EL CÁLCULO EN EL PRIMER CICLO DE PRIMARIA

JOSÉ RAMÓN GREGORIO GUIRLES (*)

INTRODUCCIÓN

Cuando hablamos de cálculo nos estamos refiriendo a dos tipos de cuestiones y trabajos matemáticos diferenciados:

- A las actividades y situaciones problemáticas específicamente destinadas a la comprensión y construcción de los conceptos de las operaciones básicas de este ciclo, y a la flexibilidad y el sentido numéricos relacionado con ellas.
- A las diferentes modalidades y herramientas que los alumnos/as pueden utilizar para realizar las operaciones de sumas y restas propias de este ciclo. Estamos hablando de cálculos mentales, cálculos con calculadora y cálculos realizados con lápiz y papel mediante los algoritmos de la suma y la resta.

Resulta evidente que, desde el principio, el trabajo de cálculo (en cualquiera de sus modalidades), debe estar ligado a la resolución de problemas, pues no dejan de ser herramientas que adquieren su sentido y dimensión real cuando sirven para ello (verdadero sentido de saber operar).

Algunas consideraciones de trabajo básicas relacionadas con el cálculo:

1. Las primeras actividades y problemas de cálculo deben servir para dotar de significado a las operaciones de sumar y restar. En esta primera fase de trabajo los procedimientos de resolución serán la manipulación y conteo con fichas, garbanzos, ..., la utilización de materiales que simbolizan números (cartas, dibujos, problemas gráficos, ...), y la utilización de las primeras y más sencillas estrategias de cálculo mental.

   A través de ellas, los alumnos deberán construir los conceptos de sumar y restar y empezar a resolver problemas. No estamos hablando del algoritmo; saber hacer sumas y restas no es lo mismo que saber sumar y restar. Saber sumar y restar significa saber, entre otras cosas, cuándo hay que utilizar cada operación e identificar situaciones problemáticas que se resuelvan con una u otra operación. Esta es la verdadera comprensión conceptual; el resto es decidir si lo haremos mentalmente, con calculadora o algorítmicamente.

2. En una segunda fase, debemos trabajar problemas y actividades encaminadas a la construcción y dominio de otras estrategias básicas de cálculo y a la automatización de las tablas de sumar y restar (cálculo mental automático y reflexivo).

3. La tercera fase será el trabajo específico en torno a los algoritmos de la suma y la resta (cálculos con lápiz y papel). Solamente deberemos proceder al aprendizaje de los algoritmos de sumas y restas cuando los alumnos/as hayan comprendido lo que significa sumar y restar, y cuando tengan un buen dominio numérico mental: descomposiciones de números de diferentes maneras, cierto dominio de las tablas de sumar y restar, sentido numérico y flexibilidad mental en los cálculos (dominio de diferentes estrategias).

(*) Asesor de la Etapa Infantil-Primaria del Berritzegune de Sestao.

El aprendizaje de los algoritmos de sumar y restar debe estar basado en la comprensión. Por tanto, debe ser un camino de aprendizaje en el que se utilicen diferentes estrategias mentales y escritas de resolución, y en el que los alumnos y alumnas tengan la oportunidad de investigar y construir diferentes maneras (algoritmos) de realizar sumas y restas, antes de llegar a los algoritmos académicos, que son la última etapa de ese recorrido por diferentes estrategias.

En este nivel de resolución algorítmica, es conveniente trabajar primero el algoritmo de la suma y después el de la resta. Las estrategias y algoritmos aprendidos para la suma tendrán una transferencia positiva para utilizar diferentes estrategias y algoritmos para restar.

4. La calculadora la podemos utilizar en cualquier momento, y desde el principio: para reforzar cálculos mentales automáticos, para hacer investigaciones y llegar a conclusiones numéricas y operacionales (sentido numérico), para apoyar las construcción de conceptos numéricos y de operaciones, para facilitar la exploración y la resolución de problemas, para darles mayor autonomía y confianza, ... Pensemos que la calculadora no deja de ser otra herramienta más que, bien utilizada, debe estar al servicio de la comprensión y la resolución de problemas matemáticos. Una buena utilización de la calculadora implica pensar y saber qué hacer con ella.

Así pues, la cuestión del cálculo no es tanto un problema de trabajar los diferentes tipos de cálculo por separado (un día cálculo mental, otro escrito, otro estrategias, otro...), sino un trabajo de integración y de progresión didáctica de actividades. En esta progresión, la comprensión y las matemáticas mentales resultan prioritarias (descomposiciones numéricas, flexibilidad y sentido numéricos, sumas y restas mentales, problemas con resolución mental o con calculadora). Este es el proceso más importante, el que garantiza una verdadera alfabetización matemática: pensar, entender, especular, construir conocimientos, … Pasar de puntillas sobre este proceso, centrando todos los esfuerzos y tiempo matemáticos en adiestrar a los alumnos en cómo hacer operaciones de sumas y restas, dejando a un lado la comprensión numérica y de las operaciones, supone en la mayoría de los casos conseguir alumnos analfabetos funcionales en matemáticas.

1ª FASE DE TRABAJO DEL CÁLCULO: HACIA LA COMPRENSIÓN DE LAS SITUACIONES DE SUMAR Y RESTAR Y LA UTILIZACIÓN DE LAS PRIMERAS ESTRATEGIAS DE RESOLUCIÓN

¿Qué podemos hacer los profesores/as para que los niños y niñas de primer ciclo de Primaria reinventen y construyan todo lo relacionado con el cálculo referido a las operaciones de sumar y restar?

1. Operaciones de sumar y restar

Las primeras actividades deben servir para dotar de significado a las operaciones de sumar y restar: ¿Qué es sumar?, ¿Qué es restar?

Cuando pretendamos introducir a los alumnos en el trabajo matemático de "enseñar y aprender a sumar y a restar", no debemos obviar que las primeras *actividades* deben estar *centradas en la comprensión y contextualización*, utilizando la conversación y el debate entre los alumnos/as como herramientas de actuación. Algunas actividades básicas que podemos plantear a los alumnos/as serían:

- Conversación-debate: *¿para qué sirve sumar en nuestra vida?, ¿para qué sirve restar en nuestra vida?*, ¿cuándo utilizan los mayores las sumas y las restas?, ¿puedes poner ejemplos?
- Preguntar en casa, recortar de periódicos y revistas, en anuncios de la tele, ... y traer ejemplos de situaciones y problemas en los que tenemos que sumar y/o restar:, ¿dónde hay sumas y restas en la vida real?
- Entonces, ¿qué es sumar y cuándo se usa?, ¿cómo se representan las sumas?, ¿qué problemas son de sumar?, ¿qué es restar y cuándo se usa?, ¿cómo se representan las restas?,¿qué problemas son de restar?. Conversación y conclusiones.

Es muy importante escuchar sus opiniones e ideas sobre lo que es sumar y lo que es restar. A partir de ellas podremos empezar a avanzar en la comprensión y a plantear las primeras situaciones de problemas que se puedan solucionar mediante sumas o mediante restas. Estamos hablando de comprensión, conversación y extracción de conclusiones comunes y funcionales (que nos permitan seguir avanzando).

2. Realización de problemas y actividades

Lo siguiente debe ser la realización de problemas y actividades de sumar y restar que se puedan resolver mediante manipulación y conteo, con los dedos, mediante dibujos, mediante cartas, mediante la recta numérica o mediante las primeras estrategias sencillas de cálculo mental. lo más relevante sigue siendo la comprensión de las relaciones que se dan en las sumas y las restas.

2.1. Orientaciones de trabajo

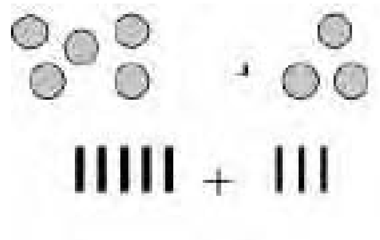
Ahora podemos empezar a plantearles, y a que ellos planteen también, las primeras situaciones problemáticas sencillas de sumas y restas de forma que en las primeras las sumas no pasen de 10 y las restas sean de una cifra menos otra. Las *orientaciones de trabajo* que les damos son las mismas en todos los casos:

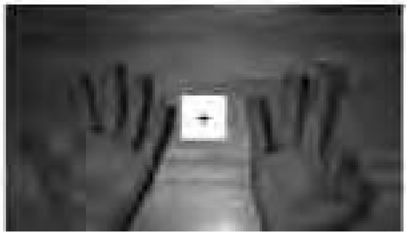
- Partimos de que no saben sumar ni restar, nosotros no explicamos nada de cómo se suma o cómo se resta, e iniciamos pequeñas investigaciones derivadas de los problemas.
- Buscamos soluciones por parejas o grupos, dejando total libertad para buscar la solución. Es importante preocuparnos de que todos entienden el problema: la situación inicial, la acción, la pregunta.
- Debemos estar atentos a todas las soluciones que dan, que en principio estarán relacionadas con aspectos manipulativos, representaciones gráficas, agrupamientos, ... y conteo. En un principio, la utilización de dedos, bolas, palotes, dibujos, agrupamientos... (conteo directo), serán los apoyos naturales para la resolución de la suma. Es una fase manipulativa necesaria, que nunca debemos cortar o inhibir. Más adelante ya buscaremos que la operación sea automática. No debemos tener prisa.
- Nuestro papel se centra en apoyarles en la búsqueda de soluciones y, cuando sea adecuado, sugerirles nuevas formas de resolución o nuevas formas de representación.
- Las primeras respuestas deben ser también orales, explicando cómo lo han resuelto. Es importante escucharles y ver si todos lo hacen igual o hay diferentes procedimientos para hacerlo.
- El siguiente paso debe ser el de extraer *conclusiones e institucionalizar el saber:* acordaremos y anotaremos las conclusiones que el grupo/aula saca de la experiencia. En este caso

pueden hacer referencia a las diferentes maneras de sumar que hemos utilizado: representando la suma mediante fichas, palotes, utilización de los dedos, ...

