito, en un papel, cuántos cuadritos necesitan de cada color. No les deben sobrar ni faltar cuadritos.

Comentarios: Además de propiciar el conteo, esta actividad genera la necesidad de que los niños usen un registro para pedir por escrito el número de cuadritos que necesitan, un paso que los llevará a construir el símbolo de número. Puede ser que los dibujen de cada color, que pongan rayitas de colores, podrán dibujar el cuadrito del color y anotar el número de los que necesitan. Se puede plantear esta actividad varias veces, con diferentes diseños o dibujos, aumentando la complejidad según el nivel de los pequeños. Al terminar, cada niño muestra su diseño y lo compara; entre todos deciden si hay error. También comparten sus mensajes.



ACTIVIDAD 15

Intención didáctica: Que los alumnos resuelvan problemas aditivos sencillos.

Muestre a los niños una tarjeta con un producto y su costo escrito.

Por ejemplo:



Muestre también dinero; pueden ser monedas de papel:



Ahora pregunte:

¿Cuánto dinero falta para comprar la pelota?

Hágalo con varios productos y diferentes cantidades de dinero. Si lo considera pertinente pida que escriban la respuesta y que platiquen cómo la encontraron.

Comentarios: Esta actividad se puede aplicar en tercero de preescolar o en primero de primaria. Resolver una suma o resta sin llegar aún a emplear los signos de más y de menos constituye un antecedente para el cálculo escrito.



ACTIVIDAD 16

Intención didáctica: Que los alumnos completen una operación básica con números naturales a partir del algoritmo convencional para resolverla.

Completa la operación.

$$\begin{array}{r}
 8 \quad 7 \quad 6 \quad \square \\
 - \quad \square \quad \square \quad \square \quad 7 \\
 \hline
 1 \quad 9 \quad 4 \quad 3
 \end{array}$$

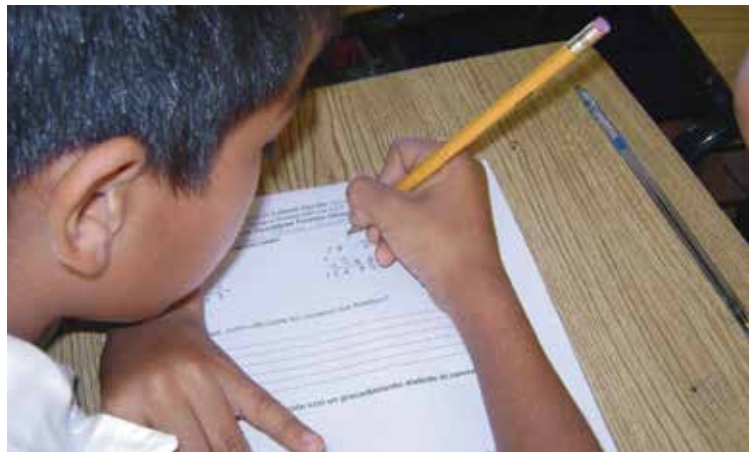
Platica a tus compañeros cómo calculaste los números que faltaban.

Sentido numérico

Comentarios: Esta tarea pone en juego el conocimiento de algún algoritmo para restar dos números naturales, a pesar de que, para completar la operación, los alumnos pueden emplear el cálculo mental.

Se puede aplicar desde primer grado de primaria, una vez que los niños hayan aprendido la notación para las operaciones. Los números y la operación se eligen de acuerdo al grado escolar.

Esta actividad constituye una manera de trabajar algoritmos convencionales de manera no mecánica.





ACTIVIDAD 17

Intención didáctica: Que los alumnos completen una operación básica con fracciones.

Completa la operación.

$$3 \frac{\square}{4} + \square \frac{2}{5} = 5 \frac{13}{20}$$

Comentarios: Esta actividad se puede aplicar desde cuarto grado de primaria, haciendo las adecuaciones pertinentes: operación por trabajar, números involucrados (medios, cuartos, quintos, etcétera).

En el ejemplo presentado no se trata de aplicar el algoritmo convencional para sumar fracciones mixtas, sino de que los estudiantes completen la igualdad a partir del razonamiento que hagan.

Uso de la calculadora



ACTIVIDAD 18

Intención didáctica: Construir series numéricas usando la calculadora.




1) Oprime en tu calculadora:


Aparece:

$$0 + 3 =$$



Sentido numérico

- 2) Vuelve a oprimir , ¿qué número aparece? _____
- 3) Vas a volver a oprimir , pero antes contesta:
¿qué crees que va a aparecer? _____
- 4) Hazlo varias veces; antes de oprimir el  adivina el número que aparecerá.

Comentarios: Esta actividad puede plantearse a alumnos de primero y segundo grados de primaria. El docente puede dar las instrucciones de forma oral. Este ejercicio es de gran utilidad para segundo grado, en la construcción de series numéricas que servirán como antecedente para el trabajo con las tablas de multiplicar. Es importante que la calculadora tenga la característica de que al oprimir  se suma o se resta el último número, generalmente son las calculadoras más sencillas.

Para un grado superior, incluso secundaria, se puede iniciar con un número diferente de cero o usar decimales, como las actividades siguientes:





ACTIVIDAD 19

Intención didáctica: Construir y analizar series numéricas usando la calculadora.



- 1) Oprime en tu calculadora: Aparece:

$$4 + 5 =$$



- 2) Vuelve a oprimir , ¿qué número aparece? _____
- 3) Vas a volver a oprimir , pero antes contesta:
¿qué crees que va a aparecer? _____

Sin usar la calculadora, responde las siguientes preguntas. Una vez que las hayas contestado, comprueba tus respuestas usando la calculadora.

- 4) Si oprimes el  10 veces, ¿qué número aparecerá? _____
- 5) ¿Cómo lo supiste? _____
- 6) ¿Cuántas veces tienes que oprimir el  para que aparezca el 104? _____
- 7) ¿Cómo lo supiste? _____
- 8) ¿En algún momento aparecerá en la pantalla el 205? _____
- 9) ¿Cómo lo supiste? _____





ACTIVIDAD 20

Intención didáctica: Construir y analizar series con números decimales usando la calculadora.



