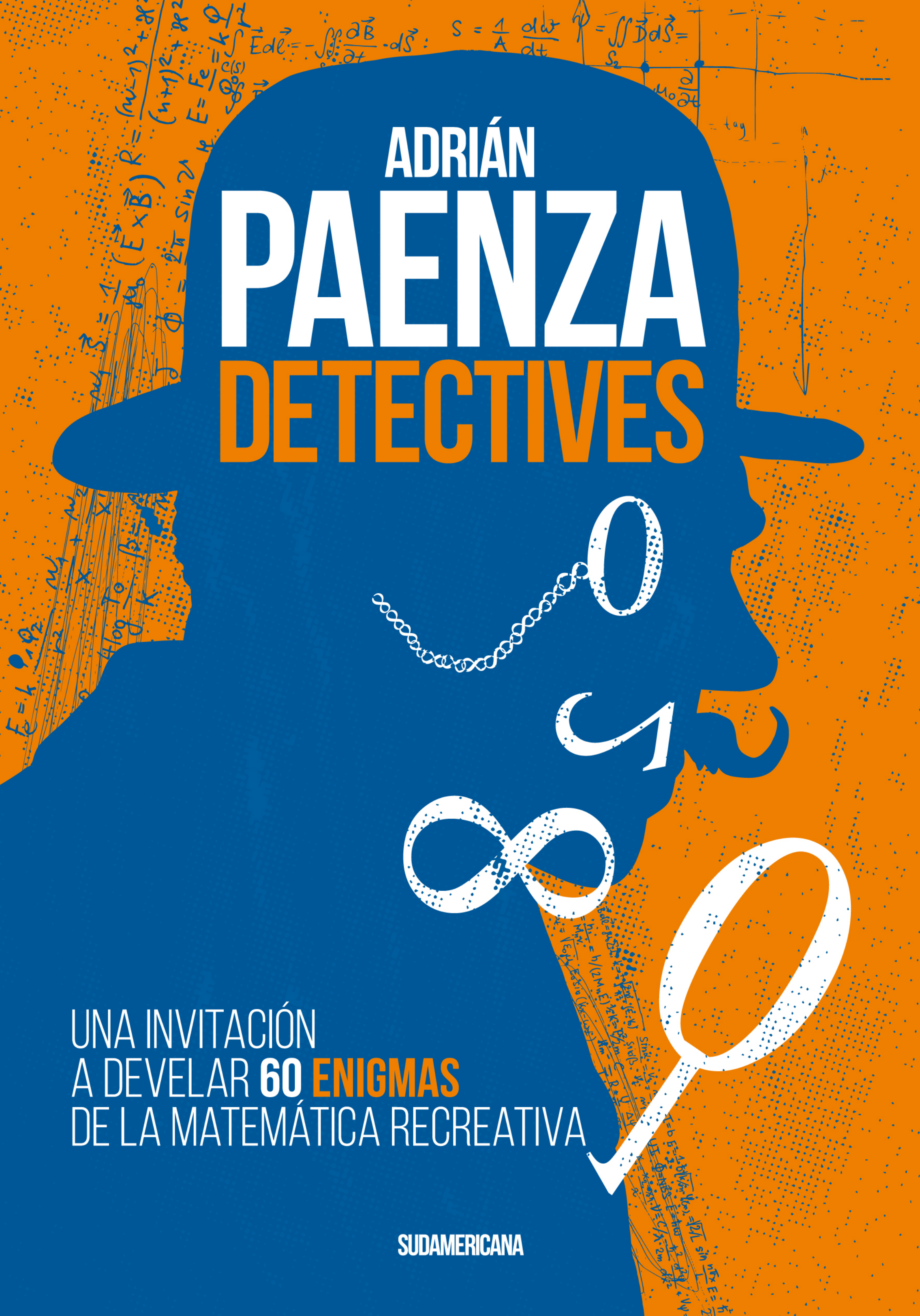
ADRIÁN

PAENZA

DETECTIVES

UNA INVITACIÓN
A DEVELAR **60 ENIGMAS**
DE LA MATEMÁTICA RECREATIVA



SUDAMERICANA

Detectives

Una invitación a develar
60 enigmas de la matemática recreativa

REALIZACIÓN DE FIGURAS: DG VANINA FARÍAS

Adrián Paenza

Detectives

Una invitación a develar
60 enigmas de la matemática recreativa

Sudamericana

Paenza, Adrián
Detectives - 1a ed. - Buenos Aires :
Sudamericana, 2015.
416 p.: il.; 22x15 cm. - (Obras diversas)

ISBN 978-950-07-5416-3

1. Matemática. I. Título
CDD 510

IMPRESO EN LA ARGENTINA

Queda hecho el depósito
que previene la ley 11.723.

www.megustaleer.com.ar

ISBN 978-950-07-5416-3

Esta edición de 8500 ejemplares se terminó de imprimir en Printing Books S.A.,
Mario Bravo 835, Avellaneda, Buenos Aires, en el mes de septiembre de 2015.

Dedicatorias

A mis padres, Fruma y Ernesto. Todo lo que soy se los debo a ellos dos.

A mi hermana Laura y a mi cuñado Daniel.

A todos mis sobrinos: Lorena, Alejandro, Máximo, Andrea, Ignacio, Paula, Santiago, Lucio, Matías, Lucas, Brenda, Miguelito, Viviana, Ulises, Luz, Diego, Sabina, Sebastián, Max, Amanda, Whitney, Jason, Landon, Anderson, Riley, Griffin, Ellie, María José, Gabriel, Mía, Valentín, Dante, Nicola y Luca.