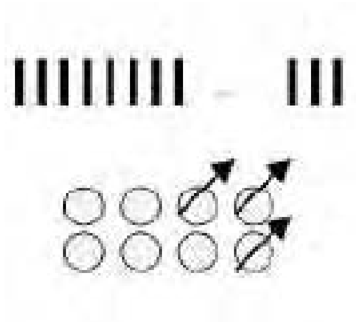
- Debemos acordar también la manera de representar matemáticamente el problema realizado: ¿cómo representamos esta suma?, ¿cómo representamos esta resta?. La representación de la operación la haremos en la forma **3+5 = 8, ó 8-5 = 3.**

"El sábado tenía 5 euros. El domingo mi madre me dio 3 euros. ¿Cuántos euros tengo ahora?"





Tengo 8 euros. Por la tarde me gasto 3. ¿Cuántos euros me quedan?



Es importante comparar ambos problemas (el de suma y el de resta), que discutan sobre ellos, que entiendan por qué en un caso se suman los números y en el otro se restan, e intentar hacerles pensar sobre la "curiosa coincidencia" de que 5+3=8 y que 8-5=3. ¿Esto qué significa?

Una vez resueltos estos dos primeros problemas entre todos, podemos proponerles otros problemas y pedirles que ellos, par parejas, se inventen uno para proponer a los demás. Lo importante es profundizar en la comprensión de lo que significa sumar y de lo que significa restar, de diferenciar las situaciones que son de suma de las que son de resta, y de resolver con herramientas que controlan y que no suponen una dificultad (manipulación y visualización). Problemas donde las operaciones a utilizar sean del tipo 5+4, 7+2, 6+3, 8+2...,8-2, 7-4, 9-4, ... Si ellos/as proponen otras con números más grandes, también se pueden resolver.

Las situaciones problemáticas planteadas pueden ser de diferentes tipos, aumentando poco a poco el nivel de dificultad lingüística y matemática, inventando nosotros o inventando ellos los problemas, planteando diferentes tipos de problemas. Sobre esto hablaremos en el apartado de resolución de problemas.

La manipulación directa con fichas, garbanzos, dedos, ... son actividades que debemos potenciar y en ningún caso inhibir. Facilitan la comprensión de los procesos de sumar y de restar y ayudan al alumno a encontrar una respuesta de la única manera que pueden hacerlo al principio: viendo, tocando, moviendo, comprobando que un todo se puede dividir en partes, que dos partes hacen otra mayor que es la unión de las dos, ...

2.2. Actividades y situaciones problemáticas

A través de la manipulación, de la utilización de cartas, de las representaciones gráficas de problemas y de la utilización de la recta numérica para representar problemas también se puede hacer un acercamiento a algunas otras actividades y situaciones problemáticas relacionadas con la comprensión de los procesos y las características de cada operación.

2.2.1. Juegos con los 5 ó los 10 dedos de una mano

- Si saco 2 dedos y luego 2 más, ¿cuántos tengo ahora?, ¿qué operación he hecho?, ¿cómo se representa matemáticamente?
- Si saco 5 dedos de una mano y 2 de la otra, ¿cuántos tengo ahora?, ¿qué operación he hecho?, ¿cómo se representa matemáticamente?
- Si tengo los 5 dedos de la mano y tapo 4, ¿ cuántos quedan?, ¿qué operación he hecho?, ¿cómo se representa matemáticamente?
- Si tengo los 10 dedos y tapo 8, ¿cuántos me quedan ahora?, ¿qué operación he hecho?, ¿cómo se representa matemáticamente?

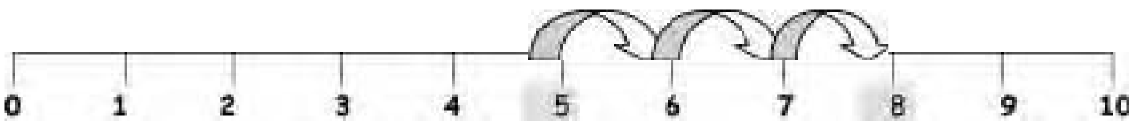
2.2.2 Juegos de cartas y de tablero de cálculo mental

Por falta de espacio, los detallaremos en el próximo número de la revista.

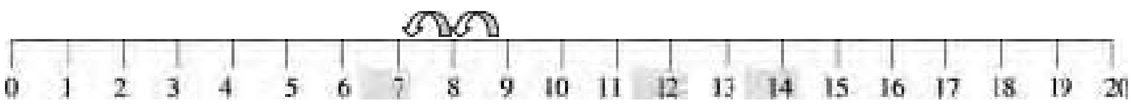
2.2.3. Actividades con la recta numérica

Muy importantes para la comprensión de los procesos y de algunas estrategias de sumar y restar.

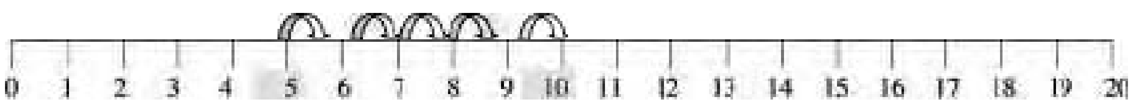
"Estás en el 5. Cuenta hacia adelante 3. ¿A qué número llegas? ¿Con qué operación se puede representar lo que hemos hecho?"



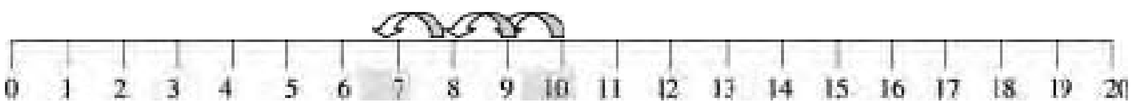
"Estás en el 9. Cuenta 2 números hacia atrás. ¿A qué número llegas? ¿Con qué operación se puede representar lo que hemos hecho?"



"Estás en el número 5. Cuenta hasta llegar al 10. ¿Cuántos números has contado?. ¿Con qué operación se puede representar lo que hemos hecho?"



"Estás en el número 10. Cuenta hasta llegar al 7. ¿Cuántos números has contado? ¿Con qué operación se puede representar lo que hemos hecho?"



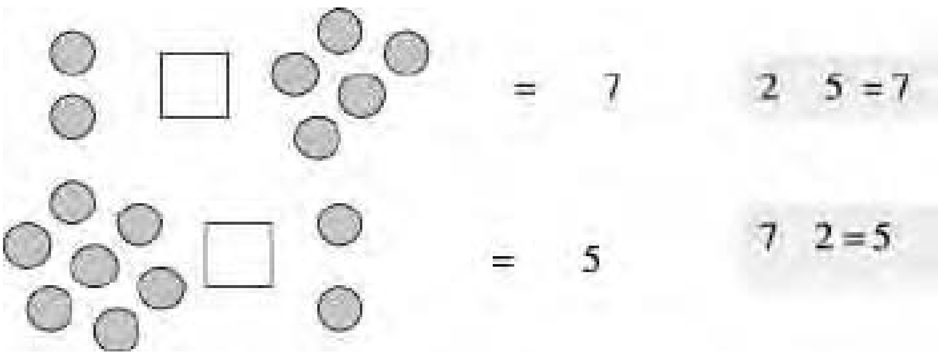
Es muy importante que los alumnos/as tengan un buen dominio de la recta numérica y sepan moverse con facilidad hacia arriba y hacia abajo. Hay dos fases de dominio en este trabajo:

- Movimientos por conteo directo: voy contando de 1 en 1. Muy sencillo.
- Movimientos por conteo complejo: conteo selectivo y de unidades. Voy contando de 1 en 1, de 10 en 10 o de 100 en 100, según me convenga. Además, hago conteos complejos: para ir del 4 al 10 no cuento de 1 en 1, sino aplicando el cálculo mental (del 4 al 10 seis).

En este caso, la práctica con actividades de recta numérica debe contemplar una progresión de actividades que vaya desde las más fáciles a las más complejas: del 3 al 9, del 4 al 12, del 10 al 24, del 4 al 23, del 30 al 90, del 300 al 900, …

Las actividades con conteo de dinero (euros) tienen una transferencia positiva respecto a las actividades de recta numérica y conteo complejo. Un juego especialmente interesante es el de "Contando euros".

2.2.4. Representación de problemas mediante dibujos
En lugar de hacerlo con fichas



Este tipo de actividades son interesantes para que los alumnos puedan establecer relaciones entre la suma y la resta como operaciones complementarias, de tal forma que si 2+5 = 7, entonces siempre se cumplirá que 7-2 = 5 y que 7-5 = 2.

2.2.5. Investigaciones de transformación y descomposición con sumas

Partiendo de la suma 4+3=7, realizada con fichas según el ejemplo. ¿Hay otras formas de conseguir el número 7 sumando dos números?. ¿Cuántas?. Hacerlo con las fichas.

Les estamos pidiendo que, cambiando las partes, conserven la cantidad total. Plantear el trabajo con fichas, manipulativa y visualmente, hace más fácil descubrir los secretos de la conservación del todo y de la igualdad matemática. Cada pareja deberá buscar sus propias maneras de hacerlo y de representarlo matemáticamente.

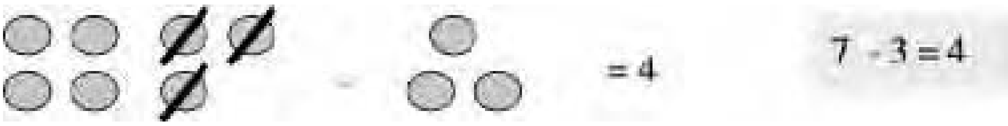
Estamos hablando de diferentes descomposiciones de un mismo número. Lo cual nos permite plantearles diferentes investigaciones en torno a descomposiciones numéricas:

- ¿De cuántas maneras distintas podemos conseguir el número 5 mediante sumas?. ¿Y el 6, y el 7, y el 8, y el 9?.
- ¿Cuántas maneras distintas hay de hacer 10 mediante sumas?.

Pero además, en este camino matemático, irán apareciendo otras característi-cas de las operaciones de sumar: si añadimos una ficha a un sumando, ¿cómo será el resultado?; ¿y si añadimos dos?. Esto nos da pie a introducir otras actividades de sentido numérico: "si 5+4 = 9, te puedes imaginar el resultado de estas otras operaciones": 6+4 = , 5+5 =, 6+5 = ...

