OPCIÓN

A

MATEMÁTICAS

ATENCIÓN A LA DIVERSIDAD

ESFERA

ÍNDICE

REFUERZO

AMPLIACIÓN

REFUERZO 1 Números racionales

ORIENTACIONES METODOLÓGICAS

La resolución de problemas debe ser un eje alrededor del cual se organice el transcurso de esta unidad, pues, al acabar la Educación Secundaria, el alumnado debe haber adquirido la madurez necesaria para enfrentarse con autonomía a problemas en cuya resolución intervengan las fracciones. Los procesos mecánicos, y no por ello menos importantes, como son las operaciones con fracciones, son conceptos que los alumnos y alumnas de refuerzo deben manejar con soltura. Sin embargo, estos alumnos y alumnas suelen encontrar dificultades al resolver problemas en los que aparecen este tipo de operaciones. Es por ello por lo que deben realizar un número suficiente de problemas guiados para que, posteriormente, sean ellos mismos quienes los resuelvan con total seguridad y confianza. El profesor debe guiar al alumno en la resolución de problemas con pequeñas pautas, para que sean ellos los que encuentren el camino que hay que seguir. Además, y con el objetivo de comprobar si los alumnos y alumnas de refuerzo han adquirido técnicas y procedimientos en la resolución de problemas, es conveniente que posteriormente se enfrenten ellos solos a la resolución de problemas.

ACTIVIDAD DE GRUPO

Cuadrados mágicos

El profesor dará a los alumnos una serie de cuadrados mágicos o, incluso, se les puede pedir que sean ellos mismos quienes los busquen. En internet hay diversas páginas que tratan sobre los cuadrados mágicos. Sirva de ejemplo http://www.geocities.com/chilemat/basica/cuamagfr.htm.

El objetivo de la actividad no es solo que los alumnos, por grupos, completen los cuadrados mágicos, sino que estudien las propiedades de los mismos.

- Si se multiplica/divide un cuadrado mágico por un número, estudiar la relación existente entre la constante mágica del original y del transformado.
- Si se suma/resta un número a todas las casillas de un cuadrado mágico, estudiar la relación existente entre la constante mágica del original y del transformado.
- Si se suman/restan/multiplican/dividen dos cuadrados mágicos (se operan las casillas correspondientes), estudiar la relación existente entre la suma/resta/multiplicación/división de las constantes mágicas de los originales con la constante mágica del cuadrado mágico resultante.

SOLUCIONES DE LAS ACTIVIDADES PROPUESTAS

1.

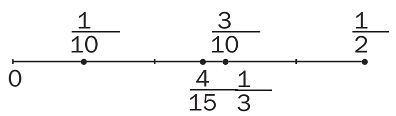
$\frac{21}{2}$	$\frac{37}{6}$	$\frac{35}{6}$	$\frac{19}{2}$
$\frac{41}{6}$	$\frac{53}{6}$	$\frac{17}{2}$	$\frac{47}{6}$
$\frac{49}{6}$	$\frac{15}{2}$	$\frac{43}{6}$	$\frac{55}{6}$
$\frac{13}{2}$	$\frac{19}{2}$	$\frac{21}{2}$	$\frac{11}{2}$

2. **a)** Españoles $= \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ Ingleses $= \frac{4}{15}$

Franceses $= \frac{30}{100} = \frac{3}{10}$ Alemanes $= \frac{1}{10}$

b) Alemanes $<$ ingleses $<$ franceses $<$ españoles

c)



d) Españoles, 300; franceses, 270; ingleses, 240, y alemanes, 90

3.
- 1.ª extracción: $\frac{2}{8} = \frac{1}{4}$ del total
- 2.ª extracción: $\frac{5}{12}$ del total
- Total: $\frac{2}{3}$. Queda sin extraer $\frac{1}{3}$, que son 100 L. Luego el bidón contenía 300 L.

4. **a)** 1.ª + 2.ª ventas: $\frac{1}{9} + \frac{8}{27} = \frac{11}{27}$. Quedan sin vender $\frac{16}{27}$, que son 1440 m^2. Entonces, $\frac{1}{27}$ son 90 m^2. El campo tenía 2430 m^2.

b) 1.er plazo: $\frac{2}{3}$, y queda $\frac{1}{3}$ sin pagar. 2.º plazo: $\frac{1}{6}$ de $\frac{1}{3} = \frac{1}{18}$. Total $= \frac{2}{3} + \frac{1}{18} = \frac{13}{18}$. Quedan sin pagar $\frac{5}{18}$, que son 100 €. Luego $\frac{1}{18}$ son 20 € y, por tanto, el equipo costó 360 €.

5. **a)** $\frac{2}{5} - \frac{1}{6} : \left(\frac{4}{5} + 2\right) - \frac{13}{28} = \frac{-13}{105}$

b) $\frac{2}{3} - \left(\frac{3}{4} - 3\right) : \frac{1}{3} = \frac{83}{12}$

En el **CD Banco de actividades** se pueden encontrar más propuestas de actividades de refuerzo.

ACTIVIDADES DE REFUERZO

1 Completa los números que faltan en el siguiente cuadro mágico sabiendo que los números de cada fila, columna o diagonal suman 32. Al número 32 se le llama constante mágica.

	$\frac{37}{6}$		$\frac{19}{2}$
$\frac{41}{6}$		$\frac{17}{2}$	$\frac{47}{6}$
$\frac{49}{6}$	$\frac{15}{2}$	$\frac{43}{6}$	
$\frac{13}{2}$			

2 Dos de cada seis asistentes a una convención europea son españoles, el 30% son franceses, cuatro quinceavos son ingleses y el resto alemanes.

a) ¿Qué fracción de los asistentes son españoles? ¿Y franceses? ¿E ingleses? ¿Y alemanes?

b) Ordena los países de menor a mayor según el número de asistentes. Para ello, reduce a común denominador y compara las fracciones.

c) Representa las fracciones sobre una misma recta y ordénalas de menor a mayor. Contrasta este resultado con el del apartado anterior.

d) Si en total han asistido 900 personas, calcula el número de asistentes de cada nacionalidad.

3 De un solar se vendió un noveno de su superficie, y después un tercio. Si aún quedan sin vender 1440 m^2, ¿cuántos metros cuadrados tenía el solar?

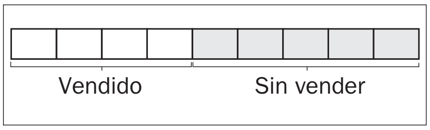
Para resolver el problema, sigue los siguientes pasos.

1.º Fracción de la primera venta: $\frac{1}{9}$

2.º Fracción de la segunda venta: $\frac{1}{3}$

3.º Fracción de la primera + segunda la venta: $\frac{1}{9} + \frac{1}{3} = \frac{4}{9}$

4.º Sin vender $= 1 - \frac{4}{9} = \frac{5}{9}$



$\frac{5}{9}$ *son 1440 m*$^2 \Rightarrow \frac{1}{9}$ *son 288 m*$^2 \Rightarrow \frac{9}{9}$ *son 2592 m*^{2}*. Solar = 2592 m*^{2}

Ahora resuelve tú el siguiente problema siguiendo los pasos anteriores. "De un barril de aceite se extraen dos octavos y, posteriormente, cinco doceavos. Si aún quedan sin sacar 100 litros, ¿cuántos litros de aceite había en el barril?"

4 Lee detenidamente el siguiente problema. Encuentra qué diferencia hay con el problema de la actividad 3. De un solar se vendió un noveno de su superficie y, después, un tercio de lo que quedaba. Sin aún quedan sin vender 1440 m^2, ¿cuántos metros cuadrados tenía el solar?

El problema es similar al anterior, pero fíjate bien en las palabras subrayadas. Vamos a resolverlo siguiendo los siguientes pasos.

1.º Fracción de la primera venta: $\frac{1}{9}$

2.º Fracción sin vender después de la primera venta $= 1 - \frac{1}{9} = \frac{8}{9}$

3.º Fracción de segunda venta: $\frac{1}{3}$ *de lo que quedaba sin vender* $= \frac{1}{3}$ *de* $\frac{8}{9} = \frac{1}{3} \cdot \frac{8}{9} = \frac{8}{27}$

Ya sabemos lo que ha vendido en la primera y en la segunda ventas. Ahora continúa como en el problema anterior (en el tercer paso).

Acaba el problema y después resuelve el siguiente: "Lucía compró un equipo de música y lo pagó en tres plazos. En el primero abonó dos tercios de su precio, y en el segundo, un sexto de lo que quedaba por pagar. Si efectuó un tercer pago de 100 euros, ¿cuánto costaba el equipo? ¿Cuánto pagó en cada plazo?"

5 Expresa los números decimales en forma fraccionaria y luego realiza los cálculos. Recuerda la jerarquía de operaciones y simplifica al máximo el resultado.

a) $0{,}4 - 0{,}1\overset{\frown}{6} : (0{,}8 + 2) - \frac{13}{28}$

b) $0{,}\overset{\frown}{6} - (0{,}75 - 3) : 0{,}3$

ORIENTACIONES METODOLÓGICAS

Los alumnos y alumnas de 4.º de ESO ya han estudiado en cursos anteriores el conjunto de los números reales, por lo que esta unidad les resultará familiar.

El cálculo mental no hay que abandonarlo, aunque la calculadora sea una herramienta de gran ayuda. Así, es bueno recordar, o aprender, los cuadrados de los 20 primeros números naturales, las 10 primeras potencias de 2 y algunos cubos. Esto nos facilitará el cálculo de potencias y radicales. También es conveniente repasar las igualdades notables, indispensables para racionalizar denominadores.

La calculadora científica es un material de gran ayuda y en muchos casos indispensable, por lo que es aconsejable repasar su adecuado manejo. Las actividades deben realizarlas sin la calculadora, pero, una vez resueltas, es conveniente que comprueben los resultados con la calculadora científica. Esta actividad es muy útil en el caso de la notación científica, pues este concepto es muy utilizado en otras áreas del currículo.

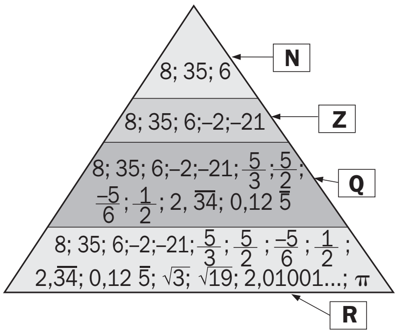
ACTIVIDAD DE GRUPO

El número de oro

Se divide la clase en grupos de tres o cuatro alumnos. Cada grupo debe investigar cuál es el número de oro, clasificarlo, redondearlo hasta las décimas, centésimas y milésimas, e indagar sobre la historia de este número. Una vez que los alumnos conozcan el número de oro, se hará una puesta en común sobre este curioso número. Después, cada grupo deberá razonar las siguientes igualdades: $\phi^2 = 1 + \phi$ y $\phi^{-1} = \phi - 1$. Ganará el grupo que menos tarde en demostrar correctamente las dos igualdades.

SOLUCIONES DE LAS ACTIVIDADES PROPUESTAS

1.



2. Notación científica:

a) $6 \cdot 10^{24}$ c) $1,2 \cdot 10^{-24}$

b) $1,66 \cdot 10^{-27}$ d) $3,6 \cdot 10^{-10}$

Operaciones:

a) $2 \cdot 10^{10}$ b) $1,20166 \cdot 10^{-24}$

3. Extraer factores:

a) $39\sqrt[3]{4}$ c) $20\sqrt[3]{4}$

b) $3\sqrt[5]{20}$ d) $21\sqrt[3]{4}$

Operaciones:

a) $30\sqrt[3]{4} + 20\sqrt[3]{4} - 21\sqrt[3]{4} = 29\sqrt[3]{4}$

b) $20\sqrt[3]{4} \cdot 3\sqrt[5]{20} = 120\sqrt[15]{250}$

4.

	π	$\sqrt{3}\pi$	$\sqrt{3}$	$4\sqrt{3}$	$3\pi+4\sqrt{3}$	Error máximo
Por exceso	3,141	9,423	1,732	6,928	16,351	0,007
Por defecto	3,142	9,426	1,733	6,932	16,358	

El número π se redondea hasta 3,142.

5. Cuadro:

- $\dfrac{8}{\sqrt{6}} = \dfrac{4\sqrt{6}}{3}$
- $\dfrac{4}{\sqrt{6} - 2\sqrt{2}} = -2 \cdot \left(\sqrt{6} + 2\sqrt{2}\right)$
- $\dfrac{5}{\sqrt[5]{2^3}} = \dfrac{5\sqrt[5]{4}}{2}$

Racionalizar:

a) $\dfrac{4\sqrt[5]{625}}{5}$ d) $\dfrac{24\sqrt{3} - 16\sqrt{5}}{7}$

b) $6\left(\sqrt{3} - \sqrt{2}\right)$ e) $\dfrac{4\sqrt[4]{8}}{3}$

c) $\dfrac{2\sqrt{7}}{3}$

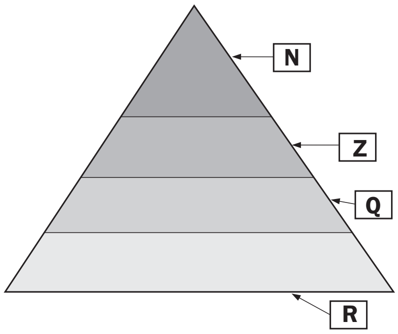
En el **CD Banco de actividades** se pueden encontrar más propuestas de actividades de refuerzo.

2 Números reales

ACTIVIDADES DE REFUERZO

1 Coloca cada número en el eslabón correspondiente de la pirámide de los números. Ten en cuenta que cada número puede estar en uno o varios eslabones de la pirámide.

-2	8	$\sqrt{3}$
$\sqrt{19}$	2,01001000100001...	-21
$\frac{5}{3}$	$\frac{5}{2}$	35
6	$\frac{-5}{6}$	$\frac{1}{2}$
$2,\overline{34}$	$0,12\overline{5}$	π



2 Expresa las siguientes cantidades en notación científica.

a) 6 000 000 000 000 000 000 000 000

b) 0,000 000 000 000 000 000 000 000 00166

c) 0,000 000 000 000 000 000 000 001 200

d) 0,000 000 000 360

Opera en notación científica. Expresa el resultado en la misma notación.

a) (6 000 000 000 000 000 000 000 000 · 0,000 000 000 000 000 000 000 001 200) : 0,000 000 000 360

b) 0,000 000 000 000 000 000 000 001 200 + 0,000 000 000 000 000 000 000 000 00166

3 Extrae todos los factores que puedas del radicando.

a) $\sqrt[3]{108\,000}$ **b)** $\sqrt[5]{4860}$ **c)** $\sqrt[3]{32\,000}$ **d)** $\sqrt[3]{37\,044}$

Ahora, basándote en los resultados obtenidos anteriormente, efectúa las siguientes operaciones.

a) $\sqrt[3]{108\,000} + \sqrt[3]{32\,000} - \sqrt[3]{37\,044}$ **b)** $\sqrt[3]{32\,000} \cdot \sqrt[5]{4860}$

4 Completa la tabla para efectuar la suma $3\pi + 4\sqrt{3}$ aproximando hasta las milésimas. Después redondea hasta las milésimas.