A Carlos Griguol y León Najnudel, dos faros en mi vida.

A mis amigas Ana María D'Alessio, Nilda Rozenfeld, Teresa Reinés, Beatriz de Nava, Beatriz Suárez, Nora Bernárdez, Karina Marchesini, Laura Bracalenti, Etel Novacovsky, Alicia Dickenstein, Érica Kreiter, Betty Cooper, Kim Crotts, Julie Crotts, Marisa Giménez, Norma Galletti, Carmen Sessa, Many Oroño, Carina Maguregui, Marcela Smetanka, Mónica Muller, María Marta García Scarano, Mariana Salt, Nora Bar y Marisa Pombo.

A mis amigos Miguel Davidson, Leonardo Peskin, Miguel Ángel Fernández, Cristian Czúbara, Alberto Kornblihtt, Lawrence Kreiter, Kevin Bryson, Lenny Gunsteen, Gary Crotts, Dennis Fugh, Claudio Martínez, Alejandro Fabbri, Víctor Marchesini, Luis Bonini, Fernando Pacini, Andrés Nocioni, Emanuel Ginóbili, Luis Scola, Gerardo Garbulsky, Marcos Salt, Santiago

Segurola, Pep Guardiola, Julio Bruetman, Diego Golombek, Ariel Hassan, Woody González, Craig Rogers, Don Coleman, Keith Morris, Pablo Prigioni y Juan Ignacio Sánchez.

El recuerdo imborrable de los seres queridos que perdí en el camino subvirtiendo el orden natural: Guido y Soledad.

A la memoria de mis tías Delia, Elena, Miriam, Ñata y Elenita; a mi tío Saúl; a Manny Kreiter, Lola Bryson, Vivian Crotts y a mi primo Ricardo. Y ahora tengo que agregar a mi queridísimo Héctor Maguregui, a quien perdí sobre el final del año 2014: otro compañero inigualable.

Como siempre, una mención especial para Jorge Guinzburg.

Para terminar mi gratitud infinita para los cuatro guías éticos de mi vida: Marcelo Bielsa, Alberto Kornblihtt, Víctor Hugo Morales y Horacio Verbitsky.

Agradecimientos

Este libro que usted tiene en sus manos es el décimo que escribo. Debe haber algunas razones que a mí se me escapan por las cuales los múltiplos de diez nos generan una particular fascinación. Llegar a los 40, 50 o 60 años es motivo de celebraciones particulares. Pero cuando uno empieza a contar en *décadas*, eso habla de algo que ya tiene *historia*. Quizás sea por eso; acumular diez unidades de *algo*, de lo que sea, inspira respeto. El número *diez* es una suerte de *hito*.

Se me ocurre que además de utilizar la letra 't' en esta última palabra, también podría escribirla con la letra 'j' en su reemplazo, ya que cada libro, al menos para mí, es como un hijo. Siento que con cada uno entregué *una parte de mí*.

Está claro que uno no camina solo en la vida. Somos un *pedacito* de todos y a cada uno de esos *todos* que tocaron mi vida, les *debo* algo. A muchos les debo una particular gratitud y aprovecho de este pequeño rincón para hacerlo.

No puedo decir que 'sin ellos este libro no existiría' porque no es cierto, pero de lo que *sí* estoy seguro es que sería distinto. Quizá cooperaron conmigo sin siquiera advertirlo.

Para la mayoría de los que están leyendo estas líneas, la lista de nombres que figura acá será eso, nombres, pero para mí esas

personas son la parte más importante de mi vida: mi familia y mis amigos.

El orden de aparición es esencialmente *anárquico*. No interprete que por alguien está antes o después su contribución fue mayor o menor. En todo caso, cada uno de nosotros es '*tan fuerte como su eslabón más débil*', y si alguien me ayudó, aunque sea *una sola vez, en un solo momento*, quizás ese momento fue lo suficientemente importante para que no abandonara lo que estaba haciendo o porque me estimuló en algo determinante. ¿Cómo saberlo?

Esta vez empiezo por los matemáticos.

A mis maestros: Miguel Herrera, Enzo Gentile, Luis Santaló, Eduardo Dubuc y Ángel Larotonda.

A Claudio Martínez.

A mis ex compañeros de ruta, cada uno con su historia particular, de principio a fin: Ricardo Noriega, Néstor Búcari, Carlos Sánchez, Malena Becker, Teresita Freidenberg, Marcela Fainbrum y Hugo Álvarez.

A mis queridas amigas y compañeras de toda la vida, Carmen (Sessa) y Alicia (Dickenstein).

A Oscar Bruno, Fernando Cukierman, Teresa Krick, Ricardo Durán, Pablo Calderón, Noemí Wolanski, Matías Graña, Leandro Caniglia, Cristina López, María del Carmen Calvo, Graciela Fernández y Jorge Zilber, mis compañeros de toda la vida en Exactas (UBA) y Baldomero Rubio Segovia de la Universidad Complutense de Madrid.

A Claudio Martínez.

A quienes son (o han sido) proveedores de múltiples problemas, sugerencias e ideas: Gabriela Jerónimo, Pablo Coll, Cristian Czúbara, Laura Dóbalo, Laura Pezzati, Ariel Arbiser, Pablo Milrud y León Braunstein.

A mis alumnos, a *todos*. Incluso a aquellos a quienes me tropiezo alguna vez en algún pasillo de la facultad y todavía tienen una 'sonrisa' a mano como preguntándome: "¿Se acuerda del curso de Análisis de 1984? ¿O el de Álgebra de 1978?". No me acuerdo de todos, obviamente, pero cada cara está ligada con un recuerdo y con un lugar en alguna de las aulas de Exactas.