2.2.6. Investigaciones de transformación con restas

Partiendo de la resta 7-3= 4, realizada con fichas según el ejemplo.
¿Hay otras formas de conseguir el número 4 restando dos números? ¿Cuántas?

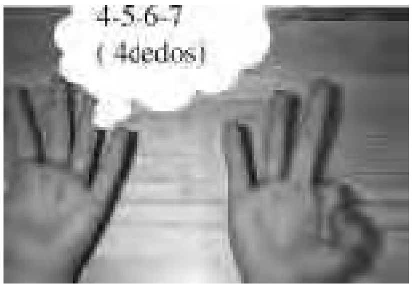


En este caso les estamos planteando investigar algo más difícil: que, para conservar el resultado, deberemos quitar a los dos números un número igual, o también añadir. Cada pareja deberá buscar sus propias maneras de hacerlo y de representarlo matemáticamente.

En este camino matemático irán surgiendo otras cuestiones importantes:

- Utilizando sólo números del 1 al 10: ¿hay muchas formas de conseguir el 5 mediante restas? ¿Y de conseguir el 10?. Hacer todas las restas posibles de 10 menos un número de una cifra.
- Si 8-5 = 3, te puedes imaginar el resultado de estas otras operaciones:

  9-5 = 8-4 =
- ¿Se puede convertir una resta en una suma? Es decir, ¿hay alguna otra forma que se os ocurra de realizar una resta sin que tengamos que colocar las fichas y verlo?. Imagina que lo puedes hacer con los dedos. No es una cuestión fácil de imaginar al principio, pero con un poco de ayuda les estaremos dotando de otra estrategia de restar manipulando con los dedos, a la vez que una ampliación del concepto de restar.



En la resta 7-3, ¿cuánto le falta al 3 para llegar al 7?. Y esto es un problema sencillo de conteo: 4-5-6-7 (cuatro números; resultado 4). Esta estrategia apenas tiene utilidad en los problemas que ahora estamos resolviendo (no mejora la resolución que hacen con las fichas), pero más adelante, nos permitirá resolver fácilmente problemas con números más grandes (para los cuales la estrategia de las fichas también sirve, pero se va volviendo cada vez menos eficaz).

En la puesta en común de todas estas investigaciones, la institucionalización del saber estará relacionada con expresar de forma sencilla las diferentes propiedades de la suma y de la resta. Por supuesto, no se trata de hacer grandes formulaciones teóricas, sino de que crezcan en la comprensión de las relaciones entre los diferentes términos que aparecen en una suma y en una resta. La comprensión de estas relaciones nos permitirá seguir avanzando en otras cuestiones de numeración, cálculo mental, operaciones y resolución de problemas.

2.2.7. Actividades de comparación

Son situaciones de trabajo que pretenden construir relaciones y conceptos relacionados con expresiones como "2 más que...", "3 menos que ...", delicadas de comprender lingüística y matemáticamente para los niños de esta edad, a la hora de resolver problemas, si no es viéndolo.

Yo tengo	Tú tienes
■ ■ ■ ■ ■	■ ■ ■

¿Quién tiene más?
¿Cuántas más?
¿Cuántas me sobran para tener las mismas que tú?
¿Cuántas te faltan para tener las mismas que yo?

¿Quién tiene menos?
¿Cuántas menos?

2.2.8. Actividades o problemas de repartos,

Son situaciones problemáticas que tienen una transferencia positiva con la comprensión de las operaciones de sumar y restar, e inician en los conceptos de multiplicar y dividir:

- Repartos uniformes: “Alex e Idoia se quieren repartir 4 caramelos. ¿Cuántos les tocan a cada uno?”

De esta manera sencilla podemos proponer diferentes problemas en los que tengan que plantearse efectuar diferentes repartos. La discusión de las relaciones que se establecen resulta de lo más interesante. Y, además, podemos representar matemáticamente los repartos que hemos realizado: 5+5=10, 10:2 = 5, 4+4 = 8, 8:2 = 4, ...

- Repartos no uniformes: “reparte 4 gominolas entre dos niños de todas las maneras posibles”

2.2.9. Primeras actividades de series en la recta numérica

- ¿Si cuento de dos en dos a partir de 0, qué números son los que selecciono?

  ¿El 10 está entre esos números? Imagina que son personas que van a un baile. ¿Pueden formar parejas, bailando todos de dos en dos y sin que sobre ninguno?

- ¿Y si cuento de dos en dos a partir de 1, qué números son los que selecciono?

  ¿El 9 está entre esos números? Imagina que son personas que van a un baile. ¿Pueden formar parejas, bailando todos de dos en dos y sin que sobre ninguno?

  ¿Qué tienen de especial cada una de las dos series de números?

1.3 Conclusiones

RESUMIENDO, en un primer momento, los garbanzos, alubias o fichas (manipular, pensar, contar), y el uso de materiales y representaciones que simbolizan números y situaciones (representar, ver, pensar, contar), constituyen herramientas poderosas para comprender las relaciones y procesos de las operaciones de sumar y restar, y para representar y resolver diferentes situaciones problemáticas sencillas de sumas y restas. Además, el uso de los dedos de las manos nos permite también realizar todas las sumas y restas sencillas. Tan solo hay que mostrarles algunas estrategias elementales de conteo:

- Estrategias de sumar. Para hacer 5+4 , los niños sacan los cinco dedos de una mano y cuatro de la otra. En un primer momento, todos cuentan de uno en uno los nueve dedos. Pero luego, les podemos enseñar a empezar siempre por el mayor y sin contarlo. En este caso, los cinco dedos de la primera mano no los contamos, pero decimos 5, y luego contaríamos 6-7-8-9 (los cuatro dedos de la otra mano). Esta estrategia nos permite ampliar la utilización de los dedos para hacer sumas más complejas. Así por ejemplo, 8+4 será decir 8 y contar cuatro dedos (9-10-11-12).

- Estrategias de restar. Para hacer restas sencillas no hay problema, pero ¿qué pasa cuando el número supera a los diez dedos que tenemos?. Una estrategia muy sencilla es convertir la resta en una suma. Si queremos hacer 12-7, convertir la resta en suma supone pensar cuánto le falta a 7 para llegar hasta 12. Y esto sí lo podemos hacer con los dedos. Decimos 7, y empezamos a contar: 8 (un dedo), 9 (dos dedos), 10 (tres dedos), 11 (cuatro dedos) y 12 (5 dedos); resultado, 5.

En ambos casos, la utilización de actividades en la recta numérica permite reforzar el dominio de estas estrategias básicas de conteo.

Nadie debe tener miedo a la utilización de los dedos. Cuando los niños desarrollen otras estrategias y automaticen las operaciones de suma y resta que pretendemos, abandonarán los dedos. Pero mientras no automaticen, es una estrategia que les soluciona problemas. Más adelante también la podrán utilizar para hacer otras operaciones más complejas (26 + 5). Pero nunca representan un obstáculo para el cálculo mental, sino una ayuda.

2ª FASE DE TRABAJO DEL CÁLCULO: HACIA EL CÁLCULO MENTAL Y LA UTILIZACIÓN DE NUEVAS ESTRATEGIAS DE RESOLUCIÓN DE SUMAS Y RESTAS

En esta fase de trabajo, aunque los aspectos de comprensión siguen siendo importantes y no debemos perderlos de vista, los objetivos están relacionados con:

- la automatización de sumas y restas sencillas. Son en realidad las tablas clásicas de sumar y restar, más algunas otras sumas y restas sencillas con decenas y centenas exactas (Ver artículo anterior: *SIGMA* nº 24)
- el trabajo en torno a estrategias numéricas y el cálculo mental reflexivo.

1. Estrategias numéricas

El planteamiento y las orientaciones de trabajo son similares al realizado hasta ahora. Pero empezamos *planteando situaciones problemáticas en las que tengan que investigar, discutir y resolver operaciones de sumas y restas que incluyan operaciones de hasta 10+10 y de restas del tipo 15-8, 17-9, ...* Son las operaciones que consideramos cálculo mental automático. Lo relevante sigue siendo la comprensión de los procesos de sumar y restar, y el comienzo de las actividades de automatización de sumas y restas sencillas.

"Cuando voy a la escuela por la mañana tengo 7 canicas, pero a la salida mi tío me compra 5 más. ¿Cuántas canicas tengo ahora?"

" Mi amiga tenía 12 euros. Se gasta 5. ¿ Cuántos le quedan?"

Ante estas situaciones, en las que aparecen números de dos cifras, lo importante sigue siendo reforzar los procesos de comprensión, que les harán decidir si una operación es de sumar o de restar, y las estrategias que conocen y aplican para llegar a la solución. Los alumnos/as aplicarán las diferentes estrategias de resolución que ya conocen:

- manipulación con fichas...
- representación de la operación mediante dibujos de las canicas o euros.
- utilización de los dedos de las manos para representar las operaciones.

Debemos buscar, además, que, después de la utilización de cualquiera de estas estrategias de conteo, se produzcan la verbalización (comunicación) y la representación matemática del problema y su solución:

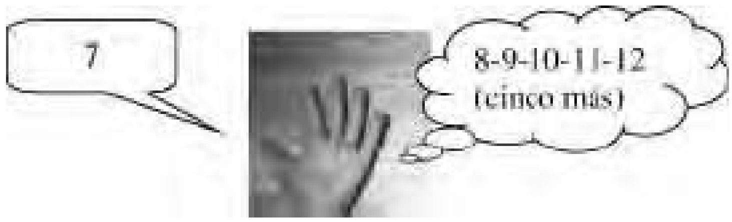
$$7+5 = 12 \qquad 12–5 = 7.$$

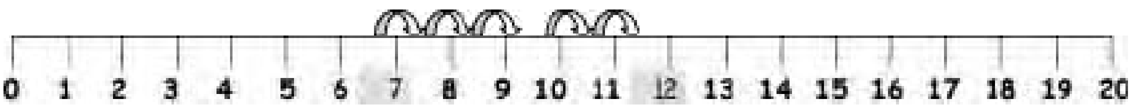
Todos estas estrategias de resolución siguen siendo válidas en la medida que les sirven para resolver los problemas. Pero algunas de ellas empiezan a presentar inconvenientes derivados del aumento de fichas o dibujos de fichas a utilizar. Puede ser el momento de empezar a llegar a acuerdos con ellos en torno a priorizar las estrategias de utilización de dedos, por ser más rápidas y eficaces. Esta estrategia se puede reforzar además con la utilización de la representación de las operaciones a través de la recta numérica. El dominio de estas estrategias les capacitarán para resolver cualquier operación sencilla de suma o de resta.