	π	$\sqrt{3}\pi$	$\sqrt{3}$	$4\sqrt{3}$	$3\pi+4\sqrt{3}$	Error máximo
Por exceso						
Por defecto						

5 Fracciones con radicales: racionalización de denominadores. Completa el siguiente cuadro.

DESCRIPCIÓN	***¿QUÉ HACER?***	***EJEMPLO***	***PRÁCTICA***
El denominador contiene un único término en el que aparece una única raíz cuadrada.	*Multiplicar numerador y denominador por la raíz cuadrada del denominador.*	$\frac{6}{5\sqrt{2}} = \frac{6 \cdot \sqrt{2}}{5\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \frac{6\sqrt{2}}{5 \cdot (\sqrt{2})^2} = \frac{6\sqrt{2}}{10} = \frac{3\sqrt{2}}{5}$	$\frac{8}{\sqrt{6}} =$
El denominador de' la fracción contiene os términos, en uno de los cuales o en los dos hay una raíz cuadrada.	*Se multiplica el numerador y el denominador por el conjugado del denominador.*	$\frac{7}{3\sqrt{2}+5} = \frac{7 \cdot (3\sqrt{2}-5)}{(3\sqrt{2}-5) \cdot (3\sqrt{2}+5)} = \frac{21\sqrt{2}-35}{(3\sqrt{2})^2 - 5^2} =$ $= \frac{21\sqrt{2}-35}{18-25} = \frac{21\sqrt{2}-5}{-7} = \frac{5-21\sqrt{2}}{7}$	$\frac{4}{\sqrt{6} - 2\sqrt{2}} =$
El denominador contiene un único término con una raíz de índice cualquiera.	*Se multiplica el numerador y el denominador por otra raíz de índice n que complete la potencia deexponente n*	$\frac{4}{\sqrt[3]{2}} = \frac{4 \cdot \sqrt[3]{2^2}}{\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{2^2}} = \frac{4\sqrt[3]{4}}{\sqrt[3]{2^3}} = \frac{4\sqrt[3]{4}}{2} = 2\sqrt[3]{4}$	$\frac{5}{\sqrt[5]{2^3}} =$

Ahora, racionaliza las siguientes fracciones con radicales siguiendo las pautas anteriores.

a) $\frac{4}{\sqrt[5]{5}}$ **b)** $\frac{6}{\sqrt{3} + \sqrt{2}}$ **c)** $\frac{14}{3\sqrt{7}}$ **d)** $\frac{8}{2\sqrt{5} + 3\sqrt{3}}$ **e)** $\frac{8}{3\sqrt[4]{2}}$

ORIENTACIONES METODOLÓGICAS

La mayoría de los conceptos tratados en esta unidad ya se han visto en cursos anteriores, en especial, en el tercer curso de Educación Secundaria Obligatoria. Por ello, los alumnos de refuerzo deben manejar con soltura las técnicas y procedimientos tratados en esta unidad. Se debe hacer especial hincapié en los siguientes aspectos:

- Operaciones con monomios y polinomios son procedimientos que se deben reforzar con especial interés, pues constituyen la base de las unidades posteriores, relativas a la resolución de ecuaciones, sistemas e inecuaciones.
- Las identidades notables se deben ejercitar con actividades y ejercicios en los que tengan que desarrollar estas expresiones.
- Por último, la factorización de polinomios, pues es el procedimiento que más dificultades suele presentar a los alumnos de refuerzo.

ACTIVIDAD DE GRUPO

Concurso rápido

Cada alumno de la clase debe tener una hoja dividida en 20 casillas y un rotulador de color. Las casillas irán numeradas del 1 al 20. El juego consiste en lo siguiente: el profesor lanza una pregunta de respuesta corta y rápida. Por ejemplo: "¿Cuál es el grado del monomio $3xy^4z$?" o "¿Es $x = 1$ raíz del polinomio $P(x) = 5x^4 - 3x + 2$?". Es aconsejable que el profesor escriba en la pizarra los datos importantes de la pregunta, como pueden ser en los ejemplos el monomio o el polinomio. Los alumnos, en un tiempo de duración a criterio del profesor, deberán escribir la respuesta en la primera casilla de la hoja. Cuando el tiempo termine, deberán dejar de escribir y levantar la hoja, para que el profesor y el resto de compañeros puedan ver la respuesta. Si un alumno no contesta o lo hace incorrectamente, quedará descalificado. Ganará el juego el alumno o los alumnos que contesten las 20 preguntas correctamente.

SOLUCIONES DE LAS ACTIVIDADES PROPUESTAS

1.

$P(-1)$	2
$Q(2)$	5
Término independiente de $Q(x)$	5
Grado de $P(x)$	3
Término independiente de $R(x)$	6
Grado de $R(x)$	4
$R(-2)$	2
Término independiente de $P(x)$	5
Grado de $Q(x)$	3
Grado de $P(x) + Q(x)$	3

2. $x =$ lado menor $\Rightarrow x^3 - 2 =$ lado mayor

Luego $P(x) = 2x^3 + 2x - 4$ y $A(x) = x^4 - 2x$

3. a) $P(x) + Q(x) = 3x^4 - 5x^3 + x^2 + 6x - 3$

b) $P(x) - Q(x) = 3x^4 - 5x^3 + x^2 + 8x - 3$

c) $P(x) \cdot Q(x) = 3x^6 - 8x^5 + 5x^4 + 7x^3 - 10x^2 + 3x$

d) $C(x) = 3x^2 - 2x - 2$ y $R(x) = 5x - 3$

e) $Q^2(x) = x^4 - 2x^3 + x^2$

4. a) $16x^2 - 4$

b) $9x^2 - 12x + 4$

c) $8x^2 - 24x^2 - 24x - 8$

d) $x^2 - 3x + \dfrac{9}{4}$

e) $x^2 + \dfrac{2}{5}x + \dfrac{1}{25}$

5. $P(x)$: rodear 1 y 2

$Q(x)$: rodear -2, -1 y 3

$R(x)$: rodear -2, 2 y 3

6. a) $Q(x) = 3x^2(x - 3)^2$

b) $R(x) = x^2(x - 4)(x + 4)$

c) $S(x) = (x - 1)(x - 3)(x + 7)$

En el **CD Banco de actividades** se pueden encontrar más propuestas de actividades de refuerzo.

ACTIVIDADES DE REFUERZO

1 Dados los polinomios $P(x) = 4x^3 + 3x^2 + 2x + 5$, $Q(x) = 2x^3 - 4x^2 + 5$ y $R(x) = x^4 - 5x^2 + 6$, relaciona con flechas las dos columnas.

$P(-1)$	1
$Q(2)$	
Término independiente de $Q(x)$	2
Grado de $P(x)$	
Término independiente de $R(x)$	3
Grado de $R(x)$	
$R(-2)$	4
Término independiente de $P(x)$	5
Grado de $Q(x)$	
Grado de $P(x) + Q(x)$	6

2 En un rectángulo, el lado mayor es dos unidades inferior al cubo del menor. Expresa algebraicamente los valores del perímetro y del área del rectángulo.

3 Dados los polinomios $P(x) = 3x^4 - 5x^3 + 7x - 3$ y $Q(x) = x^2 - x$, efectúa las siguientes operaciones.

a) $P(x) + Q(x)$ **b)** $P(x) - Q(x)$ **c)** $P(x) \cdot Q(x)$ **d)** $P(x) : Q(x)$ **e)** $Q^2(x)$

4 Desarrolla las siguientes operaciones.

a) $(4x - 2)(4x + 2)$ **b)** $(3x - 2)^2$ **c)** $(2x - 2)^3$ **d)** $\left(x - \frac{3}{2}\right)^2$ **e)** $\left(x + \frac{1}{5}\right)^2$

5 Rodea los números de la columna de la derecha que sean raíces de cada polinomio.

Polinomios	Posibles raíces
$P(x) = x^2 - 3x + 2$	1, −1, 2, 3, −5, 6
$Q(x) = x^3 - 7x - 6$	−1, 1, −2, 2, −3, 3
$R(x) = x^4 - 13x^2 + 36$	0, −1, 1, −2, 2, 3

6 Observa el siguiente ejemplo y, basándote en él, factoriza los siguientes polinomios.

a) $Q(x) = 3x^4 - 18x^3 + 27x^2$ **b)** $R(x) = x^4 - 16x^2$ **c)** $S(x) = x^3 + 3x^2 - 25x + 21$

Vamos a factorizar el polinomio siguiendo estos pasos.

	$P(x) = 2x(x^4 + 6x^3 - 8x)$
Paso 1 *Extraer factor común, si se puede.*	$P(x) = 2x(x^3 + 3x^2 - 4)$
Paso 2 *Comprobar si el polinomio que queda entre paréntesis es alguna igualdad notable.*	*En este caso, no se trata de alguna igualdad notable*
Paso 3 *Buscar los divisores de la forma* $x - a$. *En este paso se pueden utilizar diversos métodos de los ya estudiados: regla de Ruffini, teorema del factor o resolver la ecuación de segundo grado en el caso de que el polinomio que tuviéramos fuera de grado 2.*	*Aplicamos Ruffini al polinomio que tenemos,* $Q(x) = x^3 + 3x^2 - 4$, *y se obtiene* $Q(x) = Q(x) = (x) - 1(x^2 - 4x + 4)$ *Ahora nos queda:* $P(x) = 2x(x - 1)(x^2 - 4x + 4)$
Paso 4 *Volver al paso 2 con el polinomio que tenemos entre paréntesis.*	*El polinomio* $x^2 - 4x + 4$ *es una igualdad notable, y se tiene* $x^2 - 4x + 4 = (x - 2)^2$

Ahora tenemos $P(x) = 2x(x - 1)(x - 2)^2$. *El proceso termina cuando el polinomio está totalmente factorizado o cuando nos encontramos con un polinomio irreducible.*

REFUERZO 4 Ecuaciones e inecuaciones

ORIENTACIONES METODOLÓGICAS

En esta unidad se retoman conceptos ya conocidos, como es el de ecuación de primero y segundo grado, y se amplían con conceptos nuevos, como el de ecuación polinómica de grado superior, ecuación radical, inecuación, etc.

Los principales contenidos que hay que reforzar son los conceptos vistos en cursos anteriores, como son el de ecuación y de solución de una ecuación, ya que a menudo podemos encontrar alumnos con dificultades de comprensión en los ejercicios de álgebra por no tener correctamente adquiridos estos conceptos.

Sería conveniente que el alumnado comprendiera y razonase el proceso que se realiza en la resolución de ecuaciones e inecuaciones, frente a la memorización de la mecánica de dichos procedimientos.

Por último, se les debe guiar en el planteamiento de ecuaciones e inecuaciones sencillas para resolver problemas de la vida cotidiana. Para facilitar su comprensión, es aconsejable realizar varios problemas del mismo tipo, haciendo hincapié en la realización de una lectura comprensiva del enunciado. Suele ser práctico que realicen en sus cuadernos un pequeño esquema con los datos que nos aporta el problema y la pregunta que nos plantea.

ACTIVIDAD DE GRUPO

Cartas de ecuaciones e inecuaciones

Se dividirá la clase en grupos de cuatro alumnos. Cada grupo preparará 60 cartas. En una de ellas escribirá una ecuación o inecuación, y en otra su solución. Así, cada grupo tendrá 30 cartas con ecuaciones e inecuaciones, y otras 30 con sus respectivas soluciones. Es aconsejable que haya ecuaciones e inecuaciones equivalentes.

Cada grupo repartirá 5 cartas por alumno, y el resto se dejará en un montón para robar. El primer alumno debe lanzar una carta. El siguiente jugador tendrá que echar la pareja de la carta. Si el primer alumno ha soltado una ecuación o una inecuación, el segundo tendrá que arrojar su solución, y si ha echado una solución, este deberá soltar su ecuación o inecuación asociada. Si no tiene carta para jugar, robará una del montón y pasará el turno al siguiente jugador. Gana el alumno que antes se quede sin cartas.

SOLUCIONES DE LAS ACTIVIDADES PROPUESTAS

1.

	$3x^2 - 3x = 0$	$3 - 2x^2 = 0$	$3x^2 - 3x = 0$
$x = 1$	SÍ	SÍ	NO
$x = 0$	SÍ	2	NO
$x = -1$	NO	SÍ	NO

2. Se plantea la ecuación:

$$42 + x = 3(10 + x)$$

Han de pasar 6 años.

3. **a)** $x = 2$

b) $x = 5$

4. $S = (-\infty, -1]$

a) $S = [-16, +\infty)$

b) $S = (-\infty, 8)$

c) $S = [-8, +\infty)$

5. Debe obtener una nota superior a un 7.

En el **CD Banco de actividades** se pueden encontrar más propuestas de actividades de refuerzo.

ACTIVIDADES DE REFUERZO

1 Para comprobar si un número es solución o no de una ecuación, basta con sustituir la incógnita por dicho número y operar. Si el resultado del miembro de la izquierda de la ecuación es igual al de la derecha, entonces ese valor sí es solución.

Observa el ejemplo y completa la tabla con SÍ o NO son solución los valores de las ecuaciones que aparecen, sin resolverlas.

¿El valor $x = 3$ es solución de $x^2 + 3 = 4x$? Completamos la ecuación $\square^2 + 3 = 4 \cdot \square$ poniendo el valor 3 en cada recuadro, resultando $3^2 + 3 = 4 \cdot 3$, que da 9 + 3 = 12. Como la igualdad es cierta, entonces $x = 3$ es solución de la ecuación.

	$3x^2 - 3x = 0$	$3 - 2x^2 = 0$	$x^2 + x + 1 = 0$
$x = 1$			
$x = 0$			
$x = -1$			

2 Un padre tiene 42 años, y su hijo, 10. ¿Dentro de cuántos años la edad del padre será el triple que la del hijo?

Existen problemas de ecuaciones en los que hacer una tabla con los datos facilita bastante su resolución, como, por ejemplo, este. Llamamos x a los años que van a pasar para que la edad del padre sea el triple que la del hijo. Para resolver este problema, construimos la siguiente tabla.