- 1) Oprime en tu calculadora: Aparece:

$$0 + 0.1 =$$



- 2) Vuelve a oprimir , ¿qué número aparece? _____
- 3) Vas a volver a oprimir , pero antes contesta:
¿qué crees que va a aparecer? _____

Responde las siguientes preguntas sin usar la calculadora. Una vez que las hayas contestado, comprueba tus respuestas usando la calculadora.

- 4) Si oprimes el  10 veces, ¿qué número aparecerá? _____
- 5) ¿Cómo lo supiste? _____
- 6) ¿Cuántas veces tienes que oprimir el  para que aparezca el 3? _____
- 7) ¿Cómo lo supiste? _____
- 8) ¿En algún momento aparecerá en la pantalla el 1.01? _____
- 9) ¿Cómo lo supiste? _____

Comentarios: Estos ejercicios pueden trabajarse con números negativos si en lugar de sumar se va restando. Observe que de manera implícita se trabajan ecuaciones; por ejemplo, en las preguntas 6 y 8.



ACTIVIDAD 21

Intención didáctica: Que los alumnos utilicen la calculadora para resolver operaciones utilizando procedimientos no convencionales.

Resuelve en la calculadora $35 + 52$ pero sin usar la tecla del 5

Resuelve en la calculadora $1036 \div 4$ pero sin usar la tecla del 4

Resuelve en la calculadora 12×4 pero sin usar la tecla \times

Resuelve en la calculadora $615 \div 13$ pero sin usar la tecla \div

Comentarios: Este grupo de actividades con calculadora que desarrollan el sentido numérico se denomina “la tecla descompuesta”. Se trata de actividades en las que se propone a los alumnos resolver alguna operación, pero se les pone la limitante de no poder utilizar alguna tecla que, normalmente, tendrían que usar para resolver la operación planteada. Ello con el propósito de que, a partir de la comprensión que tengan sobre la operación, busquen otro procedimiento para resolverla. La tecla que no se les permite usar puede ser la de la operación o la de alguno de los números involucrados.



ACTIVIDAD 22

Intención didáctica: Que los alumnos resuelvan operaciones con cálculo mental y verifiquen sus respuestas con la calculadora.

En la pantalla de la calculadora está el número de la primera columna y se desea que aparezca el número de la tercera columna. ¿Qué operación tienes que hacer para lograrlo? Completa la tabla anotando lo que haga falta. Después verifica con tu calculadora.

Número en la pantalla	Operación que se realiza	Número que aparece
8		2
59		69
300		200
175		25
200		800

Comentarios: Hacer hipótesis y conjeturas y después verificarlas es una conducta propia de las matemáticas. La calculadora es una herramienta que invita a los alumnos a elaborar sus propias hipótesis y luego permite que las comprueben.

Los números de la tabla se elegirán de acuerdo con el grado escolar y las operaciones que se deseen trabajar. Si algunos de los alumnos cuentan con calculadoras de las que manejan fracciones comunes (con notación de barra horizontal o inclinada), se pueden organizar los equipos de tal manera que en cada uno haya una calculadora de ese tipo y poner tablas como la anterior que involucren fracciones.



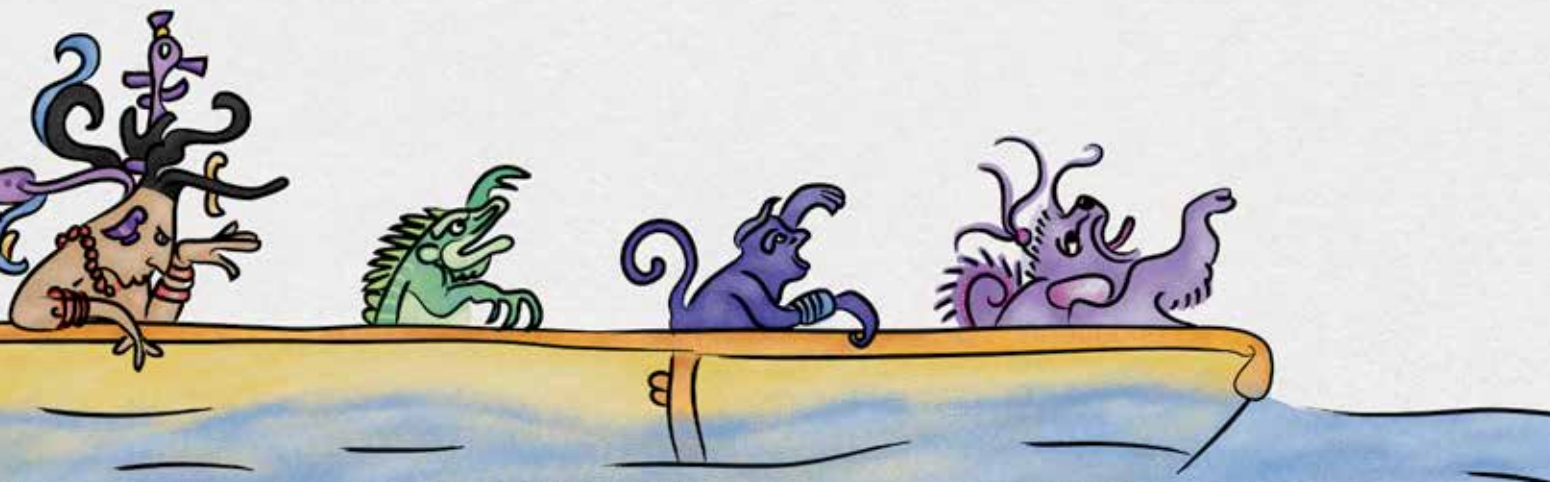
ACTIVIDAD 23

Intención didáctica: Que los alumnos resuelvan operaciones con cálculo mental y verifiquen sus respuestas con la calculadora.