1.1. Estrategias para sumar

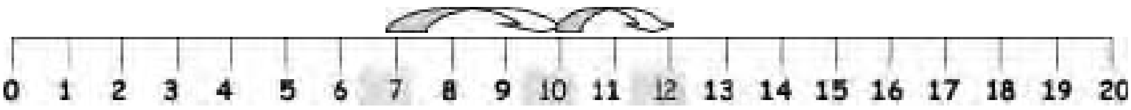
Si tengo que resolver 7+5, la estrategia más potente para ellos, en este momento, es partir del número 7 y empezar a contar 5 números más

Esta estrategia les permite ampliar la utilización de los dedos para hacer todas las sumas sencillas de cálculo mental automático.





Unida a esta actividad de la recta numérica, y además del conteo directo, un trabajo estratégico muy interesante es empezar a sugerirles la idea de trabajar este tipo de sumas buscando el 10 (otra forma más de hacer descomposiciones numéricas mentalmente). Si queremos hacer 7+5, como ya a estas alturas hemos trabajado descomposiciones numéricas básicas, resulta fácil descomponer el 5 en 3+2. Y entonces buscamos el 10:



$$7+5= \quad \mathbf{7+3}\underline{+2}= \quad \mathbf{10}+2= 12.$$

De esta manera, podremos proponerles diferentes actividades y ejercicios de sumas para realizar descomposiciones. Aunque las representemos o escribamos al principio, el objetivo es que se conviertan en estrategias mentales: 7+5 es mentalmente "sieteytresdiezydosdoce". Debemos estar especialmente atentos en escucharles y cerciorarnos de que comprenden el proceso que realizan. En realidad, las posibilidades de cálculo mental a interiorizar son pocas:

- al 6 le faltan 4 para llegar a 10. Luego, cualquier número que le sumemos lo descompondremos en 4 más otro número: 6+5= 6+4+1=11 (mentalmente).
- al 7 le faltan 3 para llegar a 10. Luego, cualquier número que le sumemos lo descompondremos en 3 más otro número: 7+6= 7+3+2=12
- al 8 le faltan 2 para llegar a 10. Luego, cualquier número que le sumemos lo descompondremos en 2 más otro número: 8+6= 8+2+4=14

- al 9 le falta 1 para llegar a 10. Luego, cualquier número que le sumemos lo descompondremos en 1 más otro número: 9+7= 9+1+6= 16

Una aplicación de esta estrategia, planteada como paso intermedio antes de automatizarla, es la siguiente (si no estás seguro puedes usar la calculadora):

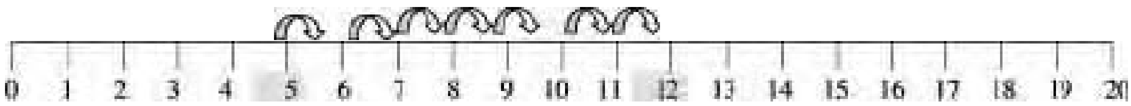
9+8 =	9+1+7=	10+7	17
8+6 =			
7+4 =			
6+5 =			

1.2. Estrategias para restar

Si tengo que resolver 12-5, la estrategia más potente para ellos, en este momento, es convertir la resta en suma y, partiendo del 5, preguntarse cuántos números faltan para llegar a 5 contando hacia abajo en la recta numérica.

Y esto sí lo podemos hacer con los dedos. Decimos 5, y empezamos a contar: 6 (un dedo), 7 (dos dedos), 8 (tres dedos), 9 (cuatro dedos), 10 (5 dedos), 11 (6 dedos) y 12 (7 dedos): resultado 7."

Esta estrategia les permite ampliar la utilización de los dedos para hacer todas las restas sencillas de cálculo mental automático.



Igualmente, podemos hacer el conteo mental buscando el 10: del 5 al 10 (5), y del 10 al 12 (2): 12-5= 7. La recta numérica también ayuda.

Como en el caso de la suma, el objetivo es que se convierta en una estrategia mental: 12-5= "de5a10<u>cinco</u>yde10a12<u>dos</u>" = 7. En realidad, es la operación mental complementaria de la utilizada para la suma: 12-5 = 7+5–5 = 7. Si encuentro un número que sumado con 5 de 12, entonces he encontrado la solución de 12-5. Luego, las actividades que potencian la automatización de las sumas potencian también la de las restas.

Una aplicación de esta estrategia, planteada como paso intermedio antes de automatizarla, es la siguiente (si no estás seguro puedes usar la calculadora):

15-9 =	9 al 10 y 10 al 15	1+5	6
12-6 =			
11-5 =			
14-7 =			
17-8 =			
...			

¿Eres capaz de hacerlo mentalmente ahora con otras operaciones?

A partir de aquí, todas las actividades e investigaciones planteadas en la fase anterior pueden ser planteadas de nuevo: juegos de cartas, actividades de la recta numérica, representación de problemas, investigaciones con sumas y restas, actividades de comparación, actividades de repartos, actividades de series.

2. Automatización de opertaciones sencillas

Es interesante también introducir desde el principio los problemas de sumas y restas sencillas con "dieces" (decenas exactas), "cientos" (centenas exactas) y miles (millares exactos)

"Tengo *40 cromos de la colección y he comprado 20. ¿Cuántos cromos tengo ahora?"*

"Una moto vespa pesa 100 kilos y un coche fiat-punto pesa 500 kilos.
¿Cuánto kilos pesan entre los dos?"

Las orientaciones pueden ser las mismas que en las situaciones anteriores. Pero en este caso, las estrategias de manipulación y conteo van a resultar insuficientes a partir del primer problema. ¿Qué podemos hacer para realizar estos cálculos de manera sencilla y sin equivocarnos?. La herramienta que nos va a permitir responder a la pregunta y, a la vez, construir conocimiento numérico y operacional es la calculadora. En el momento del atasco les podemos proponer resolverlos con la calculadora y, además, solucionar otros problema similares.

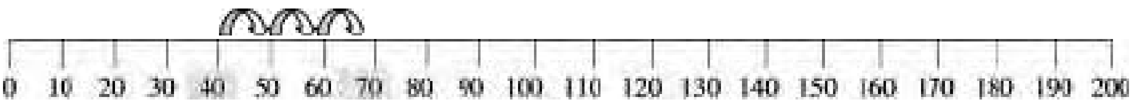
Resolver con la calculadora, comentar por parejas los resultados y encontrar alguna "formula mágica" para sumar números de este tipo.

Sumas	Restas	Conclusiones
20 +30 =	80-40=	
50+20 =	50-20 =	
100+600 =	600+100 =	
300+500 =	500-300 =	
4.000+4.000 =	6.000-3.000 =	
5.000+5.000 =	9.000-5.000 =	
...	...	

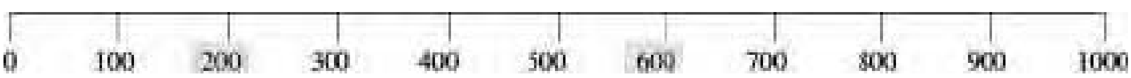
Intentad hacer los problemas ahora. ¿Es fácil?

También la recta numérica nos sirve para acercarnos más fácilmente a este tipo de sumas y restas y encontrar con rapidez la solución.

40+30 =



200+400 =



De la misma forma, es interesante realizar el trabajo con series numéricas de 10 en 10, de 100 en 100, de 1.000 en 1.000 (actividad de numeración): ¿qué pasa si al 0 le sumamos de manera repetida 10 con la calculadora?, ¿ y si le sumamos 100?, ¿y si le sumamos 1.000?

3. Cálculo mental

A partir de aquí, es el momento de empezar con los alumnos/as actividades relacionadas con el CÁLCULO MENTAL: cálculo mental automático y cálculo mental reflexivo.

3.1. Cálculo mental automático

Hace referencia a todos aquellos cálculos que queremos que nuestros alumnos, al acabar el ciclo, dominen automáticamente ("de memoria"): tablas de sumar y restar y algunas operaciones con decenas, centenas y millares exactos ("dieces", "cienes" y miles). Ver propuesta de acuerdos iniciales en el artículo anterior.

¿Cómo se consigue AUTOMATIZAR que, por ejemplo, 8+6 = 14?. Lo único que deberemos procurar es que los alumnos tengan que hacer actividades y juegos en los que sea necesario utilizar 8+6. Y después de averiguarlo por cualquier medio, verlo, decirlo en voz alta, escucharlo, escribirlo, ... muchas o "más veces" el proceso se habrá completado. Sin duda, un prerrequisito básico para avanzar en este dominio es partir, por parte del profesor/a, de una actitud de paciencia pedagógica, de que las cosas no se aprenden de un día para otro, y de que tenemos tiempo para hacerlo en clase. Otro prerrequisito básico es entender que el proceso de trabajo (la manera de aprender) es muy importante: que la calidad de lo que aprenden está condicionada por cómo lo aprenden y que, por tanto, debemos procurar respetar al máximo este proceso de aprendizaje de automatismos que va desde lo estrictamente manipulativo hasta el dominio automático. En este continuo, cada alumno/a necesitará manipular, oír, leer, escribir o decir un número de veces determinado y propio, el que él necesite, antes de automatizar. Pretendemos que los alumnos/as sepan decir el resultado de una suma o de una resta sencillas automáticamente, "sin pensar", lo cual no es lo mismo que decir "que no tengan que pensar mientras están aprendiendo" o que no lo hagan "con cabeza".