	Edad actual	*Edad dentro de 3 años*	*Edad dentro de 5 años*	*Edad dentro de x años*
Padre	42	42 + 3		
Hijo				

Completa la tabla y, usando la última columna, plantea la ecuación. ¡Cuidado, no olvides los paréntesis!

3 Resuelve las siguientes ecuaciones.

a) $3(x - 1) + 2x = 7 - (x - 2)$ **b)** $1 - \dfrac{2x - 9}{6} = \dfrac{1}{3} + \dfrac{6 - x}{2}$

4 La siguiente tabla muestra los pasos que tienes que seguir para resolver una inecuación de primer grado como la siguiente: $\dfrac{3 \cdot (x - 1)}{3} \geqslant \dfrac{6x - 4}{5}$.

1.º *Eliminamos los paréntesis.*	$\dfrac{3x - 3}{3} \geqslant \dfrac{6x - 4}{5}$
2.º *Suprimimos los denominadores, reduciendo previamente a común denominador.*	$15x - 15 \geqslant 18x - 12$
3.º *Trasponemos los términos.*	
4.º *Reducimos los términos semejantes.*	
5.º *Despejamos la incógnita. Debemos tener en cuenta que, al dividir entre un número negativo, la desigualdad cambia de sentido.*	
6.º *Escribimos el conjunto de la solución.*	

Completa la tabla anterior y utilízala para resolver las siguientes inecuaciones.

a) $\dfrac{x}{6} - 1 \leqslant 2 - \dfrac{1 - x}{3}$ **b)** $2(1 - x) - 3 + 3(x - 2) < 1$ **c)** $\dfrac{3x + 2}{3} > \dfrac{5x - 4}{6}$

5 Las notas de Matemáticas de un alumno en las dos primeras evaluaciones han sido 4 y 7, respectivamente. ¿Qué nota ha de sacar como mínimo en la tercera evaluación para obtener una nota media superior a un 6?

ORIENTACIONES METODOLÓGICAS

En esta unidad se repasa un concepto ya estudiado por los alumnos en cursos anteriores, y se estudian contenidos nuevos, como la resolución de sistemas de ecuaciones de segundo grado.

Es fundamental que todos los alumnos tengan claro qué es una solución de una ecuación con dos incógnitas y una solución de un sistema de dos ecuaciones, lineales o no, con dos incógnitas.

Se reforzará la resolución gráfica de sistemas de ecuaciones lineales, pues favorecen la comprensión y visualización de los conceptos que, por su carácter algebraico y por tanto abstracto, suelen ser problemáticos para el alumnado.

Por último, debe darse una gran importancia a la resolución de problemas mediante sistemas de ecuaciones, que también suelen ocasionar dificultades a algunos alumnos. Debemos guiarles en el planteamiento de los sistemas, comenzando por realizar una lectura detallada y comprensiva del enunciado, para extraer los datos y las preguntas, discriminando la información que es meramente contextual. No se deben olvidar de definir de una manera correcta y no ambigua las incógnitas antes de plantear el sistema de ecuaciones.

ACTIVIDAD DE GRUPO

Dominó de sistemas de ecuaciones

Para esta actividad se necesita recortar varias cartulinas en fichas de tamaño semejante al de los naipes de una baraja. La pizarra se dividirá en dos partes. Por turnos, cada alumno saldrá a la pizarra y escribirá en la parte izquierda una ecuación lineal con dos incógnitas o un sistema sencillo con soluciones enteras. En la parte derecha deberá escribir su solución. Pueden ponerse varias ecuaciones o sistemas equivalentes, por lo que no se volverá a escribir su solución.

La clase se dividirá en grupos de cuatro o cinco alumnos. Cada grupo deberá realizar las fichas del dominó. Para ello, en cada tarjeta escribirá una ecuación o sistema de la pizarra y, aleatoriamente, a su lado escribirá una solución. Una vez terminadas las fichas, cada grupo intentará colocarlas una tras otra.

SOLUCIONES DE LAS ACTIVIDADES PROPUESTAS

1.

x	-2	-1	0	1	2
$y = 1 - x$	3	2	1	0	-1

x	-2	-1	0	1	2
$y = x + 3$	1	2	3	4	5

Solución: $x = -1$, $y = 2$

2. Por ejemplo:

$\begin{cases} x + y = 1 \\ x - y = -5 \end{cases}$ Coeficiente: 1, 1; término ind.: 1 / Coeficiente: 1, −1; término ind.: −5

$\begin{cases} x^2 + y = -1 \\ x + 2y = 4 \end{cases}$ Coeficiente: 2, 1; término ind.: −1 / Coeficiente: 1, 2; término ind.: 4

Son sistemas equivalentes.

Por ejemplo: $\begin{cases} x^2 + y^2 = 13 \\ x^2 - y^2 = -5 \end{cases}$

3. a) II b) I c) III

4. x = número de CD

y = número de revistas

$$\begin{cases} x + y = 5 \\ 15x + 2y = 35 \end{cases}$$

$x = 2$ CD, $y = 3$ revistas

5. Llamamos x e y a las dimensiones del campo, se plantea el sistema:

$$\begin{cases} 2x + 2y = 140 \\ x^2 + y^2 = 2500 \end{cases}$$

Se resuelve y se obtiene que las dimensiones del campo son 30 y 40 m.

En el **CD Banco de actividades** se pueden encontrar más propuestas de actividades de refuerzo.

ACTIVIDADES DE REFUERZO

1 Completa las siguientes tablas de valores.

x	-2	-1	0	1	2
$y = 1 - x$					

x	-2	-1	0	1	2
$y = x + 3$					

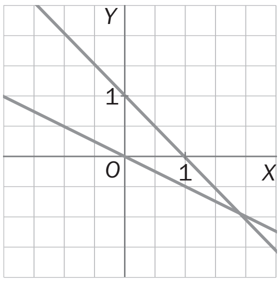
¿Cuál es la solución del sistema $\begin{cases} y = 1 - x \\ y = x + 3 \end{cases}$?

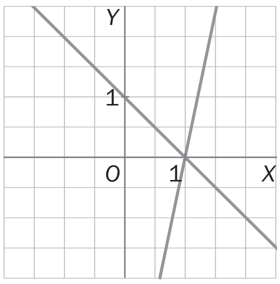
2 Inventa dos sistemas de ecuaciones de primer grado cuya solución sea $x = -2$, $y = 3$. ¿Cómo son estos sistemas entre sí? Señala los coeficientes y los términos independientes.

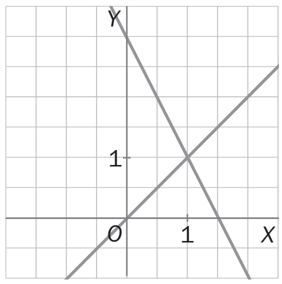
¿Podrías inventar un sistema de ecuaciones de segundo grado que tenga esta misma solución?

3 Asocia cada sistema de ecuaciones con su resolución gráfica.

a) $\begin{cases} x + y = 1 \\ 5x - y = 5 \end{cases}$ b) $\begin{cases} \dfrac{x}{2} + y = 0 \\ x + y = 1 \end{cases}$ c) $\begin{cases} -x + y = 0 \\ 2x + y = 3 \end{cases}$

I) 

II) 

III) 

4 Me he comprado algunos CD y algunas revistas. En total me he llevado 5 artículos a casa y me he gastado 36 euros. ¿Cuántos CD y cuántas revistas he adquirido?

5 Halla las dimensiones de un campo rectangular sabiendo que la diagonal mide 50 metros, y el perímetro, 140.

Resuelve este problema siguiendo estos pasos.

- *Haz un dibujo del campo y da un nombre a la longitud de los lados. (Por ejemplo,* x *e* y*.)*
- *Como tenemos dos incógnitas, para hallarlas necesitamos plantear dos ecuaciones. Averigua qué datos nos da el enunciado para plantear dos ecuaciones.*
- *El perímetro del campo es de 140 metros. Recuerda qué es el perímetro de una figura y plantea la primera ecuación. ¡Ya tienes la primera ecuación del sistema!*
- *Dibuja la diagonal del campo. ¿Recuerdas algún resultado matemático que relacione la diagonal de un rectángulo y los lados? Piensa que se forma un triángulo rectángulo. ¡Ya tienes la segunda ecuación!*
- *Resuelve el sistema planteado.*

  Interpreta los resultados. Es decir, la resolución del problema debe terminar diciendo: "Las dimensiones del campo son ______ y ______metros".

ORIENTACIONES METODOLÓGICAS

En esta unidad se deben reforzar principalmente los porcentajes, para conseguir un uso adecuado de ellos y una interpretación correcta de la información que nos aportan, y el significado de proporcionalidad directa e inversa, mediante ejemplos cercanos a los alumnos.

- Es importante que sepan calcular porcentajes, aumentos y disminuciones porcentuales, intereses, etc., utilizando la calculadora correctamente cuando sea necesario.
- Deben diferenciar entre magnitudes directamente e inversamente proporcionales de su entorno, calculando algunos términos desconocidos.

Estos conceptos se aplicarán a situaciones reales, especialmente los porcentajes y los repartos proporcionales.

Antes de resolver los ejercicios y problemas, se puede dar a los alumnos algunas indicaciones básicas sobre el uso adecuado de la calculadora, la prioridad de las operaciones y el uso de los paréntesis.

ACTIVIDAD DE GRUPO

La proporcionalidad en los muelles

Para realizar esta actividad, necesitaremos varios muelles y pesas que podemos encontrar en el laboratorio de Física del centro, y los repartiremos por equipos de cuatro alumnos, aproximadamente. Cada grupo debe realizar tres experimentos con los muelles y anotar los resultados en una tabla.

El primer experimento consiste en medir la longitud del muelle en función de la carga que se haya puesto. Deben observar que estas magnitudes no son proporcionales. En el segundo experimento, estas mismas medidas les servirán para comprobar que el alargamiento del muelle (incremento de la longitud) y el peso de la carga sí son magnitudes directamente proporcionales.

Por último, cargando el muelle, contarán el número de oscilaciones por minuto que se producen en función de la longitud que este haya estirado, y comprobarán que son magnitudes inversamente proporcionales.

Para concluir, un representante de cada grupo expondrá en clase los diferentes resultados que se han obtenido y los compararán entre todos.

SOLUCIONES DE LAS ACTIVIDADES PROPUESTAS

1. Hay $3 + 5 + 6 = 4$ paquetes, y cada uno es de $560 : 14 = 40$ €.
Les corresponden 120, 200 y 240 €, respectivamente.

2.

250	300	210	**130**	60	270
100	**75**	60	20	**120**	45
2,5	4	**3,5**	6,5	0,5	**6**

a) Espacio-velocidad y espacio-tiempo
b) Velocidad-tiempo

3. Se puede empezar por cualquier número, por ejemplo, el 100, y quedaría:

$$\begin{array}{ccccc} 100 & \longrightarrow & 90 & \longrightarrow & 108 \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 72 & \longrightarrow & 129{,}6 & \longrightarrow & 162 \end{array}$$

4. **a)** $100 \cdot \left(1 + \dfrac{6 \cdot 10}{100}\right) = 160$ €

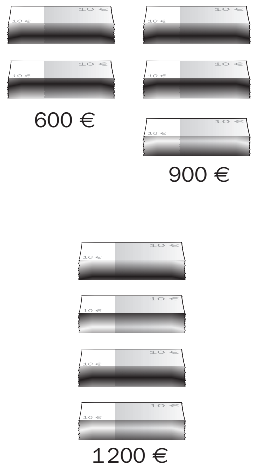
b) $100 \cdot \left(1 + \dfrac{6}{100}\right)^8 = 159{,}38$ €

5. El medicamento cuesta 7,80 € con el IVA.
Los pantalones cuestan 30 € sin el IVA.
Las manzanas valen 1,40 € sin el IVA.

En el **CD Banco de actividades** se pueden encontrar más propuestas de actividades de refuerzo.

ACTIVIDADES DE REFUERZO

1 Observa cómo hemos realizado el siguiente reparto directamente proporcional y después haz algo similar para resolver el problema.



Para repartir 3000 euros entre tres personas de forma directamente proporcional a 2, 3 y 5, podemos:

1.º *Hacer paquetes iguales con los billetes.*

2.º *Dar 2 paquetes a la primera persona, 3 a la segunda y 5 a la tercera.*

3.º *Para poder hacer esto, hay que formar 2 + 3 + 5 = 10 paquetes iguales con los 3000 euros, por lo que cada paquete tendrá 3000 : 10 = 300 euros.*

4.º *En el dibujo se ve cuánto le corresponde a cada uno.*

Reparte 560 euros entre tres personas de manera directamente proporcional a 3, 5 y 6.

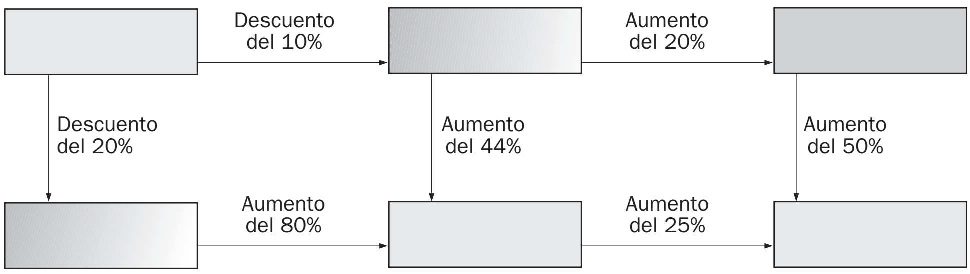
2 Completa la siguiente tabla como en los ejemplos.

Espacio (km)	100	240	60		300	210		60	270
Velocidad (km/h)	50	80	40	100		60	20		45
Tiempo (h)	2	3	1,5	2,5	4		6,5	0,5	

a) ¿Cuáles de estas magnitudes son directamente proporcionales?

b) ¿Cuáles son inversamente proporcionales?

3 Completa comenzando por cualquier número y comprueba que se cumple lo que pone en todas las flechas.



4 Indica cómo se gana más dinero si realizamos una inversión al 6%.

a) A interés simple durante 10 años.

b) A interés compuesto durante 8 años.

Pista: puedes calcular el capital final en cada caso siendo el capital inicial una cantidad cualquiera, por ejemplo, 100 euros, y compararlos.