A Claudio Martínez.

A mi querida Glenda Vieites, quien editó, corrigió, supervisó, dirigió (y no sé cuántos verbos más usar) los contenidos del texto. Así como siempre voy a recordar a Pablo Avelluto, el que 'trajo' a esta editorial los libros de esta colección, Glenda ha sido el factótum más importante para que aquí esté. Eso sí, ella sola no podría, y entonces, quiero extender mi gratitud a todo el equipo: Verónica Larrea, Daniela Morel, Mariana Creo, Lucrecia Rampoldi y a mi querido Juan Boido, director editorial de Penguin Random House.

A *todos* los integrantes de la productora El Oso, donde se generan *todos* los programas de televisión que hago (e hice) en los últimos veinte años, muy en particular a Mario Buoco, Edy Gerber, Betina Rodríguez, Gaby Díaz, Laurita Cukierman, Ezequiel ("Ese") Rodríguez, Elisabet (con 's' y sin 'h') Alegre, Alejandro Burlaka, Dolores Bosch, Valeria Trevisán, Claudia Eiberman y por supuesto a quien vino y ordenó todos los números, don Aldo Fernández.

A Claudio Martínez.

A todos mis compañeros de la Televisión Pública, en donde hacemos *Científicos Industria Argentina* ¡desde hace casi catorce años!, y muy en particular a Tristán Bauer y Martín Bonavetti. Además, quiero hacer una mención explícita a los camarógrafos, sonidistas, escenógrafos, iluminadores, productores, asistentes, maquilladores y directores que participan en el ciclo. Es que cuando grabamos los programas, *todos* están atentos a los enunciados, a los desarrollos y a las soluciones de los problemas que yo planteo y que reproducen los que aparecen en este libro. Cada uno de ellos coopera conmigo para que se entienda lo que digo y para que no me equivoque. Me siento profundamente abrigado por lo que hacen por mí.

A mis compañeros del Canal Encuentro y en particular a Verónica Fiorito, con quien tengo *siempre* una deuda de gratitud por todo lo que hizo para que el canal hoy, sea lo que es. Y por supuesto a María Rosenfeldt, la directora actual, y al entrañable amigo Rubén D'Audia, gerente general de Educ.ar.

A Claudio Martínez.

A mi agente literario Guillermo Schavelzon, que vive pugnando para advertirle al mundo que bien valdría la pena que tradujeran estos libros a *todos los idiomas*. Más que un profesional, es un amigo, y un lujo jugar en el equipo de él. Y a Bárbara Graham, otra *sonrisa* que camina.

A Diego Golombek y Carlos Díaz, porque fueron los que 'intuyeron' lo que podría pasar… y fueron los que dieron origen a la saga 'Matemática… ¿estás ahí?'. Hoy, este pequeño trocito de matemática está en otro lado, pero el recuerdo y la gratitud permanecerán toda la vida.

A Claudio Martínez.

A mis queridos y entrañables amigos de La Brújula, *la "otra"* productora que junto con El Oso forman el dúo increíble que potencia todo lo que tenga que ver con difusión de la ciencia. Mis amigos Woody González y Ariel Hassan, junto con su hermano Luis, son las cabezas visibles, pero mi reconocimiento a todo lo que hacen *todos* los que allí trabajan.

A los que incansablemente, año tras año, ponen 'en el aire' a Tecnópolis, el maravilloso predio que es un orgullo argentino, ubicado en Villa Martelli. Solamente voy a escribir el nombre de Javier Grossman porque son tantos los compañeros que allí trabajan, que elegir a unos por encima de otros terminará siendo una tremenda injusticia. Gracias.

A Claudio Martínez.

Una vez más, y como intento hacer cada vez que puedo, quiero dejar explicitada mi gratitud a dos personas excepcionales: Ernesto Tiffenberg y Hugo Soriani. Ambos son los responsables de la existencia de *Página/12*, o mejor dicho, los responsables de que el diario sea lo que es. Ellos dos, junto a Jorge Prim, me han permitido integrarme al staff permanente de *Página*. Para mí, es un orgullo personal. Gracias a los tres.

A Claudio Martínez.

Y dejé para el final a los *betatesters*, aquellas personas que tienen el libro mucho antes que aparezca impreso, y son los que controlan, observan, opinan, corrigen, sugieren, proponen y modifican los textos, demostraciones, enunciados e historias para que sea más ameno, y sobre todo, *cierto*. Ellos son los que 'me cuidan las espaldas' para que no se escape 'alguna falsedad' en los problemas que figuran en el índice. Es curioso pero tengo la tentación es poner 'gracias' y resumir en esa palabra todo lo que siento, pero en *este* caso particular me parece que no alcanza. *Siempre* voy a estar en deuda con Carlos D'Andrea, Carlos Sarraute y Juan Sabia. Y sí, GRACIAS entonces, en mayúscula para ver si me 'acerco' un poco más a lo que se merecen.

Y para terminar, *un abrazo enorme a todas las personas* que de una u otra forma, a través de correos electrónicos que llegan a Penguin Random House, a *Página/12*, a la Televisión Pública, al canal Encuentro, a Pakapaka, a Tecnópolis, a las productoras El Oso y La Brújula, a Siglo XXI, a mis casillas personales, *me hacen llegar su afecto*.

Prólogo versión 2.0

Es curioso que lo último que voy a escribir para este libro sea lo que aparezca bien al principio, en el prólogo. Me propuse componer el índice primero, mirar los títulos de cada sección y, sin leer el desarrollo, buscar cuál o cuáles eran los problemas que más me tentaban.