Las estrategias de manipulación, representación y utilización de los dedos de las manos siguen siendo válidas en la medida que representan estrategias con la que los niños resuelven problemas. Y especialmente la utilización de los dedos es una estrategia fundamental, en esta edad, para reforzar y facilitar el tránsito hacia el cálculo mental automático. Algunas otras herramientas importantes, para trabajar la automatización son:

3.1.1. La calculadora

Es una buena herramienta para trabajar el cálculo mental automático.

- Nos sirve para averiguar inmediatamente el resultado de una operación; y será otra vez más que hemos visto que 8+6=14. Y quizás, en la siguiente ocasión que tengamos que utilizar la misma operación ya podremos decir eso de "ésta ya me la sé" (memorización).
- Nos permite al principio hacer series de cálculo mental automático con ella. ¿Crees que la calculadora funciona bien?. Haz las operaciones con la calculadora y opina.

	Cálculo mental	Calculadora		Cálculo mental	Calculadora
3+8=		10-3=			
2+6=		9+2=			
2+5=		4+3=			
7-2=		6-5=			

Primero, con la calculadora, pero luego mentalmente y comprobar con la calculadora.

3.1.2. Cuadro de doble entrada

Una actividad muy enriquecedora es la de construir las tablas de sumar mediante un cuadro de doble entrada.

Se construyen en grupo, pero cada uno completa la suya. Menos la calculadora, valen todos los métodos. Esta "chuleta" se puede plastificar y tener siempre a mano como "calculadora de papel".

+	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
2	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
3	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
4	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
5	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
6	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
7	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
8	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
9	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
10	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20

Las tablas de sumar incluyen también las de restar. Sólo las tenemos que mirar de otra forma. Buscar 15-8 es buscar en la fila del 8 dónde da 15 y mirar a qué columna pertenece (7). Lo cual nos acerca a la idea de complementariedad de las operaciones de suma y resta: Si 8+7 = 15, entonces también será cierto que 15-8 = 7 y que 15-7 = 8.

Pero, lo que resulta realmente interesante y constructivo es hablar sobre cómo la han hecho, las regularidades que han encontrado que les han facilitado completar la tabla, las curiosidades numéricas. Algunas ideas a resaltar sobre este tema será fácil que aparezcan, otras, no tanto. Sobre estas últimas nosotros también podemos aportar ideas. Por resumir, he aquí algunas ideas interesantes respecto al cuadro de las tablas de sumar:

- la fila y la columna del 0 es fácil de rellenar: cualquier número sumado a 0 siempre da el mismo número.
- la fila y la columna del 1 también es muy fácil de rellenar: sumado a cualquier número da el siguiente.
- la fila y columna del 2 es también fácil, aunque sólo sea por conteo salteado.
- cada fila se puede rellenar añadiendo un número más al que está en la fila superior. Y, en realidad, cada fila y cada columna es una serie numérica de uno en uno que empieza con el propio número: él, el siguiente, el siguiente del siguiente, ...
- la fila y columna del 10 también es muy fácil de rellenar: 10 y 9, 10 y 8, 10 y 7..., a pesar de que los números del 11 al 15 representan excepciones en la lectura de números.
- la diagonal que va de arriba-izquierda abajo-derecha son todos números pares y son los dobles de los números: 2+2, 3+3, 4+4, 5+5, ... 10+10. En realidad, esta diagonal divide al cuadro en dos partes exactamente iguales (propiedad conmutativa de la suma).
- las diagonales inmediatamente paralelas a la anterior (por los dos lados) son la serie de números impares. Son la suma de números consecutivos: 0+1, 1+2, 2+3, 3+4,...

- la otra diagonal (arriba-derecha abajo-izquierda) es siempre 10, y representa todas las formas de hacer 10 con la suma de dos números: 10+0, 9+1, ... (descomposiciones del 10).
- las demás diagonales paralelas a la anterior son siempre el mismo número: nueves, ochos, ... hasta llegar al 0 (en una dirección), y onces, doces, ... hasta llegar al 20 (en la otra dirección). Y, en realidad, representan todas las formas que hay de hacer 9 sumando, todas las formas de hacer 8, ... Esta diagonal divide la tabla en dos partes: una todas las sumas menores de 10 (9+0, 8+1, 7+2, 6+3, 5+4, 8+0, 7+1, 6+2, 5+3, 4+4, 7+0, 6+1, 5+2, 4+3, ...); la otra, todas las sumas mayores de 10 (10+1, ...).

La comprensión de las relaciones que aparecen en la tabla facilita extraordinariamente la automatización de las sumas sencillas. De los aprendizajes más sencillos podemos pasar a los más difíciles de recordar. Más sencillos son sumar 1, sumar 2, sumar 10, hacer los dobles, las sumas que dan menos de 10, las combinaciones del 10. A partir de ellos, y aplicando diferentes estrategias y propiedades de las operaciones, podemos intentar decir los demás: si 7+3 = 10, entonces (como en un sumando hay uno más) 7+4 = 11; buscando el 5, buscando el 10, ...

3.1.3. Hacer series numéricas escritas de cálculo mental

Las podemos utilizar para trabajar de manera específica algunas “tablas” o determinadas sumas o restas que les cuesten más.

7+5=	8+5=	9+5=
6+5=	7+4=	3+6=
4+6=	7+7=	6+3=
8+2=	4+8=	8+4=

Se realizan en uno o dos minutos y al principio siempre con la misma operación. Más adelante se pueden alternar series de sumas y restas. Luego, se corrigen con la calculadora y cada alumno/a anota sus resultados. Cada uno puede apuntar los que falla en un cuadro de tablas en blanco, para saber las que tiene que mejorar. Y el profesor podrá utilizarlo para ajustar mejor otras series y actividades.

Las series escritas permiten, además, trabajar intencionadamente determinadas estrategias numéricas sencillas, que nos pueden ayudar en el proceso de automatización. Por ejemplo:

- si 5+5 = 10, entonces ¿qué será 6+5?, ¿y 7+5?
- Si 7+5 = 12, entonces ¿qué será 7+7?, ¿y 7+9?
- Rellena las soluciones de las sumas del cuadro anterior, sabiendo que 7+5 = 12. Comentamos cómo lo hacemos.

3.1.4. Hacer series orales de operaciones

Las series orales o preguntas directas a los alumnos/as sobre las tablas de sumar pueden ser un asunto delicado, debido a un problema de interferencia emocional. “Dejar en ridículo” a nuestros alumnos, preguntándoles en voz alta cosas que no saben, no tiene ningún sentido pedagógico. Por ello, resulta prudente dejar las series orales para el final, cuando vemos que la mayoría ya casi “se las sabe”. Algunas variantes de trabajo:

- “LA PELOTA”: juego cooperativo para toda la clase. El que empieza tiene una pelota en la mano, que lanza a otro compañero mientras le pregunta una suma (¿5+4?); éste contestará y lanzará la pelota a otro... El juego acaba cuando todos han recibido la pelota y contestado a una suma o resta, pero sólo se gana como grupo cuando todos han respondido correctamente.

- Juego anterior competitivo por equipos: a preguntarse series de tablas. Sólo para “expertos”.
- Series orales individuales. Las puede hacer el profesor en 5 minutos. Al igual que las escritas, se pueden organizar fácilmente, y dirigirse a aprendizajes automáticos específicos. Hay que tener la precaución pedagógica de no preguntar a alguien algo que sabemos que no responderá bien. El objetivo sigue siendo el mismo: hacer que se oigan y se digan muchas veces determinadas sumas y restas sencillas.

3.1.5. Utilizar juegos para automatizar operaciones sencillas de sumas y restas

Por falta de espacio en este número de la revista, lo detallaremos en el próximo número.

No saberse las tablas nunca debe ser un obstáculo para resolver problemas, comprender y pensar en soluciones. Para salvar esta dificultad, y mientras llega la automatización, siempre podemos usar otros medios: dedos, tablas plastificadas, calculadora.

3.2. Cálculo mental reflexivo

Estamos hablando de dominar algunas estrategias numéricas y de tener las suficientes habilidades y “reflejos” numéricos (sentido numérico), que nos sirvan para calcular mentalmente, sin necesidad de recurrir siempre a los algoritmos. En definitiva, de la COMPRENSIÓN de los procesos y estrategias a utilizar y de la utilización flexible e inteligente de los números y operaciones. Por tanto deberemos esforzarnos en plantear actividades donde lo importante sea pensar. Y, de nuevo, la explicación directa por parte del profesor/a no suele ser la mejor estrategia para que ellos piensen.

En el artículo anterior (*SIGMA* nº 24), ya aparecía una propuesta de algunas estrategias numéricas básicas (acuerdos iniciales). La mayoría de estas estrategias se plantean a través de actividades que se realizan al trabajar numeración: truncar números, utilizar las descomposiciones numéricas con números plenos de significado (65= 60 + 5), redondear, estrategias de aproximación-estimación de resultados, de lectura, interpretación y escritura de números, comparar, ordenar y representar números. Estas actividades ya aparecían en el artículo mencionado. Con el resto de las estrategias, el trabajo lo realizaremos, básicamente, por medio de las *investigaciones numéricas* de los alumnos, y a través de *juegos:*

3.2.1. Investigaciones numéricas

Una herramienta útil para realizarlas es la CALCULADORA. Con ella, de manera rápida, podemos hacer operaciones y llegar a conclusiones. Nuestra labor importante será plantear buenas investigaciones, fomentar el debate y ayudarles a construir las conclusiones. Algunos ejemplos de trabajo de estrategias a través de pequeñas investigaciones son los siguientes:

- ¿Qué le pasa a un número cuando le sumamos 1? ¿Y cuando le restamos 1? Haz estas operaciones con la calculadora y di qué te parece (conclusiones). ¿Puedes explicar por qué?. Implicaciones didácticas: serie numérica, contar hacia arriba (subiendo), contar hacia abajo (bajando) de uno en uno.

	+ 1	-1	Conclusiones
1			
5			
10			
...			