5 Completa las siguients etiquetas de diferentes productos.

ORIENTACIONES METODOLÓGICAS

A los alumnos de refuerzo se les debe presentar el tema con un carácter principalmente práctico. A veces, se presentan dificultades entre el alumnado por no entender los conceptos de la semejanza y la trigonometría como algo abstracto; sin embargo, presentándoles desde un principio la gran utilidad práctica de dichos conceptos, tienden a mostrarse más receptivos a esta materia.

El tema se presta fácilmente al uso de materiales manipulativos, como material de dibujo (regla graduada, escuadra, cartabón, compás, transportador, etc.), papel cuadriculado o milimetrado, planos y mapas, cintas métricas, pequeños utensilios de fabricación doméstica para medir ángulos, etc. En las actividades que se incluyen a continuación se presentan varios ejemplos.

Los alumnos pueden aportar sus propios materiales para completar estos ejercicios, como un plano de su vivienda o de su barrio, fotos a escala, etc.

ACTIVIDAD DE GRUPO

Midiendo tu entorno

Dividiremos el grupo en equipos de cuatro o cinco alumnos. Cada equipo debe construir un transportador gigante de cartón o madera o un goniómetro rudimentario para poder medir ángulos sobre el terreno de una manera aproximada.

La actividad consiste en aplicar los conocimientos adquiridos sobre semejanza y trigonometría para obtener medidas de objetos o lugares inaccesibles presentes en el entorno de los alumnos.

Se puede realizar la actividad dentro del aula para medir desde un extremo la pared de enfrente, la mesa del profesor, etc., aunque preferentemente se realizará en el patio o en las proximidades del centro para medir una pista deportiva, la altura de algún edificio, la longitud de un tejado, etc.

Daremos a cada grupo las indicaciones necesarias sobre lo que hay que medir, así como un esquema de los pasos que hay que seguir para poder calcular dichas medidas. Finalmente, se compararán los resultados obtenidos por los distintos equipos, indicando las posibles mejoras que hay que realizar en las mediciones.

SOLUCIONES DE LAS ACTIVIDADES PROPUESTAS

1. Calculamos los lados del salón y de la vivienda completa.

$9{,}5 \cdot 150 = 1425$ cm $= 14{,}25$ m

$4 \cdot 150 = 600$ cm $= 6$ m

$4{,}5 \cdot 150 = 675$ cm $= 6{,}75$ m

$2{,}2 \cdot 150 = 330$ cm $= 3{,}30$ m

La vivienda tiene $14{,}25 \cdot 6 = 85{,}50$ m^2, y el salón, $6{,}75 \cdot 3{,}30 = 22{,}27$ m^2.

2. Los lados de una escuadra están en la proporción $1, 1, \sqrt{2}$, por lo que $\operatorname{sen} \alpha = \cos \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$ y $\operatorname{tg} \alpha = 1$.

Los lados de un cartabón están en la proporción $1, \sqrt{3}, 2$, por lo que $\operatorname{sen} \alpha = \frac{1}{2}$, $\cos \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$ y $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

3. $\operatorname{sen} 40° = 0{,}6428$

$\cos 40° = 0{,}7660$

$\operatorname{tg} 40° = 0{,}8391$

$\operatorname{sen} 60° = 0{,}8660$

$\cos 60° = 0{,}5000$

$\operatorname{tg} 60° = 1{,}7321$

4. $7 \cdot \cos 25° = 6{,}34$ m de la roca

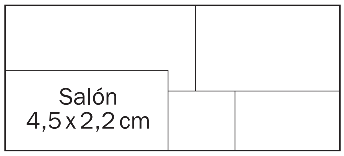
$7 \cdot \operatorname{tg} 25° = 3{,}26$ m del árbol

5. $200 \cdot \operatorname{tg} 70° = 549{,}50$ m de altura

En el **CD Banco de actividades** se pueden encontrar más propuestas de actividades de refuerzo.

ACTIVIDADES DE REFUERZO

1 Calcula la superficie del salón de esta vivienda y la superficie total de la misma en metros cuadrados, sabiendo que la escala del dibujo es 1 : 150.

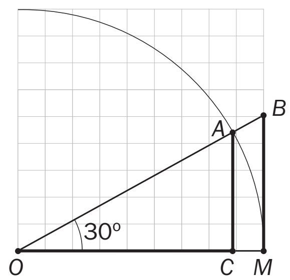


Vivienda 9,5 x 4 cm

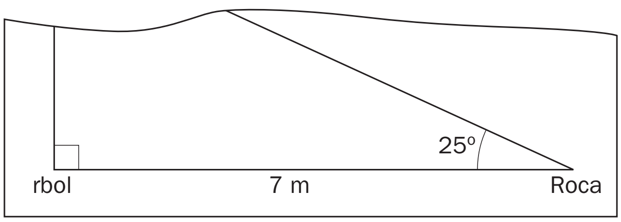
2 Comprueba que tu escuadra es un triángulo rectángulo con dos lados iguales y que tu cartabón es un triángulo rectángulo cuya hipotenusa mide el doble que uno de los catetos. Halla las razones trigonométricas de los ángulos de tu escuadra y de tu cartabón. ¿Estas razones son iguales para todas las escuadras y cartabones?

3 Para calcular las razones trigonométricas de un ángulo, podemos dibujar un cuarto de circunferencia de 10 cuadraditos de radio sobre papel cuadriculado como en el dibujo. Con ayuda de un transportador, se traza una línea recta para formar el ángulo que se quiera, y se marcan los puntos *A*, *B* y *C* correspondientes a dicho ángulo como en el ejemplo. El seno de dicho ángulo será el número de cuadraditos de *AC* dividido entre 10; el coseno será *OC* entre 10, y la tangente, *BM* entre 10.

Utiliza este sistema para calcular las razones trigonométricas de 40° y 60°.

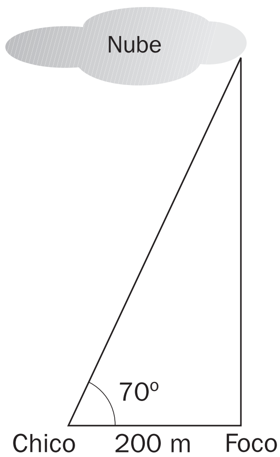


4 Mi amigo Ernesto ha encontrado el mapa de un tesoro escondido, pero está roto y solo tiene una parte. Se sabe que el tesoro se encuentra enterrado en el vértice que falta en el dibujo. ¿Podrías ayudarle a calcular la distancia del tesoro a la roca y al árbol?



5 Aunque parezca increíble, podemos medir la distancia a la que se encuentra una nube situada sobre nosotros.

Se necesita un foco muy potente colocado bajo la nube y que lance un rayo de luz verticalmente hasta ella. Si nos separamos 200 metros del foco, observamos el punto de luz sobre la nube con un ángulo de 70° respecto a la horizontal. ¿A qué altura se encuentra la nube?



ORIENTACIONES METODOLÓGICAS

El principal objetivo de esta unidad es afianzar contenidos ya conocidos, como el concepto de perímetro, área y volumen, y las diferentes unidades de medida. Fundamentalmente, se debe aprender a calcular longitudes, áreas y volúmenes para resolver problemas de la vida cotidiana donde aparezcan formas geométricas.

Para ello, se debe comenzar recordando las fórmulas de las áreas de las figuras planas elementales, ya sean poligonales o circulares, y las áreas y volúmenes de los cuerpos geométricos elementales, poliedros o cuerpos redondos. Al ser esta parte un poco tediosa para algunos alumnos, se pueden utilizar juegos, como en el ejercicio 1 que se presenta a continuación, para hacer un repaso más ameno.

El correcto uso del teorema de Pitágoras es de grandísima importancia en cualquier contexto métrico, por lo que se debe recordar y practicar, ya que estará presente en la resolución de muchos problemas de la unidad.

Por último, no podemos olvidarnos de que este tema es principalmente práctico, por lo que es conveniente introducir algunos ejercicios en los que el alumnado obtenga por sí mismo medidas de diferentes objetos tangibles con el fin de calcular su área o volumen, descomponiéndolo en figuras geométricas simples, o, como es el caso del ejercicio 5, agrupando varios objetos iguales para obtener una figura conocida más sencilla de medir.

ACTIVIDAD DE GRUPO

Construyendo figuras geométricas en el espacio

Para que los alumnos tengan una visión más exacta de los cuerpos geométricos elementales, es conveniente que puedan observarlos y manipularlos por sí mismos. Para ello, podemos proporcionarles el desarrollo de los principales cuerpos geométricos para que puedan recortarlos y montarlos.

La clase se dividirá en grupos de tres o cuatro alumnos para que puedan organizar mejor el trabajo, ya que tendrán que dibujar varios desarrollos en cartulina, recortarlos, doblarlos y pegarlos. Se les puede entregar una ficha para que anoten los elementos más destacables de cada cuerpo geométrico.

Esta actividad es muy útil para facilitar la comprensión de los conceptos de área y volumen de las figuras geométricas en el espacio, ya que relacionarán el área con la cantidad de cartulina utilizada, y el volumen, con la capacidad de la figura. Para explotar mejor este recurso, pueden dejar una cara sin pegar para poder rellenar los cuerpos de arena o arroz, y así comparar mejor los volúmenes de las figuras que construyan.

SOLUCIONES DE LAS ACTIVIDADES PROPUESTAS

1. **a)** 9 cm^2 **b)** 15 dm^2 **c)** 6 mm^2 **d)** 8 m^2 **e)** 3 dam^2 **f)** 7 hm^2

Se forma una ele.

2. $297 \cdot 210 = 62\,370$ mm^2

80 g cada $m^2 = 1\,000\,000$ mm^2, por lo que cada hoja pesa $1\,000\,000 : 62\,370 = 16{,}03$ g.

3. Triángulos grandes = 67,28 cm^2

Triángulo mediano = 33,62 cm^2

Cuadrado = 33,64 cm^2

Romboide = 23,78 cm^2

Triángulos pequeños = 16,82 cm^2

El cuadrado total tiene un área de 259,24 cm^2.

4. $d = 10$ cm $\Rightarrow r = 5$ cm

$g = 13$ cm $\Rightarrow h = 12$ cm

$A_L = \pi \cdot 5 \cdot 13 = 204{,}20$ cm^2

$A_B = \pi \cdot 5^2 = 78{,}54$ cm^2

$$V = \frac{\pi \cdot 5^2 \cdot 12}{3} = 314{,}16 \text{ cm}^3$$

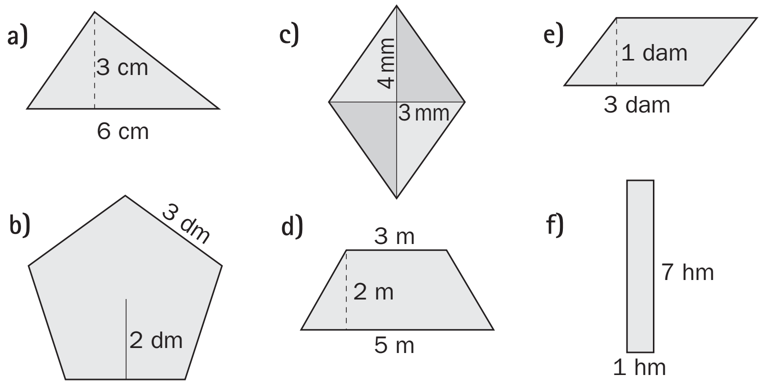
5. Cogiendo 10 monedas, se forma un cilindro de diámetro 25,5 mm y de altura 22 mm, por lo que el volumen de una moneda es:

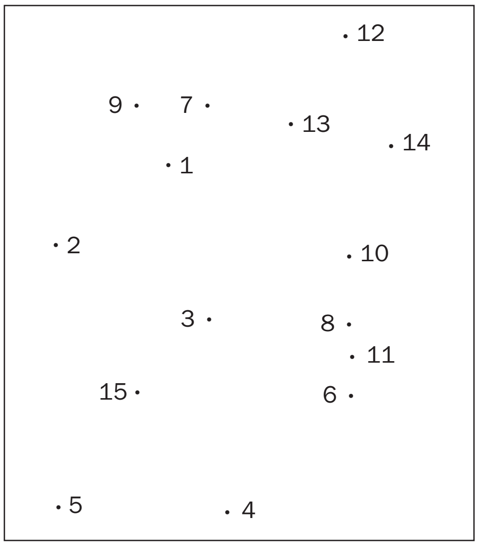
$$V = \frac{\pi \cdot 12{,}75^2 \cdot 22}{10} = 1123{,}55 \text{ cm}^3$$

En el **CD Banco de actividades** se pueden encontrar más propuestas de actividades de refuerzo.

ACTIVIDADES DE REFUERZO

1 Calcula las áreas de las siguientes figuras. Marca en el recuadro los números que se corresponden con dichas áreas y únelas con líneas rectas por orden (primero el apartado a, luego el b, etc.), hasta volver a acabar con el a. Obtendrás una letra. ¿Cuál es?





2 En el envoltorio de un paquete de hojas vemos que pone 80 gramos por metro cuadrado. Si cada una (tamaño A4) mide 297 milímetros de largo por 210 de ancho, ¿cuánto pesa cada hoja?

3 El juego del tangram está formado por las siguientes piezas:

- Dos triángulos rectángulos isósceles de 11,6 centímetros de catetos.
- Un triángulo rectángulo isósceles de 8,2 centímetros de catetos.
- Un cuadrado de 5,8 centímetros de lado.
- Un romboide de 8,2 centímetros de base y 4,1 centímetros de altura, cuyos lados forman 45º.
- Dos triángulos rectángulos isósceles de 5,8 centímetros de catetos.

Recórtalas en cartulina y podrás formar diferentes figuras usando siempre las siete piezas, como por ejemplo un cuadrado. Calcula el área de cada figura. ¿Qué área tendrá el cuadrado que formes con todas las piezas?

4 El teorema de Pitágoras es muy útil para hallar en los cuerpos geométricos algunas medidas desconocidas sabiendo otras. A continuación se explica cómo calcular el área y el volumen de un cono.

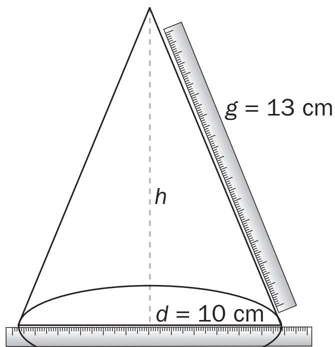
1.º *Mide el diámetro y divídelo entre 2 para hallar el radio* r *de la base.*

2.º *Mide la distancia entre el vértice y la circunferencia de la base. Esta medida se llama generatriz* g.