Completa la tabla considerando que en la pantalla de la calculadora está el número de la primera columna y se desea que aparezca el número de la tercera columna, la operación para lograrlo está anotado en la segunda columna. Después comprueba con tu calculadora.

Número en la pantalla	Operación que se realiza	Número que aparece
0.1	+0.4	
	-0.5	1
0.5		3
0.01	-0.001	
	-0.002	0.001

Comentarios: Dado que esta actividad involucra números decimales, es propia para los grados superiores de primaria o para secundaria. De ser posible, procure que estos ejercicios se resuelvan primero con cálculo mental y después se comprueben con la calculadora.






8



**Juegos para desarrollar
el sentido numérico**



Los juegos representan una fuente inagotable de opciones para desarrollar el sentido numérico. Por ejemplo, los alumnos de preescolar o los primeros grados de primaria pueden usar la oca para desarrollar el cálculo mental con números del 1 al 6 (si se usa un dado) o con números del 1 al 12 (si se usan dos), con la idea de que los alumnos calculen el número al que llegarán antes de contar las casillas de una en una.

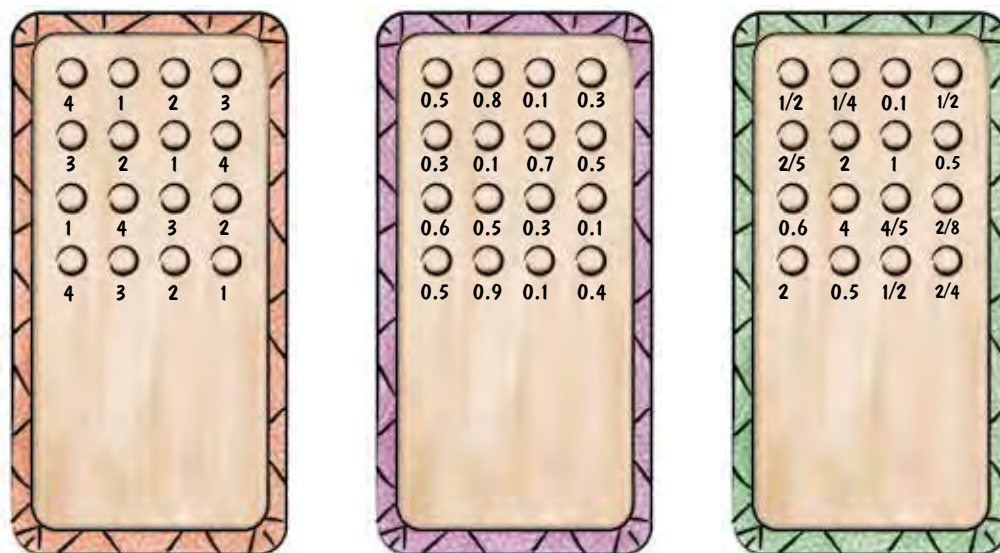
Se pueden elaborar loterías o memoramas con las tablas de multiplicar o con sumas y restas de un dígito para que los alumnos memoricen los resultados.

El famoso juego “Basta” también se puede adaptar y convertirse en un “Basta numérico” para practicar el cálculo mental con números enteros, decimales o fracciones.¹

El tradicional juego de las canicas de las ferias se puede adaptar con diferentes números para el cálculo mental de sumas. Recuerde que en este juego se requiere un tablero con orificios un poco más pequeños que el círculo mayor de las canicas que se usarán, para evitar que se caigan. Desde el extremo inferior, los niños lanzan canicas, que se insertarán en los orificios. Pueden lanzar, por ejemplo, seis canicas. Al finalizar suman los puntos obtenidos de acuerdo al número marcado donde cayó cada canica. Seguro entre los padres de familia encontrará el apoyo para construir las cajas de madera que se requieren para estos juegos.

¹ Puede consultarse Fuenlabrada, Block, Balbuena y Carvajal (1991) para encontrar ejemplos de varios juegos relacionados con el sentido numérico; por ejemplo: “Al verde”, “Guerra de cartas”, “Dilo con una cuenta”, “La pulga y las trampas”, “Cuadrados mágicos”, etcétera.

Sentido numérico



A continuación se muestran algunos juegos que, a manera de ejemplo, se sugieren para que los alumnos desarrollen su sentido numérico. La mayoría de ellos puede adaptarse para trabajar con diferentes rangos y tipos de números, dependiendo del grado y nivel al que van dirigidos.

Al igual que con las actividades del capítulo anterior, en el CD anexo encontrará materiales que puede imprimir o modificar de acuerdo a la intención didáctica que persiga. También puede encontrarlos en la página www.inee.edu.mx

Lotería con dados

Se reparte un tablero con los números del 2 al 12 a cada niño. Por ejemplo:



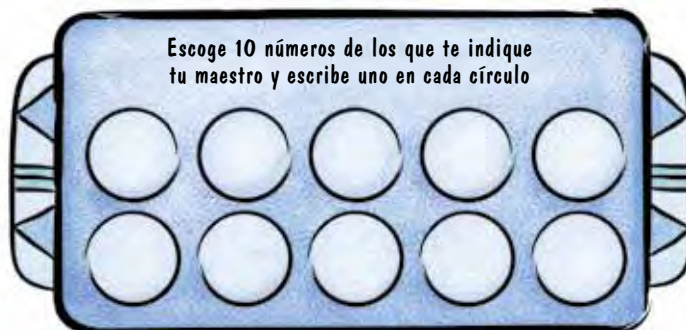
Las instrucciones son:

1. Cada alumno tiene un tablero.
2. Por turno, cada uno tira los dados, suma los números obtenidos y pone una marca (ficha, semilla, botón) en la suma que obtuvo.
3. Si sale un número que ya ha sido marcado, pierde el turno y pasa los dados al siguiente compañero.
4. Gana el primero que llene su tablero y grite "¡Lotería!"