Es decir, como fui escribiendo las historias a lo largo de todo un año, cada una de ellas estuvo rodeada de distintas situaciones particulares: cómo me enteré del problema, cuánto participaron otras personas en discutir conmigo la solución, qué impacto le produjo a cada uno de ellos, en qué lugar del mundo estaba cuando la fui escribiendo y cuánto tiempo me llevó hacerlo, cuánto me costó encontrar los lugares en donde estaban las dificultades de cada uno… y así podría seguir desmenuzando cada estación (historia) que aparece en este libro.

Tengo varias historias favoritas. Acá va la lista y algún comentario que me quedó por hacer.

1) "El problema del ping-pong" me tuvo entretenido un buen tiempo. Me lo contó Carlitos D'Andrea anunciándome '*éste* es de los problemas que *sé* que te gustan'. Y sí. No sólo me gustó sino que la solución se me ocurrió mientras esperaba un subte

en el centro de Nueva York. Había dos personas bolivianas, haciendo una música maravillosa. Recuerdo que pensé: ¡qué injusticia que tengan que desplegar su arte en este contexto! No sé qué canción estaban ejecutando cuando advertí que se me había ocurrido *algo* que no había pensado antes y me di cuenta de que ya sabía cómo hacer para presentar la solución. Entré en el subte y como —afortunadamente— me pude sentar, usando mi viejísima lapicera Lamy garabateé la idea en un papel de esos que siempre llevo en el bolsillo de la camisa. Ni bien llegué de vuelta a la habitación del hotel, escribí la solución apurado. Es la que aparece en el texto principal.

2) "El bar antisocial": éste es un problema clásico de los que aparecen en las pruebas de admisión que hacen las grandes compañías (Apple, Google, Microsoft, Oracle, por nombrar algunas). El primero de ellos se lo escuché a Gerry Garbulsky hace más de veinte años cuando él y Marcela, su compañera de toda la vida, estaban aún radicados en Estados Unidos. Gerry me contó sobre una pregunta que le habían hecho: cómo estimaría él el número de *afinadores de piano* que había en Boston. Justamente ese problema apareció en el primer libro de la colección 'Matemática… ¿estás ahí?'. Desde allí tengo un particular interés por encontrar y difundir problemas de ese estilo, y así fue como supe de una charla que dio William Poundstone en Medill Northwestern University, en Evanston, uno de los suburbios de Chicago. La conferencia de Poundstone giró alrededor de una idea que me parece '*esencial*': convencer a la audiencia de que Google no trata de detectar quién es 'suficientemente brillante' para trabajar en la empresa, sino de descubrir quiénes son las personas que tienen la pasión y persistencia suficientes para seguir intentando cuando no pueden resolver un problema, y a pesar de eso siguen

y siguen pugnando sin claudicar, hasta encontrar lo que a uno le hace falta para resolverlo. Poundstone es el autor del título del problema "El bar antisocial" aunque Carlos D'Andrea me dijo que es conocido como el 'problema de los mingitorios'. No importa cuál de los dos sea, permítame sugerirle que no se lo pierda.

3) Un breve agregado al problema anterior. El día 22 de julio de 2015, recibo un mail de Gerry Garbulsky. Lo quiero transcribir textualmente: "Acá estamos con Juli [su hijo mayor] que me dijo recién: "Pa, tengo ganas de pensar. ¿Tenés por ahí algún problema de Adrián?". Abrí el libro último al azar, sin saber dónde 'caería' y estamos pensando juntos el del bar antisocial (que ya me habías contando en el Bar El Caballito). Todavía lo estamos pensando, pero nos surgió un comentario sobre el enunciado que queremos pasarte, por si estás a tiempo (si el libro ya entró en la imprenta, ¡borrá este email y listo!)". Aquí paro la transcripción porque lo que quiero transmitir ya está expresado en esas líneas. Le quiero hablar a usted que está leyendo este prólogo: ¿se da cuenta de lo que *me* significa que Gerry en este caso, pero vale para cualquier *padre*, sea capaz de recibir de su hijo una reflexión como ésa: "¡¡¡TENGO GANAS DE PENSAR!!!"? ¿Qué más puede uno pedir?

4) Necesito hacer justicia con alguien que es una *máquina proveedora de ideas fantásticas*. Me refiero a Juan Pablo Pinasco. Bastará con que se adentre en el libro y descubrirá algunas que son espectaculares. Quiero contar algo que pasó alrededor de la historia que llamamos (él y yo, juntos) "Pinasco y el Sistema Dinámico Repulsor". En una reunión 'virtual' que hicimos entre María Marta García Scarano (la productora general de *Alterados*