3.º *La generatriz* g, *el radio* r *y la altura* h *forman un triángulo rectángulo. Utiliza el teorema de Pitágoras para hallar* h. *Recuerda que el teorema dice que* $h^2 + r^2 = g^2$.

4.º *El área lateral* es $p \cdot r \cdot g$, *y el área de la base es* $\pi \cdot r^2$.

5.º *El volumen del cono es* $\frac{\pi \cdot r^2 \cdot h}{3}$.



Sigue estos pasos para calcular el área lateral, el área de la base y el volumen del cono de la figura.

5 A veces, para calcular el volumen de objetos muy pequeños es más sencillo calcular lo que ocupan varios de ellos y luego dividir el volumen obtenido entre el número de objetos que hemos agrupado.

Utiliza esta técnica para calcular el volumen, en milímetros cúbicos, de una moneda de dos euros. Pon varias monedas apiladas como en el dibujo (por ejemplo, 10), calcula el volumen del cilindro resultante y luego divídelo entre el número de monedas utilizadas (en este caso, 10).

ORIENTACIONES METODOLÓGICAS

En esta unidad debemos asegurarnos de que los alumnos comprenden y utilizan adecuadamente el concepto de plano coordenado y la noción de vector desde un punto de vista tanto geométrico como analítico, y de que manejan las distintas formas de ecuación de la recta.

Es aconsejable que los ejercicios se desarrollen en un contexto real para que los alumnos relacionen mejor los ejes de coordenadas y los puntos del plano con su intuición de posición de un objeto en la realidad. Por ello, ejercicios como el 2 o el 3 que presentamos a continuación pueden ayudar a comprender mejor lo que pide el problema que si se muestran sin el contexto real.

A lo largo del tema es bastante positivo que se realicen muchos dibujos y gráficas aunque el ejercicio en cuestión no lo solicite, ya que una visualización de los puntos, vectores o rectas favorece que el alumnado con ciertas dificultades en este tema comprenda mejor los datos que se le dan y la información que se le solicita. Por tanto, si fuera necesario, se haría un breve repaso de representación de rectas en el plano.

ACTIVIDAD DE GRUPO

Las coordenadas geográficas como sistema plano

Las coordenadas terrestres indican la posición de un punto sobre la superficie de la Tierra, que, evidentemente, no es plana, sino esférica. Sin embargo, cuando nos restringimos a una zona no muy extensa, como una región o un país de tamaño medio, las coordenadas terrestres se pueden considerar como coordenadas en el plano.

La actividad consiste en que los alumnos, por grupos, se informen sobre las coordenadas geográficas de su localidad (longitud y latitud) y de otros puntos de interés no muy lejanos, como pueden ser otras localidades de la comunidad autónoma.

Aplicarán lo aprendido para calcular la distancia entre cada pareja de puntos a partir de las coordenadas que han obtenido, consideradas como sistema plano, y compararán los resultados con las distancias reales, que deben haber consultado también previamente.

SOLUCIONES DE LAS ACTIVIDADES PROPUESTAS

1. **a)** Falsa
b) Verdadera
c) Verdadera
d) Verdadera
e) Verdadera

2. $\overrightarrow{AB} = (0, 5) + (12, 0) = (12, 5)$

$d(A, B) = \sqrt{12^2 + 5^2} = 13$ millas de A a B

$\text{tg}\ \alpha = \dfrac{5}{12} \Rightarrow \alpha = 22°\ 37'\ 12''$

3. **a)** Lavinia $= L(1, 1)$; Tomás $= T(4, 0)$; Joaquín $= J(5, 3)$

b) $d(L, T) = \sqrt{(4 - 1)^2 + (0 - 1)^2} = 3{,}16$ m

$d(L, J) = \sqrt{(5 - 1)^2 + (3 - 1)^2} = 4{,}47$ m

$d(J, T) = \sqrt{(4 - 5)^2 + (0 - 3)^2} = 3{,}16$ m

c) Esther $= E(3, 2)$

4. Paramétricas: $\left.\begin{array}{l} x = 1 - t \\ y = -2 + 2t \end{array}\right\}$

Continua: $\dfrac{x - 1}{-1} = \dfrac{y + 2}{2}$

General: $2x + y = 0$

Explícita: $y = -2x$

5. Como $(-1, 2)$ y $(1, -2)$ tienen la misma dirección y nos dicen que las rectas no son coincidentes, entonces tienen que ser paralelas.

En el **CD Banco de actividades** se pueden encontrar más propuestas de actividades de refuerzo.

ACTIVIDADES DE REFUERZO

1 Indica si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas.

a) El módulo de $\vec{a} + \vec{b}$ es el módulo de $\vec{a}$ más el módulo de $\vec{b}$.

b) Dos vectores equipolentes son paralelos o están alineados.

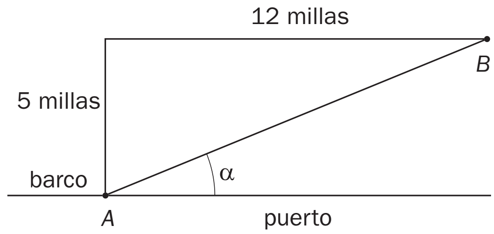
c) $5(3, -1) + 3(-6, 2) = (-3, 1)$

d) Si dos vectores tienen el mismo argumento, entonces poseen la misma dirección y sentido.

e) El vector que tiene el origen de $\vec{a}$ y el extremo de $\vec{b}$ es $\vec{a} + \vec{b}$.

2 Un barco parte del punto A del puerto en dirección norte. Después de recorrer 5 millas, cambia de rumbo, dirigiéndose hacia el este otras 12 millas, llegando al punto B.

Calcula la distancia a la que se encuentra del punto de salida y el ángulo de la trayectoria que debería haber seguido para ir directamente de A a B.

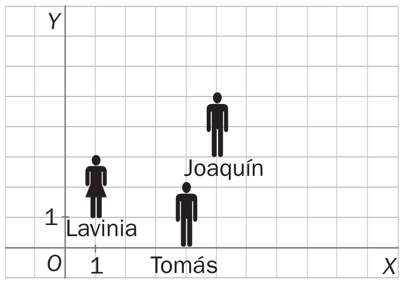


3 Lavinia, Tomás y Joaquín se encuentran en una habitación con el suelo embaldosado como en la figura.

a) Indica las coordenadas de la posición de cada persona.

b) Calcula la distancia que separa a cada par de personas si cada baldosa mide un metro.

c) ¿Dónde se debe colocar Esther para estar en medio de Lavinia y Joaquín?



4 En el siguiente ejemplo se explican los pasos que se deben seguir para, a partir de la ecuación vectorial de una recta, conseguir las ecuaciones paramétricas, la continua, la general y la explícita.

Procedimiento	Operaciones	Ecuación
Ecuación vectorial: $(x, y) = (-1, 2) + t(3, -2)$	....	....
Ecuaciones paramétricas: se multiplica por t, se suman los vectores y se iguala la primera coordenada con la primera y la segunda con la segunda.	$(x, y) = (-1 + 3t, 2 - 2t)$	$\left.\begin{array}{l} x = -1 + 3t \\ y = 2 - 2t \end{array}\right\}$
Ecuación continua: se despeja t en cada ecuación paramétrica y se iguala lo obtenido en cada una de ellas.	$t = \dfrac{x+1}{3}, \ t = \dfrac{y-2}{-2}$	$\dfrac{x+1}{3} = \dfrac{y-2}{-2}$
Ecuación general: se multiplica en cruz y se pasa todo al mismo miembro de la igualdad.	$-2(x + 1) = 3(y - 2)$	$-2x - 3y + 4 = 0$
Ecuación explícita: se despeja la y.	$-3y = 2x - 4$	$y = \dfrac{-2x + 4}{3}$

Realiza estos mismos pasos para obtener las ecuaciones paramétricas, la continua, la general y la explícita de la recta dada por su ecuación vectorial $(x, y) = (1, -2) + t(-1, 2)$.

5 ¿Cuál es la posición relativa de las rectas no coincidentes $(x, y) = (1, 1) + t(-1, 2)$ y $(x, y) = (0, 1) + t(1, -2)$ dadas por su ecuación vectorial?

Indicación: para averiguarlo, basta con observar si sus vectores directores tienen la misma dirección o no.

ORIENTACIONES METODOLÓGICAS

Estas actividades están orientadas a que los alumnos y alumnas de refuerzo relacionen situaciones de la vida cotidiana, susceptibles de ser expresadas con funciones, con todos los conceptos tratados a lo largo de la unidad. Deben apreciar que existen numerosas situaciones de la vida real que pueden ser expresadas con funciones y, además, que todas estas relaciones se pueden formular con lenguaje matemático. Es aconsejable que el profesor, antes de comenzar a resolver estas actividades, plantee contextos en los que aparezcan las funciones. También los alumnos pueden buscar ejemplos. Oralmente, el profesor puede plantear cuestiones como las tratadas en las dos primeras actividades y traducirlas al lenguaje de las funciones. De esta forma, los alumnos y alumnas de refuerzo tienen que ser capaces de resolver las actividades aquí propuestas con iniciativa y autonomía.

ACTIVIDAD DE GRUPO

Buscando funciones en la prensa

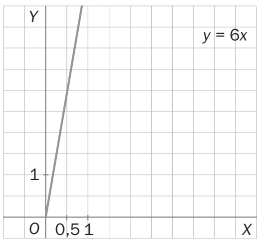
Se divide la clase en grupos de tres o cuatro alumnos. Cada grupo deberá buscar, en periódicos, noticias en las que aparezcan funciones y/o gráficas. Se planteará un debate en clase sobre la aplicación de las funciones en la vida cotidiana. Cada grupo deberá explicar al resto una noticia y traducir al lenguaje matemático las características de la función: "¿Cuál es el dominio?", "¿Y el recorrido?"...

SOLUCIONES DE LAS ACTIVIDADES PROPUESTAS

1. Primera columna de la tabla
- 0, 1, 2, 3, 4...
- 0, 6, 12, 18, 24...
- Precio = número de entradas · 6
- 36 euros

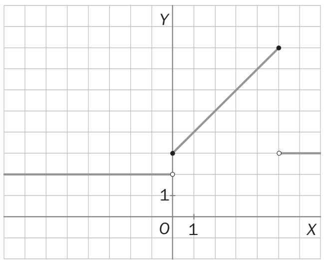
Segunda columna de la tabla
- $D(f) = \{0, 1, 2, 3...\}$
- $R(f) = \dot{6}$ (Múltiplos de 6)
- Expresión: $f(x) = 6x$
- $f(6) = 36$

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$f(x)$	0	6	12	18	24	30	36	42	48	54



2. Primera columna de la tabla
- De 2000 a 2006
- De −1000 a 3000 millones
- Ganancias entre 2000 y 2002 y entre 2004 y 2006, y pérdidas entre 2002 y 2004
- Aumentaron de 2000 a 2001 y de 2003 a 2005, y disminuyeron de 2001 a 2003 y de 2005 a 2006.
- Ha ganado más en 2005 (3000 millones) y menos en 2003 (perdió 1000 millones).
- De 2000 a 2001 ha perdido 1000 millones 2003 a 2004 ha ganado 1000 millones.
- Ha ganado más entre 2004 y 2005.

2. Segunda columna de la tabla
- $D(f) = [2000, 2006]$
- $R(f) = [-1000, 3000]$
- Es positiva en $[2000, 2002] \cup [2004, 2006]$ y negativa en $[2002, 2004]$.
- Es creciente en $[2000, 20012] \cup [2003, 2005]$ y decreciente en $[2001, 2003] \cup [2005, 2006]$.
- Máximo absoluto: $[2005, 3000]$
  Mínimo absoluto: $[2003, -1000]$
- $TV\,[2001, 2002] = -1000$ y $TV\,[2003, 2004] = 1000$
- $TVM\,[2000, 2001] = 1000 < 3000 =$
  $= TVM\,[2004, 2005]$



3.

x	$f(x)$
−7	2
−4	2
−1	2
0	3
2	5
4	7
5	8
5	3
5	3

En el **CD Banco de actividades** se pueden encontrar más propuestas de actividades de refuerzo.

ACTIVIDADES DE REFUERZO

1 El precio de una entrada de cine es de 6 euros. Completa la siguiente tabla.

Lenguaje cotidiano de las funciones	Lenguaje matemático de las funciones
a) ¿Qué cantidad de entradas puedo comprar?	$D(f) =$
b) ¿Qué cantidad puedo pagar?	$R(f) =$
c) Escribe la relación número entradas-precio	Expresión analítica: $f(x) =$
d) ¿Cuánto pagó por 6 entradas?	$f(6) =$

Realiza una tabla de valores y dibuja la gráfica.

2 La siguiente gráfica muestra las pérdidas y las ganancias de una empresa de electrodomésticos a lo largo de un año.

Completa la siguiente tabla.

Lenguaje cotidiano de las funciones	Lenguaje matemático de las funciones
a) ¿Durante qué años tuvo la empresa actividad?	$D(f) =$
b) ¿Entre qué valores ha oscilado la ganancia?	$R(f) =$
c) ¿Durante qué años ha tenido ganancias? ¿Y pérdidas?	$f(x)$ positiva: $f(x)$ negativa:
d) ¿En qué años crecieron las ganancias? ¿Y en cuáles disminuyeron?	Creciente: Decreciente:
e) ¿En qué año ha ganado más? ¿Y menos?	Máximo absoluto: Mínimo absoluto:
f) ¿En cuánto han variado las ganancias de 2001 a 2002? ¿Y de 2003 a 2004?	$TV[2001, 2002] =$ $TV[2003, 2004] =$
g) ¿En qué período ha ganado más, entre 2000 y 2001 o entre 2004 y 2005?	¿$TVM[2000, 2001] > TVM[2004, 2005]$?

3 Completa la tabla de valores y después representa gráficamente la siguiente función.

$$f(x) = \begin{cases} 2 & \text{si} \quad x < 0 \\ x + 3 & \text{si} \quad 0 \leq x \leq 5 \\ 3 & \text{si} \quad x > 5 \end{cases}$$

x	−7	−4	−1	0	2	4	5	7	9
$f(x)$									

REFUERZO **11** # Funciones polinómicas y racionales

ORIENTACIONES METODOLÓGICAS

Todos los alumnos y alumnas de refuerzo deben ser capaces de reconocer, tanto gráfica como analíticamente, las funciones estudiadas a lo largo de la unidad. Para conseguir este objetivo, se han propuesto las actividades 1 y 3.