- ¿ Qué le pasa a un número si primero le sumamos 1 (2, 10 ...) y al resultado le restamos 1 (2,10 ...)? Implicaciones didácticas: asociar añadir uno y quitar uno con el mismo número (...).
- ¿Qué pasa si al número 0 le sumamos 2 de manera continua (a lo que dé le volvemos a sumar dos...? Utilizad la calculadora si queréis. Estos números tienen algo especial. Averiguadlo por parejas. Implicaciones didácticas: números pares y series del dos.

0	2									

Actividad complementaria: si somos 18 en clase, ¿nos podemos sentar por parejas sin que nadie se quede sólo?.

- ¿Qué pasa si al número 0 le sumamos 4 de manera continua? ¿Y si le sumamos 8? Utilizad la calculadora si queréis. Estos números tienen algo especial. Averiguadlo por parejas. Implicaciones didácticas: series, dobles y mitades

0	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
0	4									
0	8									

- ¿Qué pasa si al número 1 le sumamos 2 de manera continua? Utilizad la calculadora si queréis. Estos números tienen algo especial. Implicaciones didácticas: números impares.

1	3								

Actividad complementaria: si somos 19 en clase, ¿nos podemos sentar por parejas sin que nadie se quede sólo?

- ¿Qué pasa si al número 0 le sumamos 3 de manera continua? ¿Y si le sumamos 6? Implicaciones didácticas: series del tres y del seis, dobles y mitades.

0	3									
0	6									

- ¿Qué pasa si al número 0 le sumamos 5 de manera continua? ¿Y si le sumamos 10? Implicaciones didácticas: series del cinco y del diez, dobles y mitades.

0	5									
0	10									

- ¿Qué pasa si al número 0 le sumamos 100 de manera continua? ¿Y si le sumamos 1.000? Implicaciones didácticas: series del 100 y del 1.000.

0	100									
0	1.000									

- ¿Qué pasa si a cualquier número le sumamos 10? Haz las operaciones con la calculadora y comenta con tus compañeros de grupo alguna conclusión (regla numérica) que podamos sacar (y que nos permita incluso dejar de usar la calculadora). ¿Y si les sumamos 100? ¿Y si les sumamos 1.000?

	+ 10	+100	+ 1.000	Conclusiones
0				
5				
10				
18				
25				
...				

- ¿Qué pasa si a cualquier número le restamos 10 ? ¿Y si les restamos 100? ¿ Y si les restamos 1.000?
- ¿Qué pasa si a un número lo multiplicamos por 2? ¿Y si lo multiplicamos por 4?

	x2	x4	x10	x5	Conclusiones
1					
4					
5					
10					
50					
...					

¿Y qué pasa si a un número lo multiplicamos por 10? ¿Y si lo multiplicamos por 5?

- ¿De cuántas maneras podemos descomponer el número 15 en suma de dos números? ¿Y si uno de los números tiene que ser 10?
- ¿Existe alguna manera de calcular la mitad de 100? ¿Y el doble de 100? ¿Y la mitad de 80? ¿Y el doble de 80? ¿Y el doble de 25?

3.2.2. Juegos

También podemos utilizar los JUEGOS para trabajar algunas estrategias relacionadas con el sentido numérico y la facilidad para operar con números.

Por falta de espacio en este número de la revista, lo detallaremos en el próximo número.

3ª FASE DE TRABAJO DEL CÁLCULO: EL CALCULO ESCRITO Y LAS DIFERENTES ESTRATEGIAS Y ALGORITMOS DE RESOLUCIÓN

La clave de este trabajo de aula es la RESOLUCIÓN. Es decir, que los alumnos/as, al acabar el ciclo, sean capaces de realizar algorítmicamente operaciones de sumar y restar. Evidentemente, este trabajo de aprendizaje de los algoritmos debe ir unido a la resolución de problemas, verdadero sentido de saber operar.

Ahora bien, no todo es ni debe ser cálculo escrito: algunas operaciones sencillas deben ser de cálculo mental, otras más complejas pueden ser realizadas con lápiz y papel y, el resto, pueden ser realizadas directamente con la calculadora. Una vez que uno sabe sumar y restar es capaz de hacerlo con cualquier suma, y la práctica continua de algoritmos no mejora la destreza. O sabes o no sabes. Además, reducir las matemáticas a un continuo hacer sumas y restar provoca una pereza mental y cognitiva (léase aburrimiento), que no contribuye en nada a la consecución de los objetivos de matemáticas. Es importante, por tanto, no "inundar" el trabajo y tiempo matemáticos con práctica de operaciones y más operaciones. Respecto a esto ya tenemos un acuerdo de operaciones, que aparece en el primer artículo de este proyecto matemático, publicado en la revista *SIGMA* nº 24: *Un Proyecto Matemático para el primer ciclo de Primaria.*

Respecto al proceso de enseñanza-aprendizaje de los algoritmos, partimos de plantear a los alumnos/as la invención de maneras propias (algoritmos personales) de resolver sumas y restas, acabando en la reconstrucción y aprendizaje de los algoritmos académicos de la suma y de la resta.

Hasta ahora nos hemos dedicado a trabajar para dotar de significado y comprender las operaciones de sumar y restar mediante la realización de problemas y actividades de sumar y restar, que los alumnos/as puedan resolver mediante manipulación, con los dedos o mediante cálculo mental. Es el momento de plantearles nuevos problemas que pongan a prueba lo que saben, que pongan en crisis las estrategias que dominan y que les hagan explorar otras nuevas con las que resolver las nuevas sumas y restas a las que deberán hacer frente. A través de ellas podremos llegar a la reconstrucción y aprendizaje de los algoritmos académicos de suma y resta.

Para que los alumnos/as tengan posibilidades de crear maneras propias de resolver sumas y restas es imprescindible que tengan un buen dominio numérico, es decir, que comprendan qué se esconde detrás de los números y que sean capaces de manipularlos, descomponerlos y recomponerlos.

La cuestión es que los números están codificados (U, D, C, M...), y si no entendemos bien el código, difícilmente podremos entender la manera en que sumamos y restamos cuando hay que realizar cambios de unidades ("hay llevadas"). Para evitar este problema, pretendemos introducir a los alumnos/as en el mundo de los "números completos", no codificados y plenos de significado, como forma de trabajar la suma y la resta de manera comprensiva. Y pretendemos convertirlos en expertos en descomponer y componer números.

1. Descomposiciones numéricas

Por tanto, un trabajo inicial básico es el de las descomposiciones numéricas:

• ¿Qué pasa si al número 10 le sumamos números de una cifra? Anota los resultados en el cuadro:

	Qué esconde el número: una forma de descomponerlo
10 + 1 =	11 = 10 +1
...	
	20= 10+10

Conclusión: en realidad, cualquier "dieci..." es la suma del 10 más un número. Esta manera de expresión es el número completo ("como lo decimos").

• ¿Qué pasa si hacemos lo mismo con el número 20? Anota los resultados en el cuadro:

	Una manera de escribirlo	Busca otras formas de descomponer el 21. Condición: tiene que aparecer un 10.	
20 + 1 =	21 = 20 +1	21=10+10+1	21 = 10 + 11
.../...			
20 + 10	30= 20 + 10	10+10+10	

En estas actividades conviene tener la calculadora y las fichas a mano, para que ellos puedan "manipular y ver", si lo necesitan. En este caso, aunque pueden salir otras que los alumnos hagan, nos interesan especialmente las que tienen como base el número 10 y los "dieces".

- ¿Qué pasa si hacemos lo mismo con el número 30, y con el 40, 50 ...? Si necesitas, utiliza la calculadora. Anota los resultados en el cuadro:

	Una manera de escribirlo	Busca otras formas de descomponer el 21. Condición: tiene que aparecer un 10.	
30 + 1 =	31 = 30 + 1	31=10+10+10+1	31 = 20 + 11
40 + 3 =	43 = 40 + 3	30 + 10 + 3	30 + 13
.../...			
90 + 6 =			

¡Esto no hay que hacerlo todo de la vez y seguido!

- Podemos empezar a generalizar. Con lo que hemos visto y averiguado, ¿podemos descomponer estos números? Fíjate en el ejemplo:

	Con 2 números, pero uno de ellos menor que 9	Con varios números. Y uno es menor que 9.	Con 2 números.
48	40 + 8	10+10+10+10+8	30 + 18
59			
...			
99			

Aunque existen diferentes formas de descomponer un número, las sombreadas nos interesan especialmente porque con ellas vamos a poder sumar y restar de manera distinta a la académica, y de manera que mantengamos la comprensión de la operación de suma o de resta.

- ¿Eres capaz de hacer lo mismo con números de 3 cifras? Yo te pongo varios ejemplos (comprueba con la calculadora). Hacer por parejas.

105	100 +5	90 + 10 +5	90 + 15
120	100 + 20	100 + 10 +10	110 + 10
124	100 + 20 + 4	100 + 10 + 10 + 4	110 + 14
245			
...			

2. Problemas con sumas y restas

A partir de aquí, podemos empezar a plantearles problemas con sumas y restas de todo tipo para cuya solución tengan que buscar otras formas u estrategias (además de las ya vistas, que empiezan a resultar insuficientes), y cuyo recorrido final es llegar al algoritmo académico de la suma y de la resta.

2.1. Sumas y restas sencillas (sin llevadas)

Al investigar por parejas o grupos problemas de este tipo, lo primero que hacen es recurrir a las estrategias que conocen y dominan: manipulación, conteo directo, buscar el 10 para sumar, convertir la resta en una suma... Pero en algunos casos, y a medida que los números son cada vez mayores, empiezan a resultar estrategias insuficientes, con las cuales las posibilidades de equivocarse son mayores.

Es el momento, pues, de animarles a buscar otras maneras de sumar y restar esos números, partiendo de todo lo que saben de descomposiciones numéricas: ¿es posible sumar o restar esos números fácilmente si los ponemos de forma completa, es decir, descompuestos? Esto es una investigación seria, un auténtico reto. Como siempre deben trabajar en grupo y hablar y buscar soluciones. Nuestro trabajo debe ser escuchar y estar atentos a sus ideas y reforzarlas.