por PI), el propio Juan Pablo y yo, estábamos haciendo una 'lista' de los problemas tentativos para una de las grabaciones. Ellos estaban en la productora El Oso en Buenos Aires, y yo estaba en ese momento en Chicago. Entre los tres, ya habíamos acordado que la historia sobre el sistema dinámico 'repulsor' iría seguro cuando grabáramos en la provincia de Mendoza. Juan Pablo me comentó que lo había visto en una revista rusa, hablando de *olimpíadas matemáticas* que se habían desarrollado en Moscú. De todas maneras, como el problema me había gustado tanto, lo escribí y se lo mandé a Ernesto Tiffenberg y Hugo Soriani (codirectores de *Página/12*) para que evaluaran si valía la pena publicarlo en una de las contratapas. Ambos decidieron que sí, y apareció en el diario el 10 de agosto de 2014. Lo notable de este episodio es lo que me contó Juan Pablo el día de la reunión: "Como el día de la publicación fue un domingo, Selva [su señora] y yo nos quedamos durmiendo un poco más de lo habitual. En un momento determinado se abrió la puerta de la habitación y entraron mis dos hijos [Cecilia de nueve años y Federico de tres], con la versión impresa del artículo. Nos despertaron con el diario en la mano, mientras exhibían —supongo que con orgullo— que hubiera aparecido el apellido de la familia en letras 'tan grandes'. Curiosamente mis padres, que habitualmente residen en Gualeguay, estaban de visita en Buenos Aires y fue mi padre quien se llevó a Cecilia hasta el quiosco para comprar el diario, porque una tía mía que vive en Córdoba ya había puesto a la mañana temprano en Facebook lo que había salido en el diario. Creo que 'toda' la familia, de una u otra forma me dijo ese día: '¿Viste lo que salió en *Página/12*?'. *Sí, ya lo había visto*". Me emocioné cuando me enteré de la historia y me puso contento por Juan Pablo: es un tipo fuera de serie y los problemas que me sugiere, también. Cada vez que vea su nombre asociado con alguna de las historias que aparecen en este libro, no dude de que es buena (por él, naturalmente). No se la pierda.

5) Noviembre del año 2014. Preparábamos la presentación del libro anterior (*La puerta equivocada*) a un costado del lugar que se llama "La nave de la ciencia", en Tecnópolis. Estábamos discutiendo la forma de presentar los problemas con una buena parte de las editoras y productoras de Penguin Random House (Glenda Vieites, Daniela Morel, Verónica Larrea y Belén Molinari) y estaban también Claudio Martínez, Juan Boido y Gaby Díaz (quien se ocupa de todos los elementos escenográficos). Gaby quiere saber con tanta anticipación como le sea posible el *orden* en que voy a resolver los problemas. El que lo tenía atormentado era el problema que en el índice figura con el nombre de 'Autitos': "Contame, Adrián: ¿cómo lo vas a hacer? Yo te preparé los 25 autitos de distintos colores para que vos los hagas correr de derecha a izquierda…". No puedo recordar textualmente mi respuesta, pero estoy casi seguro de que no hice lo que Gaby quería, pero no por falta de voluntad, sino porque él es demasiado *puntilloso* con su trabajo y yo soy muy errático en mis decisiones. Pretendo tener todo controlado, pero no siempre lo logro. Lo que sí puedo decir es que el problema de los Autitos, no estaba previsto en el papel en el que figuraban los que habíamos repartido al público. La nave de la ciencia estaba repleta de gente y yo había preparado algunos problemas extras en el caso de que la gente estuviera ávida de seguir pensando cómo resolver algunas historias. El hecho es que el problema fue un *verdadero* '*hit*'. Yo tenía dudas sobre si la solución sería muy complicada o si yo iba a ser capaz de explicarla ante tanta gente y tan diversa. Sin embargo, no sólo no fue difícil, sino que el público se enganchó y terminaron participando *casi* todos. Ni bien terminó el

evento, muchísima gente se acercó para seguir discutiendo los problemas. Tiffenberg y Soriani querían saber si podría presentar ‘el de los Autitos’ para la edición del domingo (esto sucedía un sábado y ya eran las *seis* de la tarde). Hugo Sigman y Silvia Gold saltaban en sus butacas para que les prestara atención a lo que me querían sugerir, mientras a la derecha del escenario veía a Lino Barañao y Oscar Parrilli discutiendo la solución. Alejandro Fabbri y su mujer Marisa conversaban sobre la estrategia de los autitos con mi amigo y abogado Marcos Salt y su mujer Mariana. Usted se preguntará a esta altura: “¿Y qué tiene que ver esto con el problema?”. Tiene razón: con el problema propiamente dicho, posiblemente no tenga *nada* que ver, pero lo que quisiera transmitirle es que en una tarde de sábado con una variedad muy grande de alternativas que ofrece una ciudad como Buenos Aires, había un grupo *enorme* de personas que se habían dado cita para… ¡pensar problemas de matemática! Y el que *por escándalo más los tenía atrapados* era uno que pedía elaborar una estrategia para determinar qué autitos eran más rápidos que otros. ¿No es notable que esto haya sucedido?

6) Para todas aquellas personas que han venido siguiendo los distintos libros de esta serie, el nombre Carlos Sarraute no les resulta desconocido. No es éste el lugar para hacer un desarrollo de su trayectoria, pero quiero recomendarle un problema particular que me sugirió él. Es muy poco frecuente que yo escriba sobre algo que considero que es *muy difícil* de resolver. Sin embargo, esta vez, lo hice. Puede que varias situaciones que aparecieron previamente fueran complicadas también: no lo sé. Lo que *sí* sé, es que no me di cuenta o no logré detectar el grado de dificultad *antes* de recoger las impresiones de ustedes, de quienes *leen* y tratan de *resolver* los problemas. Pero en este caso, sé de *antemano*