Las principales dificultades con las que se encuentran los alumnos y alumnas de refuerzo en esta unidad son:

- Resolución de actividades en las que se tengan que representar funciones mediante traslaciones de otras ya conocidas. Para solventar este problema, los alumnos y alumnas deben tener claro cuáles son las distintas situaciones con las que se pueden encontrar. La realización de esquemas o cuadros resumen, como el de la actividad número 3 aquí propuesta, ayudará a despejar las dudas que pudieran existir y a clarificar las ideas.
- Resolución de problemas en los que se tenga que traducir el enunciado al lenguaje de las gráficas, y estudiar e interpretar gráficas para resolver el problema. La realización de un número suficiente de problemas de este tipo, guiados con pautas o pasos, ayudará a la comprensión de los mismos.

En cualquier caso, a este tipo de alumnado se le deben plantear problemas sencillos, ayudándoles a comprenderlos mediante esquemas o guiones.

ACTIVIDAD DE GRUPO

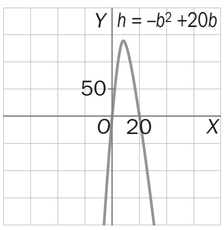
Traslación de gráficas

La clase se divide en grupos de tres o cuatro alumnos. Cada grupo, partiendo de la gráfica $y = x^2$, debe dibujar por traslaciones 5 gráficas. Una vez que todos los grupos tengan dibujadas sus gráficas, el resto de los grupos debe adivinar dónde se encuentra el vértice de cada una de sus gráficas sin utilizar números. Para ello tienen que hacer preguntas por turnos, y el grupo que ha ideado la gráfica sólo puede contestar con "sí" o "no". Una de las preguntas puede ser: "¿Es una traslación horizontal a la derecha?" Si, por ejemplo, quieren saber si es una traslación de 3 unidades, como no se puede utilizar el número 3, tienen que idear la manera de expresar el 3 con funciones; por ejemplo: "¿Es la coordenada x del vértice de la parábola $y = x^2 - 6x$?" Cada vez es un grupo el que contesta a las preguntas. El profesor y el resto de los grupos deben comprobar que tanto las preguntas como las respuestas están correctamente realizadas.

SOLUCIONES DE LAS ACTIVIDADES PROPUESTAS

1. Gráfica 1: apartado d
Gráfica 2: apartado e
Gráfica 3: apartado a
Gráfica 4: apartado b
Gráfica 5: apartado c

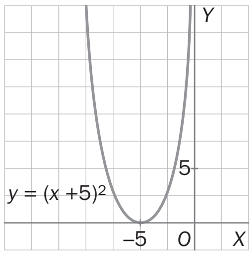
2. **a)** $40 = 2b + 2h$
b) $h = 5$, $h = 10$, $h = 8$, $h = 20 - b$
c) $A = b \cdot (20 - b) = -b^2 + 20b$
d) Función cuadrática
e)



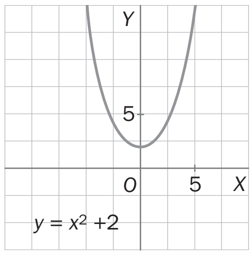
f) La base y la altura miden 10 m. La superficie es de 100 m^2.

3. **a)** $y = 2x^3$ **b)** $y = \dfrac{15}{x}$

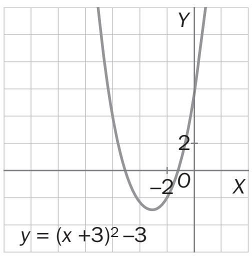
4. **a)**



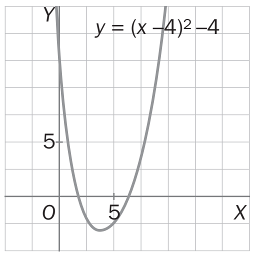
c)



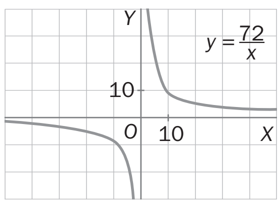
b)



d)



5. **a)** Sí
b) $x \cdot y = 72$
c) 2 horas
d)

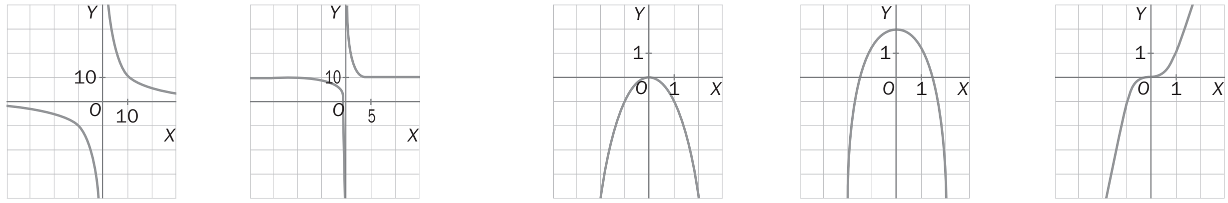


En el **CD Banco de actividades** se pueden encontrar más propuestas de actividades de refuerzo.

11 Funciones polinómicas y racionales

ACTIVIDADES DE REFUERZO

1 Asocia a cada gráfica su expresión correspondiente.



a) $f(x) = -x^2$ **b)** $f(x) = -x^2 + 2$ **c)** $f(x) = x^5$ **d)** $f(x) = \frac{3}{x}$ **e)** $f(x) = \frac{5x + 3}{x}$

2 Con 40 metros de alambre, se quiere construir una valla de forma rectangular. Responde a las siguientes cuestiones.

a) Llamando b a la base del rectángulo y h a la altura completa: $40 =$ ____ $+$ ____

b) Si la base mide 15 metros, ¿cuánto medirá la altura? ¿Y si mide 10 metros? ¿Y si mide 12? ¿Y si la base mide b metros?

c) Si b es la medida de la base, plantea la ecuación que permite obtener el área en función de b.

d) ¿De qué tipo de función se trata?

e) Como habrás comprobado, se trata de una función cuadrática. Represéntala gráficamente.

f) Vamos a maximizar el área. Es decir, vamos a hallar las dimensiones del rectángulo para que el área sea máxima. ¿Hacia dónde tiene la parábola orientadas las ramas? Entonces, ¿tiene máximo? Recuerda que el máximo de una parábola coincide con su vértice. Hállalo. La variable b es la base del rectángulo y la variable $A(b)$ es la superficie máxima. Ahora solo falta hallar la altura h.

3 Halla:

a) La expresión de una función potencial de tercer grado que pase por el punto $P(2, 16)$.

b) La expresión de una función de proporcionalidad inversa que pase por el punto $Q(3, 5)$.

4 Traslaciones de parábolas. Si tienes la gráfica de la función $y = x^2$, para representar funciones del tipo $f(x) = (x + c)^2$, $f(x) = x^2 + k$ o $f(x) = (x + c)^2 + k$, solo hay que seguir las siguientes indicaciones.

Traslación vertical $y = x^2 + k$		Traslación horizontal $y = (x + c)^2$	
$k > 0$	$k < 0$	$c > 0$	$c < 0$
Gráfica hacia arriba k unidades	Gráfica hacia abajo k unidades	Gráfica hacia la izquierda c unidades	Gráfica hacia derecha c unidades
Traslación vertical y horizontal: $y = (x + c)^2 + k$			

Representa las siguientes funciones cuadráticas, a partir de la gráfica de la función $y = x^2$, explicando qué traslaciones realizas.

a) $f(x) = (x + 5)^2$ b) $f(x) = (x + 3)^2 - 3$ c) $f(x) = x^2 + 2$ d) $f(x) = (x - 4)^2 - 4$

5 Dos grifos tardan 36 horas en llenar una piscina. Si hubiera tres grifos, emplearían 24 horas. Completa la tabla y contesta razonadamente a las cuestiones.

N.º grifos	2	3	4	5		
N.º de horas	36	24				

a) ¿Son magnitudes inversamente proporcionales? ¿Por qué?

b) Si x es el número de grifos e y el número de horas que se tarda en llenar la piscina, ¿cuánto vale el producto $x \cdot y$?

c) ¿Cuánto tardarían en llenar la piscina 36 grifos?

d) Representa la función que relaciona el número de grifos con el número de horas.

REFUERZO

12 Funciones exponenciales

ORIENTACIONES METODOLÓGICAS

Antes de que los alumnos y alumnas de refuerzo comiencen a resolver las actividades propuestas, sería conveniente que repasaran algunos conceptos y técnicas.

- El estudio de la función exponencial hace necesario repasar las potencias de base positiva y exponente entero. Para ello, bastará con hacer unos ejemplos sobre el concepto de potencia y sus propiedades.
- Sería conveniente refrescar el cálculo de potencias con la calculadora científica. Y, si el tiempo y los recursos lo permiten, también sería aconsejable recordar, o en su defecto aprender, el manejo de la calculadora gráfica. El objetivo de usar este tipo de calculadores es que los alumnos y alumnas de refuerzo puedan comprobar las gráficas que realicen.

El profesor debe dar una gran importancia a la autonomía e iniciativa personal del alumnado en la resolución de problemas. Es por ello por lo que, al resolver las actividades propuestas, deben ser los propios alumnos y alumnas los que razonen el procedimiento que hay que seguir y la técnica más adecuada. Un problema que no es resuelto correctamente, pero que se ha razonado, debe ser tomado como un buen método de aprendizaje. En este caso, los alumnos y alumnas deben buscar el error cometido y otras posibles vías de resolución. Es bueno que los alumnos que hayan resuelto un problema correctamente expliquen al resto de la clase sus ideas, pues esta actividad les planteará la necesidad de perfilar un lenguaje preciso, y les presentará la oportunidad de hablar de matemáticas entre ellos y con el profesor.

ACTIVIDAD DE GRUPO

Interés

En la mayoría de los bancos y cajas de ahorro hay publicidad con ofertas sobre inversiones e intereses, y sobre hipotecas y el interés cobrado. Los alumnos y alumnas pueden buscar estas ofertas en el periódico, internet, bancos..., y examinar las condiciones que se ofrecen. Por parejas, deben estudiar las ofertas que hayan encontrado y calcular los beneficios que darían 1000 euros. Deben observar si los beneficios se obtienen mensualmente, anualmente..., y si se trata de interés simple o compuesto. Después, se pueden debatir en clase las ofertas que se han encontrado y buscar la que más intereses daría o la hipoteca menos aconsejable.

SOLUCIONES DE LAS ACTIVIDADES PROPUESTAS

1.
- Rojo: $f(2) = 9$
- Amarillo: $f(2) = \frac{1}{4}$
- Verde: $f(2) = 16$
- Naranja: $f(2) = 50$
- Azul: $f(2) = 0{,}49$
- Morado: $f(2) = 0{,}16$

La bandera es 9, 16, 50. Se trata del país C.

2. Las funciones crecientes son f y g, y:

- $f(3) = e^3 \approx 20{,}08$
- $g(3) = 2^5 = 32$

Por tanto, la ciudad es la número 2.

3. Las gráficas son las siguientes:

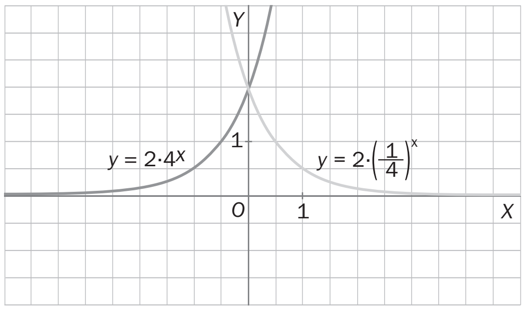
- Gráfica I: $j(x) = 5^{x-3} + 3 \rightarrow j(10) = 78128$
- Gráfica II: $h(x) = 5^x + 2 \rightarrow h(10) = 9765627$
- Gráfica III: $f(x) = 5^{x+2} \rightarrow f(10) = 244140625$
- Gráfica IV: $g(x) = 5^{x+3} - 2 \rightarrow g(10) = 1220703123$

Por tanto:

$f(10) + g(10) + h(10) + j(10) = 1474687503$

La calle es C/ 1474687503

4. La representación gráfica es la siguiente.



Se observa que se cortan en el punto (0, 2), luego el número de la calle es el 2.

5. $f(5) = \left(\frac{5}{6}\right)^5 \approx 0{,}40$. Seguirá funcionando el 40%; por tanto, dejará de funcionar el 60%. La primera parte del código es 60.

6. $P_{5\text{ años}} = 15\,000 \cdot (1 + 0{,}025)^5 \approx 16\,971{,}1$ €

La segunda parte del código es 16 971.

En el **CD Banco de actividades** se pueden encontrar más propuestas de actividades de refuerzo.

ACTIVIDADES DE REFUERZO

1 *El inspector Aguirre está investigando el robo de un cuadro, La amapola roja, en una famosa pinacoteca. Investigando el desagradable acontecimiento, sólo ha descubierto que puede estar en uno de los siguientes países: país* A, *país* B, *país* C *o país* D. *Inesperadamente, hasta su despacho ha llegado una misteriosa carta con una serie de pistas para descubrir el lugar donde se encuentra oculto el cuadro y el código de la caja fuerte en la que está escondido. ¿Le ayudas a descifrar las pistas?*

Pista 1. La bandera del país donde está el cuadro tiene los colores rojo, verde y naranja. Para descifrar el país, debes tener en cuenta que cada color tiene asociado un número. Descubre cuáles son esos números y pinta las banderas. La pista es la siguiente: Cada color es la imagen del 2 según las siguientes funciones:

- Rojo: $f(x) = 3^x$
- Naranja: $f(x) = 2 \cdot 5^x$
- Amarillo: $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$
- Azul: $f(x) = 0{,}7^x$
- Verde: $f(x) = 4^x$
- Morado: $f(x) = 4 \cdot 0{,}2^x$

El país en el que se encuentra escondido el cuadro es el ____.

Color 9
Color 0.49
Color $\frac{1}{4}$
Pa s A

Color 9
Color 16
Color 50
Pa s C

Color 0.16
Color $\frac{1}{4}$
Color 50
Pa s B

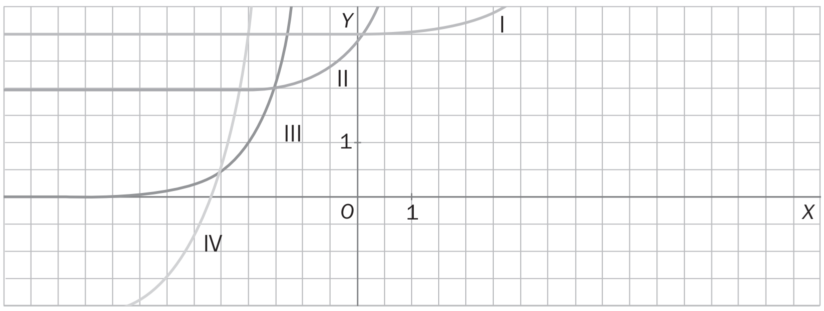
Color 0.49
Color 16
Color 0.16
Pa s D

2 *Pista 2.* En ese país hay tres ciudades en las que se puede encontrar el cuadro. La ciudad buscada es la que tiene asociada la única función creciente que pasa por el punto (3, 32).