2.1.1. Sumas sencillas

Los primeros problemas a trabajar serían aquellos que combinan números con unidades exactas con otros números sin ellas. Ejemplos:

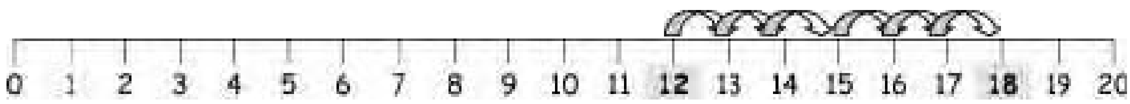
20 + 8 =   15 + 10 =   30 + 12 =   45 + 30 =

100 + 5 =   100 + 20 =   120 + 30 =   140 + 45 = ...

Por razones obvias de espacio y no aburrir, no es posible desarrollar toda la secuencia de problemas de diferentes sumas con sus correspondientes resoluciones. Parece suficiente hacerlo con los problemas finales de esta serie: los que completan el aprendizaje de estrategias de sumas sin llevadas.

"He comprado una docena de huevos y mi hermano ha comprado media docena ¿Cuántos huevos tenemos en total?"

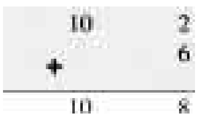
• Se puede resolver fácilmente por conteo o en la recta numérica.



• Pero también es muy fácil si descomponemos el 12:

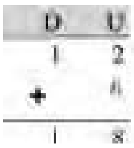
12 + 6 = 10 + 2 + 6 = 18

• Y hay otras formas de representar esta suma, cambiando la representación espacial:



Si recomponemos de nuevo el número, la solución es 18: 12+6 = 18

• Curiosamente, esta forma de sumar es extraordinariamente parecida a la forma en que los adultos realizamos las sumas.

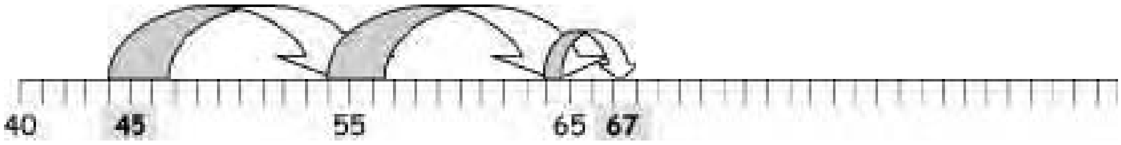


¿Cuál creéis que es la diferencia entre una y otra? Comentarlo en parejas y hablamos

Es, además, muy práctica para realizar todo tipo de sumas.

"Tengo 45 euros y mi abuelo me ha dado 22 euros. ¿Cuántos tengo ahora?"

- Por conteo directo es aburrido de resolver (aunque posible). Es mejor utilizar un conteo selectivo, combinando la suma de decenas y unidades, o representándolo en la recta numérica: 45 + 22 = 45 +10+10+2= 67



- Por descomposiciones: 45 + 22 = 40 + 5 + 20 + 2 = 60 + 7 = 67
- Las otras formas:

40	5	
+ 20	2	
60	7	=67

D	U
4	5
+ 2	2
6	7

4	5
+ 2	2
6	7

¿Cuál de las formas de hacer la suma os parece mejor, la comprendéis mejor, os resulta más fácil de entender...?. Hablamos.

Todas las maneras de realizar sumas sencillas sin llevadas son válidas. Las diferencias entre ellas son evidentes:

- el conteo directo es muy sencillo. El conteo por unidades implica un dominio mucho mayor y requiere haberlo trabajado con anterioridad.
- la recta numérica facilita la comprensión, es muy visual y sencilla con números pequeños, pero tiene problemas de representación con números más grandes (y de conteo por unidades).
- la descomposición numérica es muy sencilla con números pequeños, pero con números más grandes se complica un poco más, y sólo parece apta para alumnos muy cuidadosos.
- la suma en vertical con unidades completas es muy sencilla, conserva el significado de la operación y de los números y es válida con cualquier número. *Muy recomendable de utilizar hasta que den el salto definitivo a la forma académica.*
- la última es la suma académica, la más eficaz, pero puede plantear al principio problemas de comprensión de la operación, puesto que los números representan codificaciones de sistema de numeración decimal. Este problema de comprensión es especialmente grave (crisis del sistema) en el caso de las sumas "con llevadas".

2.1.2. Restas sencillas

Los primeros problemas a trabajar serían aquellos que combinan números con unidades exactas con otros números sin ellas. Ejemplos: 25 - 10 = , 43 - 20 = , 140 - 30 =

Por las mismas razones mencionadas anteriormente, parece suficiente escribir los procesos de resolución de los problemas finales de esta serie: los que completan el aprendizaje de estrategias de restas sin llevadas. En el caso de las restas, podemos intentar probar los diferentes métodos utilizados en las sumas. ¡A ver si funcionan!

"Tenía 29 euros, pero me he gastado 17? ¿Cuántos euros me quedan?"

• Podemos convertir la resta en suma: ¿cuánto le falta a 17 para llegar a 29?

de 17 para llegar a 20 ......
De 20 para llegar a 29 ......
Total de 17 para llegar a 29

$$\begin{array}{r} 3 \\ 9 \\ \hline 12 \end{array}$$

El problema es que esta estrategia, aunque segura y buena, se complica bastante cuando la diferencia entre los números es grande.

• Por descomposiciones, rápidamente nos damos cuenta de se convierte en un auténtico "problema de signos" excesivamente complicado para su edad:

29 – 17 = **20** + 9 – **10** –7 = 10 + 2 = 12 (¡Esto es mucho!).

Una forma de eliminar este problema y de que dispongan de otra estrategia es reorientarlo hacia: 29-17 = 20 y 9 menos 10 y 7 = 10 y 2 = 12 (Esto si lo saben hacer).

Las otras dos formas tienen la misma validez.

$$\begin{array}{rr} 20 & 9 \\ -10 & 7 \\ \hline 10 & 2 = 12 \end{array} \qquad \begin{array}{cc} D & U \\ \hline 2 & 9 \\ - & 7 \\ 1 & \\ \hline 1 & 2 \end{array} \qquad \begin{array}{rr} 2 & 9 \\ -1 & 7 \\ \hline 1 & 2 \end{array}$$

2.2. Sumas y restas complejas (con llevadas)

2.2.1. Sumas complejas

Podemos plantearles, con todo lo que ya conocen de sumas y restas, investigar y resolver diferentes problemas de sumas, advirtiéndoles de antemano que son más difíciles. Los primeros problemas de sumas con llevadas deben ser aquellos que tienen números con unidades exactas: 60 + 50, 90 + 20, 180 + 70 =

...

He aquí algunos ejemplos de problemas que completan la serie de aprendizaje de las sumas con llevadas. Por parejas y hablamos de los métodos utilizados.

"Si mi hermana tiene 23 euros y le dan el domingo 8 euros más, ¿cuántos tiene ahora?"

• Fácilmente hallarán la solución por conteo directo (solucionado y bien), o por medio de la recta numérica.

• Por descomposiciones tampoco es difícil de solucionar:

23 +8 = 20 +**3 +8** = **20 + 11** = **30 +1** = 31

Imprescindible dominar la composición de números; pero como ayuda el conteo con números tan pequeños no hay problema.

• Las otra formas:

	20	3	
+		8	
	20	11	=30+1 = 31

En esta forma no hay problema, pues sigue siendo un problema de descomposición y recomposición de números.

Siempre hay alguien que sabe que los adultos suman de otra forma. Si intentan hacerlo así le plantea un problema de relacionar ambas formas de sumar. Aquí la cuestión es buscar otra forma de hacer la suma que sea asimilable para su conocimientos y que ellos puedan controlarla al realizarla.

	2	3
+		8
	1	1
	2	0
	3	1

Una estrategia que intermedia entre una y otra es esta: la forma natural de dejarles sumar como los adultos, pero sin codificar el procedimiento de la suma. Las sumas las hacemos en vertical: 8 más 3 igual a 11, y 20 más nada 20. Sumamos en vertical y da 31.

	D	U
	2	3
+		8
	1	1
	2	0
	3	1

"Tengo 35 cartas de una baraja, si mi amigo tiene las otras 17 cartas de la baraja. ¿Cuántas cartas tenemos en total entre los dos? "

• El conteo resulta largo y aburrido, pero sigue siendo una posibilidad. La recta numérica resulta más fácil para resolver (35+10+7: descomposición y conteo).

- La descomposición tampoco es difícil:

$$35 + 17 = \mathbf{30} + \underline{5} + \mathbf{10} + \underline{7} = \mathbf{40 + 12} = \mathbf{50 + 2} = 52$$

- La estrategia de utilizar números completos es fácil y manejable

	30	5	
+	10	7	
	40	12	= 50+2 = 52

	3	5
	1	7
7 y 5	1	2
30 y 10	4	0
	5	2

- La suma natural sin codificar también es fácil de manejar

2.2.2. Restas complejas

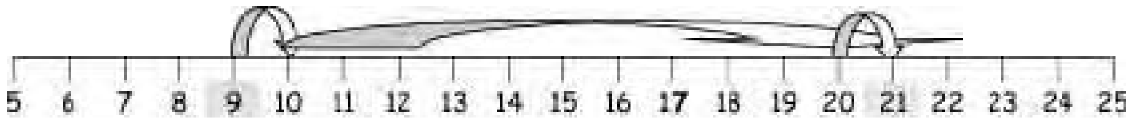
Podemos plantearles, con todo lo que ya conocen de sumas y restas, investigar y resolver diferentes problemas de restas, advirtiéndoles de antemano que son aún más difíciles que los de sumas. Los primeros problemas de restas con llevadas pueden ser aquellos que tienen números con unidades exactas: 10 – 4, 20 – 8, 40 -22, …

He aquí algunos ejemplos de problemas que completan la serie de aprendizaje de las restas con llevadas. Por parejas y hablamos de los métodos utilizados. Las estrategias que intentarán utilizar son las que ya han practicado en anteriores ocasiones.

"Esta mañana tenía 21 euros y me he gastado 9. ¿Cuántos me quedan?"