Lotería con las tablas de multiplicar

El siguiente tablero se copia en un acetato o en una hoja de papel y se introduce en un protector de hoja.



Sentido numérico

1. En el pizarrón se escriben los siguientes números (o se pueden llevar escritos en una cartulina o papel *bond* y mostrarlos en el pizarrón).



2. Se indica a los alumnos que elijan 10 números y los escriban en su tablero. Usar plumines delgados que se borren.
3. Por turno, cada uno lanza los dados y multiplica los números obtenidos. Busca en su tablero si está el resultado y lo marca (con una ficha, botón, semilla). Si sale un número ya marcado o uno que no está en el tablero pierde el turno y lo pasa al siguiente compañero.
4. Gana el primero que complete su tablero y grite “¡Lotería!”



Un juego con dados

Cada equipo requiere un tablero como el siguiente, tres dados y fichas de colores.²

1	2	3	4	5	6	7	8
9	10	11	12	13	14	15	16
17	18	19	20	21	22	23	24
25	26	27	28	29	30	31	32
33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	44	45	48	50	54	55
60	64	66	72	75	80	90	96
100	108	120	125	144	150	180	216

Las instrucciones son:

1. Cada jugador toma las fichas de un color.
2. Por turno, cada jugador lanza tres dados.
3. Usa los tres números y las operaciones (suma, resta, multiplicación, división) para formar un número del tablero. Pone una ficha de su color en el número. Ese número ya no se puede usar. Si no logra encontrar una combinación de operaciones que dé como resultado un número del tablero, entonces pierde el turno y pasa los dados al siguiente compañero.
4. Gana el que haya puesto más fichas cuando el maestro indique que ha terminado el tiempo o cuando se haya completado todo el tablero.

² Adaptado de: http://contenidos.educarex.es/mci/2004/30/Descargas/Programas/tangram/redescolar.ilce.edu.mx/redescolar/act_permanentes/mate/mate2b/mate2b.htm

Yo tengo... ¿quién tiene...?

Este juego se puede realizar en equipos. Se requiere un juego de tarjetas similar al siguiente. El maestro puede adecuar las fichas al grado que atiende y a los números y operaciones que considere pertinentes. Lo que se muestra es un ejemplo, obsérvese que inicia con el 1 y se forma una cadena hasta llegar al último resultado. No es un juego de competencia.³



³ Adaptado de: <http://anagarciaazcarate.wordpress.com/juegos-quien-tiene-yo-tengo/>

Las instrucciones para jugar son:

1. Se reparten todas las tarjetas entre los participantes del equipo. No debe sobrar ninguna, no importa que a algunos participantes les toquen más tarjetas.
2. Inicia el que tenga la tarjeta que dice: Yo tengo 1, ¿quién tiene...?
3. El participante que tenga el número que da respuesta a la pregunta lee en voz alta su tarjeta: Yo tengo... ¿quién tiene...?
4. Se repite lo anterior hasta terminar la cadena.
5. Cada que se lea una tarjeta se pone al centro.
6. El juego termina cuando todas las tarjetas están al centro. Nadie se debe quedar con tarjetas; si esto sucede, hubo un error al jugarlo.



Sentido numérico

Cambiando la unidad

Para cada equipo se requiere mínimo un hexágono, dos trapecios, tres rombos y seis triángulos como los siguientes:




Se pueden elaborar de *foami* o cartulina de colores. Obsérvese que todas las figuras que se usan se pueden obtener a partir de un hexágono, de tal manera que el trapecio debe ser la mitad del hexágono, el rombo la tercera parte y el triángulo equilátero la sexta parte.





Para cada equipo se requiere un juego de tarjetas similares a las que se muestran más adelante. El número de tarjetas se determina de acuerdo al número de niños que forma cada equipo; se sugiere que le toquen mínimo cinco a cada uno. Por ejemplo, si se forman grupos de cuatro niños, hacer veinte tarjetas por equipo.



A continuación se muestran ejemplos de tarjetas con diferente grado de dificultad. El maestro decide cuáles usar con sus alumnos y completa con otras similares.

Fáciles:



Si  vale 1,
¿cuánto
vale  ?

Si  vale 1,
¿cuánto
vale  ?

Si  vale 1,
¿cuánto
vale  ?

Si  vale 1,
¿cuánto
vale  ?

Si  vale 1,
¿cuánto
vale  ?

Si  vale 1,
¿cuánto
vale  ?

De mediana dificultad:



Si  vale 1,
¿cuánto
vale   ?

Si  vale 1,
¿cuánto
vale   ?

Si  vale 1,
¿cuánto
vale   ?

Si  vale 1,
¿cuánto
vale   ?

Si  vale 1,
¿cuánto
vale   ?

Si  vale 1,
¿cuánto
vale  ?

Sentido numérico

Difíciles:

Si  vale 2,
¿cuánto
vale  ?

Si  vale 2,
¿cuánto
vale  ?

Si  vale 2,
¿cuánto
vale   ?

Si  vale 3,
¿cuánto
vale  ?

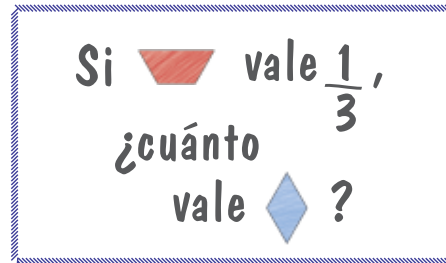
Si  vale 3,
¿cuánto
vale  ?

Si  vale 4,
¿cuánto
vale  ?

Se pueden hacer múltiples combinaciones que dan lugar a diferentes grados de dificultad. En los ejemplos anteriores se incluyen ejercicios fáciles, en los que la figura base vale uno y las figuras que aparecen en la pregunta son menores que la unidad y son fracciones unitarias de la unidad. En las de mediana dificultad la figura de la base sigue teniendo un valor de uno, pero en la pregunta ya aparecen dos figuras o la figura es mayor que la unidad. Mientras que en las figuras difíciles la figura base tiene un valor diferente de la unidad. Por supuesto, hay muchas más combinaciones que dan lugar a problemas fáciles, incluso si la figura base tiene un valor diferente a uno. Por ejemplo:

Si  vale 2,
¿cuánto
vale  ?