- Ciudad 1: $f(x) = e^x$
- Ciudad 2: $g(x) = 2^{x+2}$
- Ciudad 3: $h(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$

La ciudad donde está escondido el cuadro es la _____.

3 *Pista 3.* El nombre de la calle es un número. Las siguientes gráficas se han obtenido mediante traslaciones de la función $f(x) = 5^x$. Halla la expresión algebraica de cada una de ellas, explicando el proceso que has seguido. Después calcula la imagen del 10 para cada una de las funciones. Suma los resultados y obtendrás el nombre de la calle.



El nombre de la calle en la que se encuentra escondido el cuadro es C/ ___________________.

4 *Pista 4.* El número de la calle es la suma de las coordenadas del punto en el que se cortan las gráficas de las funciones $f(x) = 2 \cdot 4x$ y $g(x) = 2 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^x$. Representa gráficamente ambas funciones y observa el punto de corte. El número en el que se encuentra escondido el cuadro es ___.

5 *Pista 5.* La primera parte del código de la caja fuerte donde está escondido el cuadro es la solución del siguiente problema: "Mediante los controles de calidad de una empresa de electrodomésticos, se ha comprobado que el porcentaje de lavadoras que siguen funcionando al cabo de t años viene dado por la función $f(t) = \left(\frac{5}{6}\right)^t$. ¿Qué porcentaje de lavadoras dejará de funcionar durante el quinto año?"

La primera parte del código de la caja fuerte en la que se encuentra escondido el cuadro es ______.

6 *Pista 6.* La segunda parte del código de la caja fuerte es la parte entera de la solución del siguiente problema: "El precio de un garaje es, inicialmente, de 15 000 euros. Este precio aumenta un 2,5% al año. ¿Cuánto valdrá el garaje dentro de cinco años si el precio sigue creciendo en las mismas condiciones?"

La segunda parte del código de la caja fuerte donde está escondido el cuadro es _______.

¡Ya has descubierto el lugar donde se encuentra La amapola roja!

ORIENTACIONES METODOLÓGICAS

La unidad de *Estadística unidimensional* suele atraer bastante a los alumnos, debido a la gran aplicación que tiene en situaciones de la vida cotidiana. Por ello, es aconsejable plantear un gran número de ejemplos prácticos que se puedan analizar utilizando lo contenidos estudiados. Los alumnos y alumnas de refuerzo deben ser capaces de realizar un estudio estadístico sencillo calculando los parámetros de dispersión y centralización, e interpretando sus resultados. Las principales dificultades surgen a la hora de interpretar los resultados; por ello, es conveniente:

- Proponer problemas con un enunciado sencillo y cercano a ellos.
- Guiar a los alumnos en la interpretación de los problemas. Para ello bastará con hacer preguntas como "¿cuál es el número de calzado que usa la mayoría de los niños?", en vez de "calcula la moda". De esta forma, los alumnos y alumnas extraerán rápidamente la conclusión. Aunque es necesario que ellos mismos se den cuenta de que el concepto matemático que describe esta situación se llama moda.
- Insistir en que analicen las conclusiones obtenidas y que reflexionen sobre si la respuesta tiene o no lógica.

ACTIVIDAD DE GRUPO

Estadísticas en el deporte

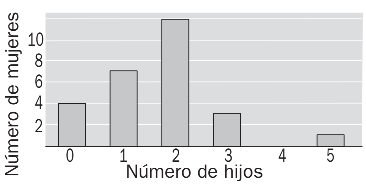
El mundo del deporte, que tanto gusta a nuestro alumnado, está lleno de estadísticas. Un ejemplo es la página de la Liga profesional americana de baloncesto (www.nba.com). En dicha Liga hay 30 equipos divididos en 6 divisiones, así que podemos repartir cada equipo a cada alumno mediante un sorteo. Los alumnos han de seleccionar cinco jugadores del equipo que les haya correspondido y calcular la media de puntos que dicho quinteto consigue. Así tendrán los puntos totales de su equipo para jugar.

Tras esto, haremos que los cinco equipos de cada división se enfrenten entre ellos, suponiendo que cada equipo consigue en cada partido su media de puntos, y tendremos el resultado de todos los partidos. Construiremos una clasificación con dichos resultados y posteriormente los alumnos la compararán con la clasificación real; y discutirán acerca de las similitudes y diferencias entre ambas clasificaciones, la imaginaria y la real.

SOLUCIONES DE LAS ACTIVIDADES PROPUESTAS

1.

N.º de hijos	f_i	F_i	h_i	H_i
0	4	4	0,15	0,15
1	7	11	0,26	0,41
2	12	23	0,44	0,85
3	3	26	0,11	0,96
4	0	26	0	0,96
5	1	27	0,04	1



a) $\overline{x} = 1{,}67$ **c)** $M_c = 0$ **e)** $h_6 = 0{,}04 \Rightarrow 4\%$

b) $M_e = 2$ **d)** $F_4 = 26$

2. Porque el número medio de vueltas que han dado los alumnos corresponde a un aprobado.

3. Nombre 1: Antonio

Nombre 2: Carlos

Nombre 3: Pablo

4. **a)** Han marcado los dos el mismo número de goles, luego las medidas serán iguales: $\overline{x} = 3$.

b) Como las medias son iguales, será suficiente comparar las desviaciones típicas.

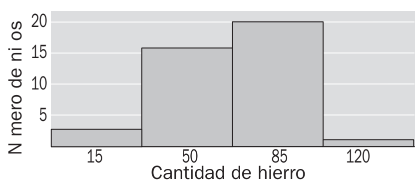
$$s_1 = 1{,}53 > s_2 = 1{,}29$$

Es más regular el segundo equipo.

5. **a)** La población son los niños del pueblo, y la muestra, los 40 niños seleccionados. La variable en estudio es Nivel de hierro. Es cuantitativa continua.

b)

Hierro	Marca	f_i	F_i	h_i	H_i
[15, 50)	17,50	3	3	0,075	0,075
[50, 85)	67,50	16	19	0,400	0,475
[85, 120)	102,50	20	39	0,500	0,975
[120, 155)	137,50	1	40	0,025	1



c) Tienen anemia el 7,5% de los niños (h_1).

En el **CD Banco de actividades** se pueden encontrar más propuestas de actividades de refuerzo.

ACTIVIDADES DE REFUERZO

1 Se ha hecho una encuesta a 27 mujeres de una empresa sobre el número de hijos que tienen. Los datos recogidos se han resumido en una tabla de frecuencias, pero se han borrado algunos. Completa la tabla de frecuencias y después construye el diagrama de barras correspondiente. Contesta a las cuestiones.

N.º de hijos	f_i	F_i	h_i	H_i
0		4		
1		11		
2	12			
3		26		
4		26		
5				

a) Calcula la media. ¿Cuántos hijos por término medio tiene cada mujer?

b) Calcula la mediana. ¿Cuál es el número de hijos tal que el 50% de las mujeres tienen menos hijos y el 50% más?

c) Calcula la moda. ¿Cuál es el número de hijos que tienen la mayoría de las mujeres?

d) ¿Cuántas mujeres tienen tres o menos hijos?

e) ¿Qué porcentaje de mujeres tiene 5 hijos?

2 Un alumno no pudo asistir al examen de Educación Física porque estuvo enfermo. La prueba consistía en dar el mayor número de vueltas posibles a la pista en tres minutos. La profesora decide hacerle el examen otro día. Observa lo que le dice el alumno a la profesora:

¿Por qué dice la profesora esto?

3 Tres amigos han apuntado las notas de sus exámenes de Matemáticas. Indica qué nombre corresponde a cada lista de notas ayudándote de la información que aparece en esta conversación.

Pablo: "Mi nota media ha sido de 6,5". Antonio: "Yo no he conseguido superarte". Carlos: "Pues yo sí".

4	5,5	8	7	4	7	5
Nombre 1:						

8	5,5	6	7,5	6	7	9
Nombre 2:						

7,5	7	6,5	7,5	5	5	6,5
Nombre 3:						

4 En la siguiente tabla se muestran los goles marcados por dos equipos en seis partidos de fútbol.

	Partido 1	Partido 2	Partido 3	Partido 4	Partido 5	Partido 6
Equipo 1	0	3	3	3	4	5
Equipo 2	2	3	4	5	3	1

a) ¿Cuántos goles ha metido en total cada equipo? En vista de los resultados, ¿cómo serán ambas medias? Calcula las medias y comprueba tu respuesta.

b) Para comparar las dos distribuciones, ¿es suficiente con comparar las desviaciones típicas o hace falta calcular los coeficientes de variación? ¿Por qué? Compara las dos distribuciones y comprueba qué equipo es más regular goleando.

5 En un pueblo se quiere hacer un estudio sobre los niveles de hierro en sangre de los niños. Para ello, se ha elegido una muestra de 40 niños. Los resultados obtenidos están reflejados en la siguiente tabla.

Hierro (μg/dL)	[15, 50)	[50, 85)	[85, 120)	[120, 155)
N.º de niños	3	16	20	1

a) ¿Cuál es la población? ¿Y la muestra? ¿Y la variable en estudio? Clasifícala.

b) Construye la tabla de frecuencias y el histograma asociado.

c) Se considera que un niño tiene anemia si su nivel de hierro es inferior a 50 μg/dL. En vista de la tabla anterior, ¿qué porcentaje de niños tiene anemia?

ORIENTACIONES METODOLÓGICAS

En esta unidad, todos los alumnos deberían conseguir dos objetivos fundamentales: organizar datos de una manera estructurada para poder realizar un recuento de los mismos, y clasificar los distintos tipos de agrupamientos posibles que podemos contar mediante la combinatoria, es decir, variaciones, permutaciones y combinaciones. Resumiendo, el alumno debe:

- Dibujar diagramas de árbol en casos sencillos para realizar un recuento o para indicar todos los casos existentes.
- Identificar las variaciones, permutaciones y combinaciones, analizando si en los distintos agrupamientos intervienen todos los elementos y si importa en qué orden se encuentren.

Puede ser beneficioso seguir un esquema como el del libro del alumno que ayude a realizar este análisis, considerando también si los elementos se pueden o no repetir, ya que a los alumnos les puede costar diferenciar entre variaciones, permutaciones y combinaciones, con o sin repetición.

ACTIVIDAD DE GRUPO

El juego de las sillas

Para explicar esta actividad, colocamos dos sillas en una zona despejada del aula y pedimos a dos alumnos que se sienten en ellas de las dos formas posibles. Ampliamos el grupo con un alumno más, pero mantenemos dos sillas, y se pide que representen las seis posibilidades del juego de las sillas en este caso. Las anotamos en la pizarra como en esta tabla.

	1	2	3	4	5	6
Silla 1	*A*	*A*	*B*	*B*	*C*	*C*
Silla 2	*B*	*C*	*A*	*C*	*A*	*B*
Pierde	*C*	*B*	*C*	*A*	*B*	*A*

Una vez comprendida la actividad, formamos algunos grupos de cuatro alumnos y otros de cinco. A todos los grupos se les dan tres sillas, y deben contar y anotar todas las posibilidades: silla 1, silla 2, silla 3 y pierde.

– ¿Qué diferencias se observan entre unos grupos y otros?

– ¿En algún momento no importa el orden?

SOLUCIONES DE LAS ACTIVIDADES PROPUESTAS

1. *BVAR, BVRA, BAVR, BARV, BRVA, BRAV, VBAR, VBRA, VABR, VARB, VRBA, VRAB, ABVR, ABRV, AVBR, AVRB, ARBV, ARVB, RBVA, RBAV, RVBA, RVAB, RABV, RAVB*

$P_4 = 4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ maneras diferentes de unir las piezas

2. a) $VR_{30,\,3} = 30^3 = 27\,000$ distribuciones distintas de premios

b) $V_{30,\,4} = 30 \cdot 29 \cdot 28 \cdot 27 = 657\,720$ distribuciones diferentes de premios

3. a) $C_{40,\,3} = \dfrac{V_{40,\,3}}{P_3} = \dfrac{40 \cdot 39 \cdot 38}{3 \cdot 2 \cdot 1}$ jugadas

b) $C_{40,\,2} = \dfrac{V_{40,\,2}}{P_2} = \dfrac{40 \cdot 39}{2 \cdot 1}$ jugadas

4.

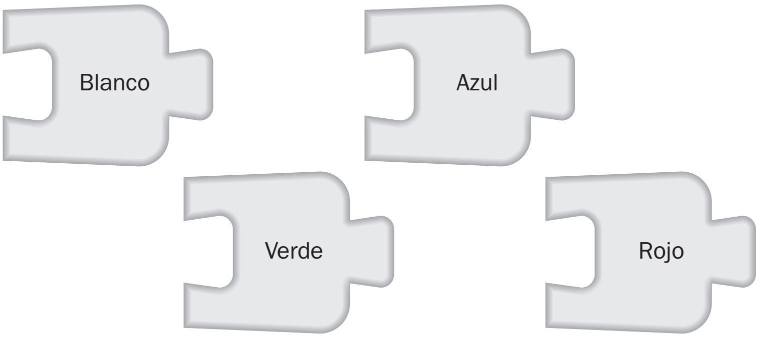
En el **CD Banco de actividades** se pueden encontrar más propuestas de actividades de refuerzo.

14 Combinatoria

ACTIVIDADES DE REFUERZO

1 Copia en una cartulina las piezas del dibujo, recórtalas y coloréalas como se indica. Todas las piezas deben encajar entre sí.

Une todas las piezas entre sí de todas las maneras posibles y anota los resultados. ¿Cuántas posibilidades hay? Realiza este cálculo utilizando la combinatoria.



2 En un sorteo participan 30 personas y se reparten tres premios: un teléfono móvil, un reproductor de MP3 y una entrada de cine. El sorteo se efectúa sacando un trozo de papel de una caja donde se han metido los nombres de todos los participantes, de modo que no se vuelven a introducir los papeles una vez sacados. ¿De cuántas maneras diferentes se pueden distribuir los premios?