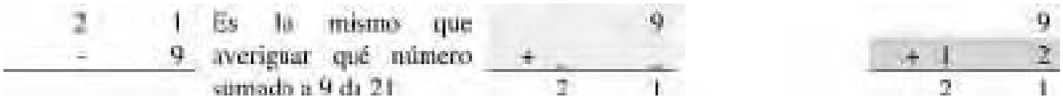
• El conteo directo nos puede solucionar el problema, pero se ve como una estrategia que empieza a no servir (más larga y latosa).

• Convertir la resta en una suma también parece fácil: ¿cuánto le falta a 9 para llegar a 21?



del 9 al 10 (**1**), del 10 al 20 (**10**) y del 20 al 21 (**1**). Total de 9 a 21: **12**

Una estrategia curiosa relacionada con convertir la resta en suma es la siguiente:



- Para los que se animen a usar descomposiciones numéricas, jugando con las decenas, aparecerá un nuevo problema: la descomposición directa no nos vale, porque a 1 no le podemos restar 9. Para salir del atasco les tendremos que plantear alguna pregunta que intente sortear el problema: ¿hay alguna otra forma de descomponer el 21, diferente a 20 +1?. Ya la hemos trabajado. Resulta imprescindible tener un buen dominio de las descomposiciones numéricas:

21 = 10 y 11 menos 9 = 10 + 2 = **12**

21-9 =  21-9 = 12

Esta nueva estrategia supone un salto más en el camino hacia el algoritmo de la resta. ¿Qué os parece?, ¿es mejor que contar?

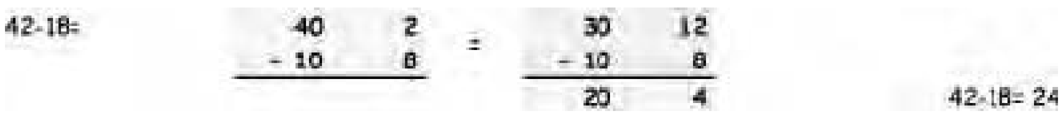
"Tenía 42 euros, pero me he gastado 18? ¿Cuántos euros me quedan?"

- El conteo directo, aunque es posible, es una estrategia ya claramente aburrida y muy poco eficaz.
- Convertir la resta en una suma sigue siendo eficaz:

de 18 a 20 (**2**), de 20 a 40 (**20**), de 40 a 42 (**2**). Total de 18 a 42 (**24**)

- Usar descomposiciones numéricas, como en el problema anterior, se revela como una estrategia eficaz y económica. Eso sí, hay que dominar las descomposiciones numéricas.

42 –18 = 30 y 12 menos 10 y 8 = 20 (30-10) y 4 (12-4) = 24.

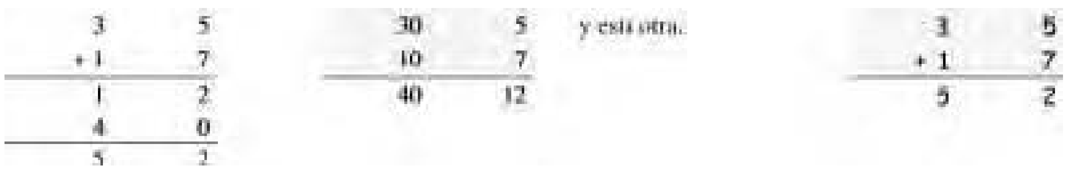


3. Algoritmos de resolución de problemas

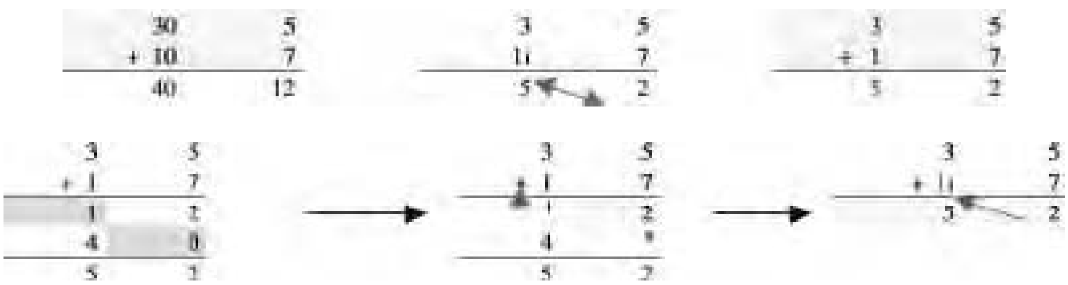
¿Cuál es el proceso que estamos viendo?. Que los niños y las niñas se están enfrentando a la resolución de diferentes problemas y con diferentes estrategias. Cuando las operaciones son sencillas (con números pequeños), la manipulación y el conteo directo son estrategias eficaces, que ellos comprenden, controlan y les sirven para resolver los problemas. Por tanto, debemos fomentar que las usen, pues son las que se corresponden con su manera de pensar matemáticamente. Pero, a medida que las operaciones se hacen con números mayores, y ellos evolucionan matemáticamente, aparecen nuevas estrategias, más potentes y eficaces, con las que resolver los problemas: sumar números completos descompuestos y recomponer, o sumar de manera natural, sin codificación de la operación. Estas estrategias también debemos potenciarlas, y permitir que los niños/as las utilicen durante el tiempo que necesiten. Son estrategias que tienen la virtud de que, como las primeras, ellos comprenden y controlan. Y les sirven, con lo que saben, para resolver muchos problemas de sumas y restas.

La necesidad de llegar a los algoritmos académicos de la suma y la resta sólo aparecerá cuando tengan que resolver problemas con números más difíciles, con los que las anteriores estrategias que utilizaban pierdan eficacia y rapidez. Pero esta utilización de los algoritmos académicos sólo será eficaz si, de nuevo, los alumnos/as comprenden y controlan lo que hacen. Mientras tanto, el resto de las estrategias de sumas y restas seguirán teniendo validez. Y debemos respetar el hecho de que cada alumno opere con las estrategias que comprende y controla. ¿Hasta cuándo ?. Hasta que comprenda y controle las nuevas: cada una representa un salto en la comprensión hacia los algoritmos académicos. Y este es el sentido del camino que hemos recorrido para llegar al algoritmo de la suma y de la resta: que los alumnos/as los construyan plenos de significado.

Porque entre estas formas de sumar,



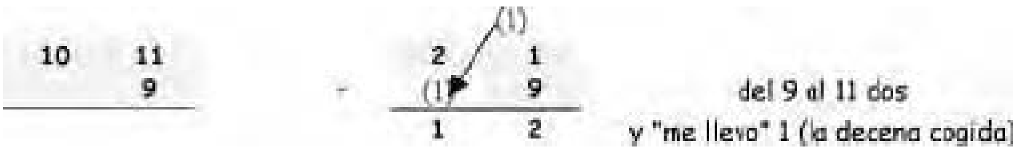
la única diferencia está en proceder mentalmente en las sumas de dos unidades que hacen otra de orden inmediatamente superior ("la santa llevada"). Porque el sentido de lo que hacen y de por qué lo hacen ya lo tienen. El resto (los ceros y en vez de escribir 12 poner un 2) es pura economía matemática, e igual que la de la numeración (codificación): "si no cambia nada para qué ponerlo".



Y porque entre estas formas de restar,

la única diferencia está en el proceso de realizar mentalmente la descomposición numérica para realizar la resta. De nuevo hablamos de un proceso de codificación y economía matemáticas:

- no es del 9 al 1, sino del 9 al 11
- pero como he cogido un 10 de la otra unidad, me tengo que acordar de, al hacer la otra resta, quitarle la que ya he cogido



"Nuestras" suma y resta, el algoritmo, sería el último paso a dar, la última y más depurada estrategia. Antes debemos INSTITUCIONALIZAR el saber aprendido en el aula: sacar conclusiones de cada investigación numérica, comentarlas, escribirlas... El tránsito a nuestro algoritmo de la suma estará lleno de sentido y significado, y de procedimientos y estrategias personales.

El trabajo de sumas y restas debe ir unido al de resolución de problemas. Ello permite que de manera natural exista una práctica más o menos continua (en función de la herramienta de resolución de los problemas) de diferentes algoritmos. No obstante, una vez que el proceso de alfabetización matemática respecto a sumas y restas está más o menos avanzado (concluido no lo está nunca), podemos establecer, primero una hora semanal y luego quincenalmente, un "taller de cálculo escrito". Criterios de trabajo y objetivos de este taller de cálculo escrito:

- Comprobar de manera específica la situación de cada alumno/a respecto a las diferentes estrategias de sumar y restar que utilizamos: nivel de comprensión y nivel de resolución.
- Establecer un contrato de trabajo con cada alumno o grupos de alumnos.
- Los alumnos/as "que saben" pueden practicar algunas operaciones de recuerdo y refuerzo, y punto. Si saben y siguen sabiendo, ¿para qué hacer más sumas y restas? Volveremos a hacer prácticas de algoritmos dentro de quince días. Además, también pueden ayudar a los demás trabajando por parejas.
- Los alumnos/as o grupos de ellos que "no saben bien" o tienen problemas requieren una atención individualizada. Es importante detectar cuanto antes los problemas, sean de comprensión, de cálculo mental o de estrategias de resolución. Y para ello, hay que estar individualmente con cada uno, que nos cuenten lo que entienden y lo que saben hacer, lo que no entienden y en lo que se pierden. Y esto sólo se puede hacer "personalmente" (no sirve de nada ponerles sumas y restas para hacer en casa; a no ser que hablemos previamente con los padres y asuman esa misma labor que tenemos que hacer nosotros en la escuela).
- De la situación concreta de cada alumno/a o grupos de alumnos debemos implementar un contrato específico de trabajo con ellos en ese taller de cálculo escrito, pero no necesariamente dedicar más días a hacer operaciones. En algunos casos habrá que volver a trabajar las estrategias, en otros las actividades de cálculo mental, en otro los procedimientos concretos de sumas y restas, ...
- Fácilmente se puede llevar un registro individual donde reflejar los dominios y competencias de cada uno respecto a las diferentes estrategias de resolución y la complejidad de sumas y restas que saben hacer.