Mientras que hay otras combinaciones que pueden resultar muy difíciles para los niños:



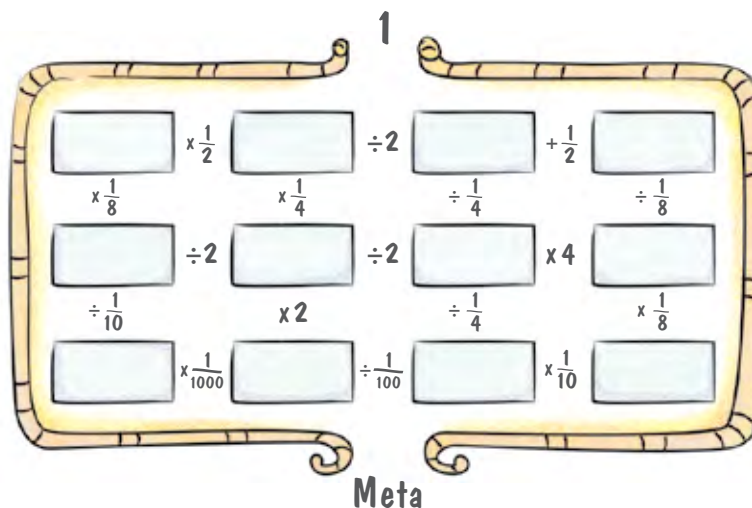
Las instrucciones para jugar son:

1. Coloquen al centro y boca abajo el conjunto de tarjetas.
2. Por turno, cada participante toma una tarjeta y responde la pregunta.
3. Si lo hace correctamente se queda con la tarjeta. Si no, la regresa y la coloca debajo de las demás.
4. El juego termina cuando lo indique el maestro o cuando ya no haya más tarjetas en el centro. Gana el que al final tenga más tarjetas.



El laberinto

Se requieren varios diagramas como el siguiente para cada equipo. O bien, se sugiere fotocopiarlo en acetato o en una hoja de papel y meter la hoja a un protector de plástico transparente y usar plumines para pizarrón blanco, esto con la idea de que puedan escribir sobre él y borrar las veces que sea necesario.



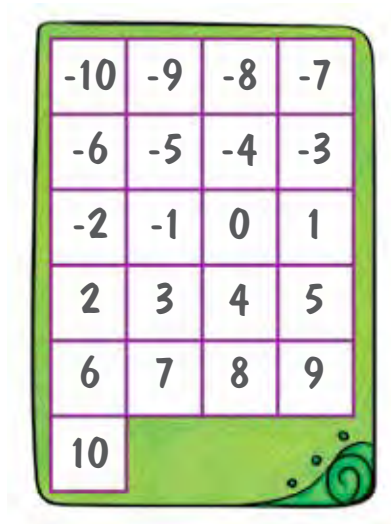
Las instrucciones para jugar son:

Se entrega la hoja a cada equipo y se comprueba que han entendido las instrucciones, que deberán estar escritas en la copia y que se reproducen a continuación:

1. Empiezan el juego con un punto.
2. Se trata de que remarquen el camino que consideren que lleva a la meta consiguiendo el mayor puntaje, con la condición de *no pasar dos veces por el mismo lugar*. No hagan las operaciones mientras marquen el camino, háganlo cuando hayan terminado de marcarlo.
3. No saquen la hoja del protector y usen un plumín que se pueda borrar.
4. Gana el equipo que consiga el mayor puntaje.

Guerra de cartas con números negativos²

Se requieren varios juegos de cartas con números positivos y negativos. Por ejemplo, podrían ser tres juegos con los números del -10 al 10.




Se juega en equipos de tres o cuatro jugadores. Las instrucciones son:

1. Se mezclan las cartas y se colocan al centro con los números hacia abajo.
2. Cada niño toma dos cartas y las coloca sobre la mesa con los números hacia arriba.
3. El jugador que obtiene la suma con mayor valor se queda con todas las cartas de esa tirada.
4. En caso de empate, estos jugadores toman una carta nueva y gana el que obtenga la mayor.
5. El juego termina cuando se acaban las cartas o ya no alcanzan para todos los jugadores.
6. Gana quien haya acumulado más cartas.

² Este juego se ha adaptado de Fuenlabrada *et al.* (1991).

Sentido numérico

Este juego se puede adaptar para trabajarlo con números naturales, decimales o fracciones en el rango que se requiera. Y en lugar de sacar dos cartas pueden ser una, tres o cuatro. En el caso de los números con signo, una variante para trabajar la sustracción es establecer la regla de sacar dos cartas y restar a la primera lo que salga en la segunda.

Los anteriores son ejemplos de lo que los docentes pueden realizar con los alumnos. Todos ellos involucran algo más que la aplicación mecánica de algoritmos para obtener resultados; algunos promueven la idea de que hay diferentes maneras de enfrentarse a los problemas, otros cuestionan la creencia de que en matemáticas siempre hay que dar un resultado exacto y numérico, algunos permiten operar con números decimales incluso sin saber los algoritmos convencionales y promueven la reflexión y el entendimiento. 





9



**Algunas ideas para
evaluar el sentido numérico**

La evaluación continua cobra particular importancia en el caso del sentido numérico. Es importante observar lo que los estudiantes pueden o no hacer cuando se les piden estimaciones o cálculos mentales o escritos, para detectar las dificultades y los problemas que puedan tener al trabajar con los números. Esto servirá para orientar la toma de decisiones sobre lo que hay que hacer en clase, el tipo de actividades que se pueden proponer, las áreas que deben atenderse, etcétera.

Para sesiones específicas en las que el propósito sea evaluar los avances de los alumnos se pueden proponer tareas como las que a continuación se mencionan, aunque esto no excluye que también se puedan emplear con un propósito diferente.