que el problema es *muy difícil*. Mi debate interno fue: ¿lo incluyo o no? Por un lado, podría pensar que no está mal que aparezca un problema de una categoría distinta, más complicado de analizar. No quiero decir que haga falta utilizar herramientas que usted no tiene para resolverlo: ¡no! Está al alcance suyo porque estuvo al alcance mío, y eso contesta la pregunta. Pero lo que también sé es que pude haberlo obviado, pude no haberlo incluido entre los problemas que aparecen en este libro. Nunca nadie se hubiera dado cuenta ni podría reclamármelo, pero la diferencia está en que yo *sí hubiera sabido* que tuve la oportunidad de incluirlo y la deseché. Por otro lado, ¿qué pierdo si lo incluyo? Nada. Me resulta imprescindible advertirle que tiene un grado de dificultad diferente de los otros pero creo que vale la pena, cada tanto, exhibir algo que requiere de otro tipo de *tenacidad* para resolver. Eso: creo que la palabra que estuve buscando durante un tiempo y no pude encontrar es ésa: *tenacidad*. Yo valoro muchísimo a la gente que tiene persistencia, tenacidad, insistencia, que no claudica. Esas personas tienen una gran ventaja sobre los que se 'entregan' rápido, sin siquiera hacer el mínimo esfuerzo para poder avanzar. Dicho todo esto, quiero entonces hablar 'a favor del problema' propiamente dicho. Le sugiero que lo lea y le dedique un rato *no* a pensar la solución, sino a reflexionar sobre lo que somos capaces de hacer. Es como entrar en una habitación en la que uno no estuvo nunca, con las luces apagadas, sin tener noción de dónde están ubicados los muebles y sin saber si hay agujeros en el piso o si éste es resbaladizo. Uno tiene muy pocos datos. Pero a medida que se queda en el lugar, aún quieto durante un tiempo, pero tratando de 'descubrir' lo que puede utilizando todos los sentidos, uno empieza a detectar cosas que no había visto antes, algo así como que se 'familiariza' con el lugar. Al rato (que puede ser largo o corto) uno empieza a sentirse más cómodo y hasta se siente capaz de hacer algunos movimientos que no parecen traer riesgos. No avanzo más con la imagen porque creo que está clara. Si puedo sugerirle algo más, cosa que voy a hacer repetidamente a lo largo del libro, cuando pueda, lea el enunciado, nada más. Y piense lo que dice: no trate de resolver nada, solo piense el enunciado. Si usted logra situarse en algunas de las personas que aparecen en la historia, verá que después de un rato, en el lugar en donde había *total oscuridad*, usted empieza a detectar algunas sombras. Ya habrá valido la pena.

7) Hay varias personas que hacen de 'betatesters' en estos libros. A lo largo de los años todos ellos han detectado errores, problemas en los enunciados, problemas en las soluciones, problemas en las figuras, ambigüedades en mis respuestas. Me han aportado ideas que no solo aparecieron como 'notas al pie', sino que se transformaron en el 'verdadero contenido'. Cada uno lo hizo a su estilo. Carlos D'Andrea leyó los diez libros (éste es el décimo). Los leyó todos, renglón por renglón, palabra por palabra. Si bien él vive en Barcelona, nos vemos poco pero hablamos mucho. Me hace sugerencias para que incluya problemas que él mismo ya leyó en algún libro anterior: "¿Ya publicaste esto? ¡Qué increíble! Seguro que lo tengo que haber leído y corregido y no me acuerdo nada". No está solo en el club. Yo hace mucho tiempo que soy miembro. Puedo decir con tranquilidad que hasta que él no da su 'visto bueno', yo siento que el libro 'no está terminado', que le falta 'algo'. Así sucedió con los diez. En todo caso, la/lo estoy invitando a pensar que esta 'saga' lleva ya más de diez años. ¿No es increíble? Carlos tiene también un grupo *selecto* de amigos matemáticos que aportan ideas que él me hace llegar: Juan Carlos Naranjo, José Ignacio Burgos, Emiliano Gómez, Martín Sombra, Luis Dieulefait. Las sugerencias de Carlos están

‘casi’ todas: me interesa mucho tratar de no excluir ninguno de sus aportes. Cuando un autor escribe: “sus aportes son imposibles de mensurar” o “sus ideas me han mejorado personalmente o han mejorado el texto”, u otras variantes, uno sabe que el autor *siente* esa gratitud, la manifiesta al escribir el texto, pero no queda *claro **exactamente*** a qué se refiere. Es por eso que me interesa buscar algún ejemplo, como para que quede claro de qué hablo. Víctor Hugo siempre me señala que cuando a uno le dicen “usted es uno de los mejores *periodistas* que yo conozco”, la pregunta que a uno le surge inmediatamente es: “¿entre cuántos figuro yo?, ¿soy el quincuagésimo quinto o el sexto?”... Y yo agregaría, ¿por qué? Es por eso que me es fácil encontrar argumentos que sirvan para ejemplificar mi gratitud por lo que hace/hizo Carlos D’Andrea. Basta con que comparta con usted, que está leyendo este texto, que Carlos dividió el libro en 28 (sí, veintiocho) partes, y las fue leyendo una por una. El primer segmento me lo mandó el 15 de junio de 2015, y el último, el vigésimo octavo, el 30 de junio. No quiero terminar este pequeño párrafo dedicado a él, sin exhibir dos ejemplos que son muy claros: en la última entrega (que Carlos tituló: *“Libro 28... ¡final!”*), en el análisis que hizo del último problema, aparecen *dos* tipos de correcciones. Su primera observación fue “hay dos ‘***una vez que***’ muy seguidos”. La segunda que quiero escribir acá, fue la última que hizo. La transcribo: “No me parece un mal enunciado. El problema es difícil en relación con todos los otros, pero aparece al final del libro, y la resolución no es complicada. However [*sic*], el ‘salto’ conceptual que hay que hacer para pasar del caso 2x2 al caso 8x8 no es trivial. Yo, a riesgo de hacer la nota más larga, quizá perdería un poco de tiempo con el caso 4x4, o más audaz aún: resolvería detalladamente el caso 4x4 y luego invitaría al lector a que haga él/ella solito el 8x8 :-) (podés poner algún par de ejemplos del tipo: si la distribución fuera la siguiente y el mago indica esta moneda, Carolina hace esto)”. Fuera de contexto, quizás no se entienda, pero usted advierte que la primera de las observaciones la pudo haber hecho ‘casi’ cualquiera. La segunda, ‘casi’ ninguno. Es un lujo que Carlos participe de esta forma tan activa.