1.º *Numeremos a los participantes y pongamos algunos ejemplos de distribución de premios.*

Móvil	***MP3***	***Entrada***
12	*23*	*A*
17	*21*	*C*
21	*17*	*B*
...	*...*	*...*

2.º *¿Están incluidos todos los elementos en cada distribución? No, solo 3, por lo que no son permutaciones.*

3.º *¿Importa el orden de colocación de los elementos en cada distribución? Sí, el orden indica qué premio recibe cada uno, por lo que no son combinaciones.*

4.º *¿Se pueden repetir los elementos en cada distribución? No, porque el papel de un ganador no se vuelve a introducir en la caja, por lo que son variaciones sin repetición.*

5.º $V_{30,\,3} = 30 \cdot 29 \cdot 28 = 24\,360$ *distribuciones posibles de premios.*

a) ¿Cuántas distribuciones de premios distintas se obtienen si el papel de un ganador se vuelve a meter en la caja antes de sortear el siguiente premio?

b) Si añadimos un cuarto premio, ¿de cuántas maneras se pueden distribuir los premios si a cada uno sólo le puede corresponder uno?

3 En el juego de la brisca se utiliza una baraja española de 40 cartas, y cada jugada está formada por 3 cartas.

a) ¿Cuántas jugadas distintas existen en la brisca?

b) Si un jugador tiene el as de oros, ¿cuántas jugadas diferentes puede tener?

4 Voy a grabar en un CD una canción de cada uno de mis tres grupos preferidos. De Amaral tengo tres canciones: *Te necesito*, *Sin ti no soy nada* y *Moriría por vos*; de Black Eyed Peas dispongo de dos: *Shut up* y *Hey mama*, y de Shakira, de otras dos: *Suerte* y *Te dejo Madrid*. Dibuja un diagrama de árbol que represente todas las ternas posibles.

ORIENTACIONES METODOLÓGICAS

En esta unidad se tratan bastante los conceptos del cálculo de probabilidades, por lo que todos los alumnos deben tener claro el significado de los mismos y su aplicación a los problemas de la vida cotidiana susceptibles de un tratamiento probabilista.

En particular, es fundamental que apliquen con cierta soltura la regla de Laplace, analizando previamente si el espacio muestral que hayan descrito está formado por sucesos elementales equiprobables o no. Se deben plantear, por tanto, bastantes problemas de aplicación de esta regla.

Las propiedades fundamentales de la probabilidad, así como el cálculo de la probabilidad de la unión de dos sucesos, ya sean incompatibles o compatibles, son de una gran importancia, debiendo cuidar especialmente de que no se cometan errores graves de coherencia, como asignar a un suceso una probabilidad negativa o mayor que la unidad.

ACTIVIDAD DE GRUPO

Experimentando con la probabilidad

Los alumnos realizarán varios experimentos un número elevado de veces y anotarán en una tabla la frecuencia relativa de un resultado concreto, con el fin de estimar la probabilidad de dicho suceso.

Se pueden realizar experimentos de los que previamente se haya calculado alguna probabilidad, como el lanzamiento de monedas o de dados. También se pueden llevar a cabo algunos experimentos cuyos resultados no sean equiprobables, como el lanzamiento de chinchetas, fichas irregulares o cargadas, pequeñas piedras, etc.

Es interesante que los alumnos vean que en este tipo de experimentos se producen resultados muy similares, independientemente de si el experimento lo realizan n personas m veces, o si lo realiza una única persona $n \cdot m$ veces. Por tanto, el trabajo en grupo disminuye considerablemente el número de veces que cada alumno debe repetir el mismo experimento, consiguiendo así que la actividad sea más amena e interesante.

SOLUCIONES DE LAS ACTIVIDADES PROPUESTAS

1. $V =$ *salir verde*, $R =$ *salir rojo*, $A =$ *salir azul*

a) Triangular: $P(V) = P(R) = P(A) = \frac{1}{3}$

Hexagonal: $P(V) = \frac{1}{3}$; $P(R) = \frac{1}{3}$; $P(A) = \frac{1}{3}$

b) Depende de cada experimentación.

c) Las frecuencias relativas del apartado b tienden hacia las probabilidades del a.

2. **a)** $A \cup B \cup C = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 8\}$

b) $A \cap B = \{2\}$

c) $A \cap C = \varnothing$

d) $\overline{B} = \{1, 3, 5, 7, 9\}$

e) $\overline{B \cup C} = \{1, 5, 7, 9\}$

3.

25	28
20	17

a) $P(\text{ser mayor de edad}) = \frac{25 + 28}{90} = \frac{53}{90}$

b) $P(\text{ser mujer}) = \frac{28 + 17}{90} = \frac{45}{90} = \frac{1}{2}$

c) $P(\text{no ser hombre mayor de edad}) =$

$= 1 - \frac{25}{90} = \frac{65}{90} = \frac{13}{18}$

4. **a)** $\frac{4}{9}$

b) $\frac{5}{9}$

c) $\frac{2}{9}$

5. **a)** $\frac{2}{3}$

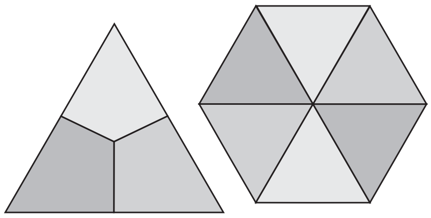
b) $\frac{1}{6}$

En el **CD Banco de actividades** se pueden encontrar más propuestas de actividades de refuerzo.

1 Copia las figuras del dibujo en una cartulina, y recórtalas y coloréalas como se indica. Clavándole a cada pieza una chincheta a modo de eje, tendremos dos peonzas, una triangular y otra hexagonal.

a) Calcula la probabilidad de que salga cada uno de los colores en cada peonza.

b) Completa la siguiente tabla con la frecuencia relativa en cada caso.



	10 lanzamientos		20 lanzamientos		30 lanzamientos	
Peonza	**Triangular**	**Hexagonal**	**Triangular**	**Hexagonal**	**Triangular**	**Hexagonal**
Verde						
Rojo						
Azul						

c) Compara los resultados de los apartados anteriores.

2 Observa los siguientes diagramas de Venn e indica los elementos de los siguientes sucesos.

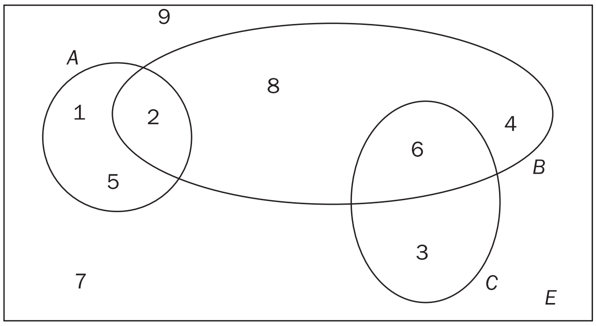
a) $A \cup B \cup C$

b) $A \cap B$

c) $A \cap C$

d) $\overline{B}$

e) $\overline{B \cup C}$



3 En un bloque de viviendas hay 90 personas distribuidas según la siguiente tabla. Completa dicha tabla y halla la probabilidad de que ocurran los siguientes sucesos.

	Hombres	Mujeres
Mayores de edad	25	28
Menores de edad	20	

a) *Ser mayor de edad.*

b) *Ser mujer.*

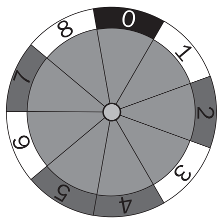
c) *No ser hombre mayor de edad.*

4 Calcula la probabilidad de que ocurran los siguientes sucesos al lanzar una bola en la ruleta del dibujo.

a) *Que salga gris.*

b) *Que no salga blanca.*

c) *Que salga par y blanca.*



5 Tengo tres discos sin carátula y no recuerdo en qué orden los he colocado, pero sé que uno de ellos es de música clásica, otro es de música pop y el otro es de rock.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que los que no son de música clásica vayan seguidos?

b) ¿Y de que esté primero el de pop, luego el de rock y por último el de música clásica?

REFUERZO 16 Probabilidad condicionada

ORIENTACIONES METODOLÓGICAS

En esta unidad, como mínimo, los alumnos deben manejar con soltura los experimentos compuestos, hallando el espacio muestral de dichos experimentos para calcular probabilidades, ya sea aplicando la regla de Laplace si los sucesos elementales son equiprobables, o bien mediante la regla del producto.

También es fundamental que dominen el concepto de probabilidad condicionada, diferenciando entre la intersección de dos sucesos y un suceso condicionado a otro, lo cual puede confundirles en alguna ocasión. También deben evitar confundir entre dependiente-independiente y compatible-incompatible.

Por último, pueden utilizar, por ejemplo, diagramas de árbol para resolver los problemas de probabilidad total, sumando los productos de las ramas correspondientes.

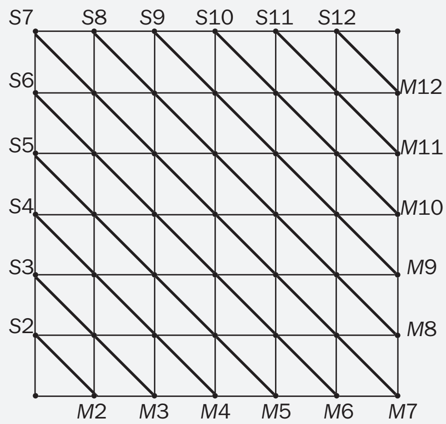
ACTIVIDAD DE GRUPO

El juego de los 11 caminos

Para realizar este juego, se necesita un tablero como el de la figura, dos dados y tantas fichas como jugadores, que pueden ser entre dos y doce.

Cada jugador elige uno de los caminos numerados y coloca su ficha en la casilla de salida correspondiente marcada con una *S*. Se lanzan los dados, y mueve una posición el jugador cuyo número de camino coincida con la suma de las puntuaciones de los dados. Gana el que primero llegue a la casilla de meta de su camino marcada con una *M*.

¿Cuál de los caminos es más ventajoso?



SOLUCIONES DE LAS ACTIVIDADES PROPUESTAS

1. $P(S) = \frac{2}{3}$, $P(M) = \frac{4}{7}$. Como son independientes,

$P(S \cap M) = \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{7} = \frac{8}{21}$

2.

Sucesos	Casos favorables	N.º fav.	N.º pos.	Probabilidad
a)	(4, 1) (4, 2) (4, 3) (4, 4) (4, 5) (4, 6)	6	36	$\frac{6}{36} = 0{,}1667$
b)	(1, 5) (2, 4) (3, 3) (4, 2) (5, 1)	5	36	$\frac{5}{36} = 0{,}1389$
c)	(2, 6) (3, 4) (4, 3) (6, 2)	4	36	$\frac{4}{36} = 0{,}1111$
d)	(2, 1) (2, 3) (2, 5)	3	36	$\frac{3}{36} = 0{,}0833$

3.

	Blanca	Roja	Azul	Total
1	120	90	100	310
2	80	120	80	280
Total	200	210	180	590

a) $P(\textit{acertar color y número}) =$

$= \frac{120 + 80 + 120 + 80}{590} = \frac{400}{590} = 0{,}6780$

b) La mejor apuesta es a blanco y 1 o a rojo y 2, pues ambos tienen una probabilidad de salir de 0,2034, que es la mayor posible.

4. **a)** $A =$ *ganar el primero*, $B =$ *ganar el segundo*.

$P(A \cap B) = P(B/A) \cdot P(A) = \frac{2}{20} \cdot \frac{1}{8} = \frac{1}{80}$

b) Son dependientes, porque el enunciado dice que $P(B)$ y $P(B/A)$ son diferentes.

Además, $\frac{1}{80} = \frac{1}{8} \cdot \frac{2}{15}$

5. $P(\textit{el ratón se come el queso}) =$

$= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$

$P(\textit{el ratón cae en la trampa}) =$

$= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{3}$

En el **CD Banco de actividades** se pueden encontrar más propuestas de actividades de refuerzo.

ACTIVIDADES DE REFUERZO

1 Saturnina dice la verdad dos de cada tres veces, y Marciano, cuatro de cada siete veces. Las dos personas dicen que han visto un ovni en el mismo lugar y en el mismo momento. Calcula la probabilidad de que ambas estén diciendo la verdad.

2 Halla la probabilidad de que al lanzar dos dados cúbicos se obtengan los siguientes resultados.

a) El primer resultado sea 4.

b) La suma sea 6.

c) El producto sea 12.

d) El primer resultado sea 2, y el segundo, impar.

Para resolver este problema, completa la tabla siguiente.

Sucesos	Casos favorables	N.º de casos favorables	N.º de casos posibles	Probabilidad
a)	(4, 1) (4, 2) (4, 3) (4, 4) (4, 5) (4, 6)	6	36	$\frac{6}{36} = 0{,}1667$
b)				
c)				
d)				

3 En un concurso de televisión hay una piscina con bolas blancas, rojas y azules. Cada una de las bolas está numerada con los números 1 ó 2. El presentador le dice al concursante que debe elegir una bola y un número (por ejemplo, azul y 2), y, con los ojos vendados, sacar una bola de la piscina. Si acierta el color y el número, se lleva 6000 euros; si solo acierta el número, 2000, y si solo acierta el color, gana 3000 euros. La cantidad de bolas de cada color y número viene dados por la siguiente tabla.

	Blanca	Roja	Azul	Total
1	120	90	100	
2	80	120	800	
Total				

El concursante elige blanca y 2. Completa la tabla y responde a las siguientes preguntas.

a) ¿Qué probabilidad tiene el concursante de ganar algún premio?

b) ¿Qué habrías apostado tú?

4 Dos calculistas intentan batir el récord mundial de calcular raíces cuadradas de números de diez cifras en un minuto. En los entrenamientos previos individuales, el primer calculista ha conseguido superar el récord anterior 1 de cada 8 veces, y el segundo, 2 de cada 15 veces. Sin embargo, cuando compiten juntos, el segundo calculista se pone bastante nervioso si el primer concursante lo ha conseguido, por lo que baja su media a 2 de cada 20 veces.

a) Calcula la probabilidad de que en el intento final ambos jugadores consigan superar el récord anterior.

b) ¿Son independientes los sucesos ganar el primero y ganar el segundo?

5 Un ratón entra en el laberinto del dibujo con el objetivo de comerse un queso. Cuando llega a una bifurcación, la probabilidad de elegir un camino u otro es la misma. Halla la probabilidad de que el ratón llegue a comerse el queso y la de que caiga en la trampa.