Para evaluar la estimación que los alumnos hacen de operaciones y problemas puede poner tareas en las que no pida el resultado exacto sino aproximaciones, como los siguientes ejemplos:

Luisa tiene 5 canicas y quiere 10, ¿cuántas le faltan?

- a) **Más de 4**
- b) **Menos de 6**
- c) **Más de 10**

Un kilogramo de manzana cuesta \$28. Paco va a comprar 3 kilogramos, ¿cuánto pagará?

- a) **Menos de \$28**
- b) **Menos de \$50**
- c) **Más de \$70**
- d) **Más de \$100**

Sentido numérico

Lety va a hacer un dibujo a escala, para lo cual multiplica por 0.5 cada medida del dibujo a escala. ¿De qué tamaño le quedará su dibujo?

- a) Más grande que el doble del original**
- b) Más grande que el original**
- c) Más pequeño que el original**

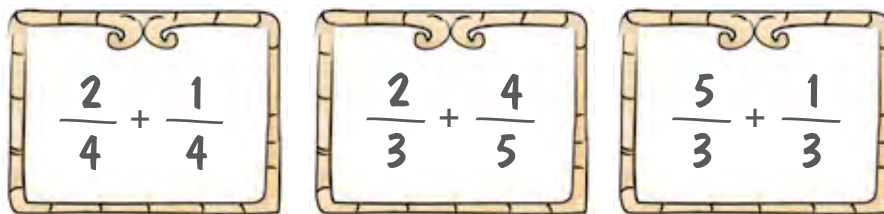
Si se desea evaluar la competencia de argumentar las respuestas, a los ejercicios que proponga puede agregar la consigna:

Explica cómo lo sabes.

Otra manera de evaluar la estimación de resultados es haciendo dinámicas como la siguiente:

Anoten “mayor que 1” o “menor que 1”, según el resultado de la tarjeta que les muestre.

Y se muestran tarjetas como las siguientes:



El tipo y rango de números y las operaciones serán elegidas de acuerdo al grado y nivel que se trabaje.

Para preescolar las tarjetas pueden tener dibujos. Por ejemplo:

Pongan una palomita si el dibujo que les muestre tiene más de 5 estrellitas, si tiene menos ponen un tachecito.



Para evaluar el cálculo mental, y asegurarse de alguna manera de que los estudiantes realmente están haciendo los cálculos mentalmente, conviene proponer las tareas o los problemas de forma oral y pedir a los alumnos que anoten el resultado. Esto puede hacerse con tarjetas de tamaño adecuado que se muestran a los alumnos, se les dejan unos minutos y se quitan.

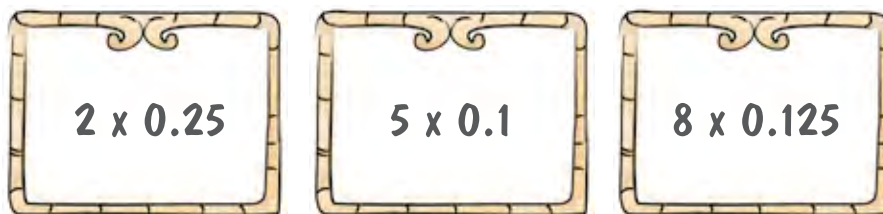
Otras formas de trabajar el cálculo mental podrían ser:

De forma oral, el maestro va planteando a cada alumno una operación diferente. Los alumnos también contestan oralmente, sin escribir. O bien, si todos van a hacer la misma operación, entonces el maestro la plantea, todos anotan la respuesta en una hoja (preferentemente de reúso), luego levantan su hoja y muestran el resultado. En suma, para el cálculo mental es bueno que la instrucción sea, cuando es posible, oral.

Las tarjetas pueden contener problemas u operaciones. Se pueden usar las tarjetas que empleó para los ejercicios anteriores dando la consigna adecuada para cálculo mental. Un ejemplo con números decimales es el siguiente:

Sentido numérico

Anota los resultados de las siguientes operaciones. Haz los cálculos mentalmente.



Recuerde que las operaciones o problemas destinados al cálculo mental realmente deben poder resolverse mentalmente.

Para preescolar se pueden proponer ejercicios con dados. Por ejemplo:

Dibujen el número que tiene que salir en el otro dado para completar 8.



Si lo que se desea es explorar los procedimientos que realizan los alumnos, se puede proponer sólo una tarea de cálculo mental y pedirles que platiquen cómo la resolvieron; en grados superiores pueden escribir el procedimiento que siguieron. En el primer caso, y dado que resultaría muy laborioso hacerlo con cada alumno en una sola sesión, se puede emplear una estrategia en la que en una semana se les pide a cinco alumnos que comenten sus procedimientos y usted registra lo que considere conveniente para la evaluación. Si cada semana hace lo anterior con cinco alumnos diferentes, al cabo de cuatro semanas contará con el registro de evaluación de 20 estudiantes.

Tradicionalmente la evaluación del cálculo escrito ha sido parte importante de las prácticas de evaluación en la escuela. De manera general, las tareas para evaluar el cálculo escrito pueden ser dar por escrito la operación o el problema a los alumnos y pedir que los resuelvan.

No obstante, se sugiere dar variedad a la forma en que se presentan y a lo que se pregunta. También es importante evaluar si los alumnos pueden construir estrategias diferentes a los algoritmos convencionales y pedir que las platicuen o escriban, según corresponda al grado y al nivel con los que está trabajando.