8) Los lunes y viernes del mes de mayo del año 2015 los utilizamos para grabar diferentes episodios de *Científicos Industria Argentina*, el programa dedicado a la ciencia que la Televisión Pública emite desde mayo de 2003. Es decir, llevamos más de trece años en el aire en forma ininterrumpida. El formato fue variando a lo largo de los años e incluso se emitió por Telefé (un canal privado de la Argentina) durante un par de ciclos, pero lo que ha sido una constante a lo largo del tiempo es que, de una u otra forma, yo planteo algún problema para pensar, al estilo de las historias que aparecen en estos libros. Algunas temporadas lo hice solo, ofreciendo un problema sobre el final de uno de los episodios y contando la solución en el programa siguiente. Otras veces hice los planteos al inicio del programa, compartiéndolo con algún invitado, mientras nos quedábamos pensando la solución durante la hora que la emisión está en el aire. En alguna oportunidad ofrecimos alguna variante a estas dos que acabo de explicar. ¿Por qué esta introducción? Por lo siguiente: en una de las sesiones de grabación que sucedió un lunes de mayo, creo que el 18, llegó como invitado al canal Ricardo Darín. La mayoría de los asistentes quieren que quede claro que ‘la matemática no es para mí’, o bien ‘yo me la llevé previa tres veces’, o bien ‘por favor, no me hagas pasar vergüenza con alguna pregunta comprometida’, y así sigue la lista. Por supuesto, me encargo siempre de aclarar que mi intención no podría pasar por hacer sentir incómodo a quien estoy invitando a mi casa, sino que quiero que

nos exhibamos juntos en el momento de ‘pensar’. Ese momento es muy privado, personal y diferente para cada persona. De hecho, creo que no sólo somos distintos entre nosotros cuando nos vemos ‘forzados’ a pensar, sino que somos distintos a nosotros mismos de un día para otro, o de una ‘hora’ para otra. Pero la sociedad tiene preparado un ‘castigo particular’ para quienes no resuelven algo rápido o algo no les sale inmediatamente o dicen algo que en apariencia es ‘equivocado’. La sociedad no perdona: ‘sos un burro’, ‘o una burra’ para no hacer distinción de sexos. Y lo extraordinario es que cuando uno logra ‘liberarse’ de esa preocupación, puede pensar libremente… cosa que no es fácil. Quizá por eso los niños, que no tienen preocupaciones iniciales, ni están constreñidos ni encorsetados al ser tan jóvenes, se pueden permitir ‘divagar’ sin ataduras y de allí surgen un montón de ideas y creatividad que después vamos perdiendo. Y si bien me *disparé* con el texto, me interesa *muchísimo* resaltar esto último: tratemos de ser tan cuidadosos como podamos en ‘evitar *domar* a quienes piensan distinto’, aunque sus ideas aparezcan —en principio— inconducentes o ‘equivocadas’. Dejémoslos avanzar. Pero vuelvo a lo que quería contar de Ricardo Darín. Ricardo, a diferencia de la mayoría, no me pidió que ‘lo protegiera’. De hecho, suelo ofrecerles a los invitados contarles el problema por anticipado para que puedan pensarlo antes. Lo interesante es que *solamente una persona, un matemático nada menos*, fue quien me pidió que le diera el enunciado (no la solución, pero *sí* el enunciado) del problema que habría de plantearle. Todo el resto se enteró *genuinamente* al mismo tiempo que el televidente. Pero la historia con Darín continúa así. A él le planteé el problema que en este libro lleva el nombre de “Los relojes de Juan Sabia”. Me escuchó atentamente y lo vi esencialmente *concentrado* e *interesado*. Fuimos avanzando juntos pero virtualmente sin aportes míos.

A esta altura, le sugeriría que lea la historia para que se entienda de qué estoy hablando, pero Ricardo *no quería interferencias*. Me hizo una o dos preguntas, que solamente servían para aclarar el enunciado, y en el tiempo que duró la grabación (que ciertamente no fue una hora ni mucho menos porque las otras partes del programa ya estaban grabadas), ¡lo resolvió! El problema en sí mismo es precioso y requiere de elaborar una estrategia, o si usted prefiere, ubicarse *uno* en el lugar de un *detective*. Frente a la escena de un crimen, por ejemplo, uno encuentra tres relojes que están dejando un mensaje. Todo bien, pero ¿qué mensaje? ¿Qué pasó en el tiempo que se *cortó la luz*? Estoy casi seguro de que usted no puede entender sin leer el enunciado, pero el valor que tuvo para mí, y por eso la referencia en esta parte del prólogo, es para mostrar cómo alguien que hubiera podido dejarse llevar de la mano (por mí) y eventualmente aparecer como que había resuelto el problema por su cuenta, optó por hacer algo muchísimo más valioso: pensar. Pudo haber sucedido que no lograra resolver el problema… Seguro que le pudo pasar, pero lo que *sí* había hecho es ganarse un lugar muy lindo ante él mismo, sentir que uno es capaz de elaborar ideas, de encadenar razonamientos, de imaginar situaciones. Eso fue lo que hizo Darín y, créame, el problema que me sugirió mi querido Juan Sabia, valía la pena también.