Otras tareas, diferentes a los algoritmos convencionales, que pueden servir para evaluar el cálculo escrito son las siguientes:

- ◆ Anota 3 operaciones que den como resultado 20.
- ◆ Anota 3 operaciones que den como resultado 0.5.
- ◆ Anota 3 operaciones que den como resultado $\frac{3}{4}$.
- ◆ Escribe 3 números que al sumarlos con 5 den como resultado un número menor que 15.
- ◆ Escribe 3 números que al sumarlos con 0.25 den como resultado un número menor que 1.
- ◆ Escribe una fracción que al sumarla con $\frac{1}{5}$ dé como resultado un número mayor que 1.
- ◆ Califica las siguientes operaciones (se ponen varias operaciones resueltas, algunas incorrectamente).
- ◆ Encuentra el error en las siguientes operaciones y corrígelo (se ponen varias operaciones con un error).
- ◆ Califica los siguientes problemas (se ponen problemas resueltos, algunos incorrectamente).
- ◆ Escribe un problema que se resuelva con la siguiente operación y resuélvela (se pone una operación no resuelta).

Sentido numérico

Una tarea interesante para evaluar el sentido numérico es dar un problema resuelto de manera incorrecta y solicitar a los alumnos:

Escribe por qué la respuesta dada al problema no es razonable.

Por ejemplo:

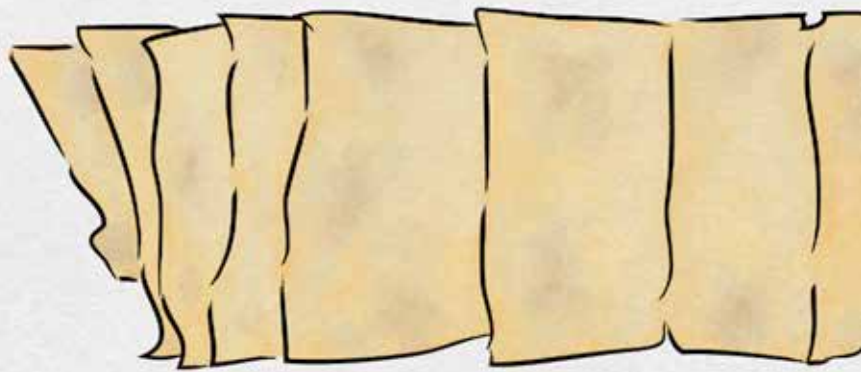
Araceli ahorró \$25 cada semana durante 10 semanas.

¿Cuánto ahorró en total?

Respuesta: \$500.

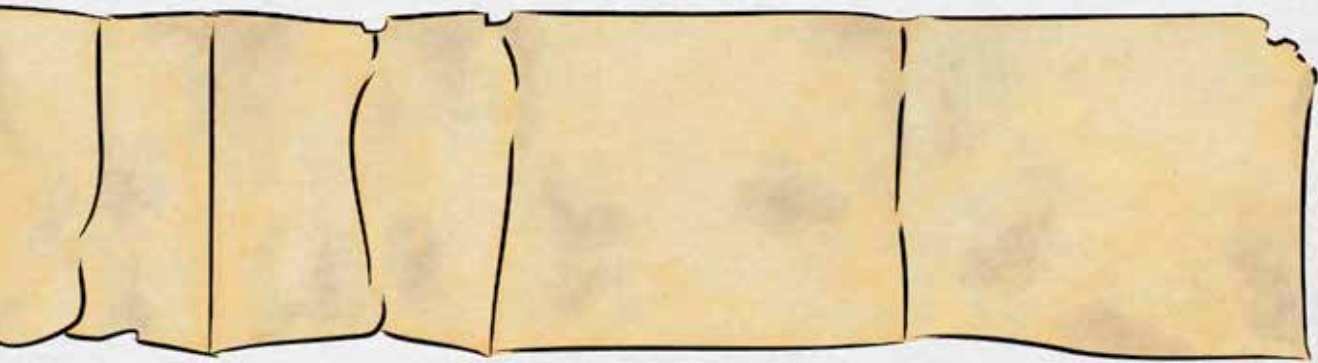
Explica por qué la respuesta no es razonable:

De acuerdo con lo que se ha expuesto a lo largo de este libro, se propone que la evaluación no se limite sólo a los algoritmos convencionales para las operaciones básicas, sino que sea más creativa y constructiva. ♦





Bibliografía



- Álvarez, M. (2004). "La calculadora en el primer ciclo de primaria". *Números*, 32-42.
- Ávila, A. (2010). *Educación matemática en escuelas indígenas. Análisis de sus condiciones y problemas*. (Reporte de investigación no publicado.) México: UPN, Dirección General de Educación Indígena.
- Balbuena, H., Block, D., Dávila, M., Schulmaister, M., García, V., y Moreno, E. (1995). *La enseñanza de las matemáticas en la escuela primaria*. México: SEP.
- Bernabe, R. (2008). *Desarrollo del sentido numérico y sus vínculos con el rendimiento escolar en aritmética*. (Tesis de maestría.) México: CINVESTAV.
- Bruno, A. (2000). "Sentido numérico". En Martinón, A. *Las matemáticas del siglo XX*. Madrid: Nivola Libros y Ediciones, 267-270.
- Castro, E. (2001). "Números decimales". En Castro, E. *Didáctica de la matemática en la escuela primaria*. Madrid: Síntesis, 315-346.
- Castro, E., Castro, E. y Rico, L. (2004). "Aprendiendo a multiplicar y dividir". En Bermejo, V. *Cómo enseñar matemáticas para aprender mejor*. Madrid: CCS, 117-140.
- Cortés, J., Backhoff, E., y Organista, J. (2005). "Análisis de estrategias de cálculo estimativo en escolares de secundaria considerados buenos estimadores". *Revista Mexicana de Investigación Educativa*, 543-558.
- Espinosa, H., García, S., y García, M. (1999). *Fichero de actividades didácticas. Matemáticas. Educación secundaria*. México: SEP.
- Flores, A., Reys, B., y Reys, R. (1990). "Desempeño y estrategias en la estimación en operaciones aritméticas de alumnos de quinto de primaria y segundo de secundaria en México". *Educación Matemática*. Vol. 2, núm. 1, 30-44.
- Fuenlabrada, I., Block, D., Balbuena, H., y Carvajal, A. (1991). *Juega y aprende matemáticas*. México: SEP.
- García, S. (2010). *La resolución de problemas para el desarrollo de competencias*. México: Santillana.

- Guzmán, J., Kieran, C., y Squalli, H. (2003). “La calculadora con pantalla multilínea y el surgimiento de estrategias numéricas en alumnos de primero, segundo y tercer año de secundaria”. *Educación Matemática*, 105-127.
- INEE. (2008). *El aprendizaje en tercero de preescolar en México*. México: INEE.
- _____(2007). *El aprendizaje en tercero de primaria en México*. México: INEE.
- _____(2009). *El aprendizaje en tercero de secundaria en México*. México: INEE.
- _____(s/f). Explorador EXCALE. Recuperado el 8 de marzo de 2012, de <<http://www.inee.edu.mx/explorador>>
- Llinares, S. (2001). “El sentido numérico y la representación de los números naturales”. En Castro, E. *Didáctica de la matemática en la educación primaria*. Madrid: Síntesis, 151-176.
- Martínez, J. (2000). *Una nueva didáctica del cálculo para el siglo XXI*. Barcelona: Monografías Escuela Española.
- Mochón, S., y Vázquez, J. (1995). “Cálculo mental y estimación: métodos, resultados de una investigación y sugerencias para su enseñanza”. *Educación Matemática*. Vol. 7, núm. 3, 93-105.
- NCTM (1989). *Estándares curriculares y de evaluación para la educación matemática*. Virginia: National Council of Teacher of Mathematics.
- Novaro, R. (s/f). “Libro y cuaderno de aritmética y geometría”. En SEP, *Mi libro y cuaderno de trabajo de quinto año. Instructivo para el maestro*. México: SEP, 25-29.
- Parra, C. (1994). “Cálculo mental en la escuela primaria”. En Parra, C y Saiz, I. *Didáctica de las matemáticas. Aportes y reflexiones*. Buenos Aires: Paidós, 219-272.
- Reys, R. (1995). “Estimación”. En Block, D. *La enseñanza de las matemáticas en la escuela primaria. Lecturas*. México: SEP, 41-49.
- Ruiz, L. (2006). “Aprendizaje y matemáticas. La construcción del conocimiento matemático en la escuela infantil”. En Chamorro, C. *Didáctica de las matemáticas*. Madrid: Pearson Prentice Hall, 1-38.
- Sánchez, E., Hoyos, V., y López, G. (2011). “Sentido numérico y pensamiento algebraico”. En SEP, *Aprendizaje y enseñanza de las matemáticas escolares*. México: SEP, 33-54.

- Saucedo, M. E., y Hermosillo, A. (2004). "Los libros de texto en la clase de matemáticas". En Ávila, A. *La reforma realizada. La resolución de problemas como vía del aprendizaje en nuestras escuelas*. México: SEP, 165-214.
- Segovia, I., Castro, E., Castro, E y Rico, L. (1989). *Estimación en cálculo y medida*. Madrid: Síntesis.
- SEP (1995). *Libro para el maestro. Matemáticas. Primer grado*. México: SEP.
- ____ (2011). *Programas de estudio 2011. Educación básica secundaria. Matemáticas*. México: SEP.
- ____ (2011). *Programas de estudio 2011. Guía para el maestro. Educación básica. Primaria. Sexto grado*. México: SEP.

Colaboradores

El INEE agradece a los miembros de los comités de expertos y docentes que contribuyeron con sus valiosas aportaciones en la elaboración de este material. Nuestro reconocimiento a todos ellos.

Lector externo

David Block Sevilla, Departamento de Investigaciones Educativas, CINVESTAV

Comité técnico de especialistas

María Esther Amador Gómez, Asesora independiente

María Margarita Tlachy Anell, Jefa de proyecto INEE

Mariana Vázquez Muñoz, Jefa de proyecto INEE

Comité didáctico de docentes

Gerardo Ramos Martínez, Aguascalientes

Víctor Manuel Roque Márquez, Aguascalientes

Luis Guadalupe Fuentes Orozco, Chihuahua

Naiki Susana Carrasco Urrutia, Chihuahua

Héctor Miguel Sánchez Anguiano, Colima

Alicia Essicka Saldaña Mañón, Estado de México

Leticia Ortega Alvarado, Estado de México

Enrique Corona Alarcón, Veracruz

Thelma Rosa Niquete Sabido, Yucatán

Coordinación del proyecto MAPE

Hidalía Sánchez Pérez



SENTIDO NUMÉRICO

MATERIALES PARA APOYAR LA PRÁCTICA EDUCATIVA

Se terminó de imprimir en abril de 2014 en los talleres
de Impresora y Encuadernadora Progreso, S.A. de C.V. (IEPSA).

En su formación se emplearon la familias tipográficas

Helvetica Neue LT Std y Dom Casual Std.

Esta edición consta de 5 000 ejemplares

SENTIDO NUMÉRICO es el nuevo título de la subserie Materiales para Apoyar la Práctica Educativa, con el cual el Instituto Nacional para la Evaluación de la Educación (INEE) busca contribuir a mejorar las prácticas de enseñanza de las matemáticas en la educación básica.

Está dirigido a todos los profesores con el interés de mostrarles que el desarrollo del sentido numérico puede dotar de significado a los conocimientos que los alumnos construyen en sus clases de aritmética y favorecer que se acerquen con agrado al mundo de los números.

En sus páginas se mencionan los contenidos de aritmética que, de acuerdo con los resultados de los Exámenes de la Calidad y el Logro Educativos (EXCALE), son difíciles para los alumnos de preescolar, primaria y secundaria. Asimismo, se muestra la riqueza de aplicar el sentido numérico para usar con flexibilidad y creatividad los números y la importancia de que los estudiantes desarrollen la habilidad para dar respuestas razonables a problemas. Este volumen incluye un CD con actividades y juegos que pueden ser adaptados a las necesidades del grupo y a la intención didáctica que cada docente persiga.



Descargue una copia digital gratuita



Comuníquese con nosotros



Visite nuestro portal