9) A propósito de 'hacer de detectives', quiero agregar algo más, breve. En otra de las grabaciones de *Científicos Industria Argentina*, la invitada fue Ximena Sáenz, coconductora con Guillermo Calabrese de *Cocineros Argentinos*. A ella le planteé el problema "¿Quién fue el culpable?". A medida que fuimos recorriendo juntos quién podría ser el responsable del robo de la cartera, Ximena se fue olvidando de que estaba frente a una

cámara porque el problema la atrapó. Hubo *un instante*, y lo quiero escribir de nuevo, ¡un instante! en el que pasó de *no entender* a *sí entender*… Más aún: descubrió ella sola cuál *tenía que ser la solución*. Esa cara, su expresión, el momento en el que le brillaron los ojos, no tiene precio. Le pregunté al director si había quedado registrado, porque eso es algo que uno *no puede simular ni practicar*: ese momento resume todo lo que yo querría explicar y no puedo aunque use millones de palabras. Ser capaces de generarnos entre nosotros esos *Eureka*, son parte de los momentos más espectaculares de nuestras vidas.

10) Para terminar, algunos apuntes finales, escritos en forma anárquica, sin seguir ningún orden particular. Sólo quiero compartir algunos momentos que fui viviendo mientras escribía el texto. El problema que figura con el nombre de "La cooperación" quisimos implementarlo en Comodoro Rivadavia en una de las grabaciones de *Alterados por Pi* que hicimos en mayo de 2015. El resultado fue sorprendente y muy parecido al que figura en el texto principal. No agrego nada más, porque serviría para revelar datos, pero hasta ahora, en todos los lugares donde lo implementamos, pasa *inexorablemente* lo mismo. ¿Qué conclusiones podríamos sacar sobre nosotros mismos? Otra cosa: cuando lea el problema sobre "Curiosidad en *cualquier* torneo de básquet", no podrá evitar pensar (creo) cómo puede ser que nunca se le ocurrió antes. Con esa idea, me senté con Manu Ginóbili en su último viaje a Chicago en febrero de 2015 también. Tomando un café, primero, le conté el problema. Allí, lo sorprendí. Me dijo que no entendía cómo no lo había advertido antes y, por supuesto, quiso saber por qué era cierto. Cuando me disponía a contárselo, me paró como hace 'casi siempre': "No, no me cuentes la solución. No me arruines la posibilidad de pensarlo. El viaje de vuelta de

Chicago a San Antonio es largo [casi tres horas]. ¿Por qué pretendés robarme el placer de tener algo con qué entretenerme hoy a la noche después del partido? Además, siempre están Matt Bonner [el pelirrojo compañero de Manu en los Spurs] y Will Hardy [el coordinador de videos]. Los dos están siempre interesados en problemas de este tipo". Algo gracioso sucedió cuando le conté a Fernando Pacini uno de los problemas de lógica matemática. Lo habíamos invitado para participar en una de las grabaciones de *Científicos Industria Argentina*. Le planteé el problema que acá figura con el nombre "Los hijos del especialista en lógica". Lo hice al principio del programa y después, en el primer *corte*, nos quedamos pensando juntos. Luego de un rato, le pregunté si estaba listo y si podíamos finalizar la grabación con la solución. Me dijo que sí. Reanudamos entonces, y entre los dos fuimos explorando los distintos casos hasta encontrar la respuesta. Para mi sorpresa, cuando me despedía le pregunté: "¿No te parece que si le hubieras dedicado un rato, se te hubiera ocurrido a vos solo?". Me dijo con una sonrisa increíble: "¡No! ¡Ni por asomo! ¡Si vos no hubieras estado acá a mí no se me habría ocurrido nada!". Me sorprendió porque yo estaba convencido de que después de haber analizado caso por caso, él ya había detectado qué tenía que hacer, y con ese impulso me imaginé que iba a contestar que sí. Sin embargo, su 'NO' fue rotundo… y convincente. Por último, una anécdota que lo involucra a Claudio (Martínez). Además de ser amigos, trabajamos juntos desde hace muchísimos años; para ser más precisos desde 1998. Claudio me debe haber acompañado a *todos* los programas que hicimos juntos como *Alterados por Pi*, *Científicos Industria Argentina*, *El debate*, *Grandes temas de la matemática*, *La generación dorada*, *Periodistas*, *Detrás de las Noticias*, *Día D*… no sé, estoy seguro de que me olvido de algún ciclo, pero creo que usted entiende la idea. Además, hemos viajado juntos por el interior de la Argentina, del Uruguay… hasta en Seúl estuvimos juntos. De hecho, no debe haber *nadie* que me conozca mejor que él. Acá la historia… breve. Siempre me dice que él podría dar las charlas por mí: me ha escuchado decir tantas veces lo mismo, conoce todos mis *tics*, mis *chistes*, mis *referencias*, mis *anécdotas*… todo. "Salvo con Edy (mi mujer) y mis hijos, no debo haber pasado más tiempo con nadie en mi vida." Bien: un día, en una charla en el Hospital Fernández de la ciudad de Buenos Aires, estaba haciendo algunas reflexiones con gente como yo, de la *tercera edad*. Claudio estaba sentado en el auditorio, en la última fila. Yo quería mostrarles a los participantes del encuentro que usando ciertas propiedades yo podía descubrir el número que habían elegido. Claudio me hacía señas con los brazos pretendiendo indicarme que había algo mal. Yo no entendía y, para peor, evitaba mirarlo para no *distraerme*. Hasta que en un momento, él no pudo más y me dijo desde lejos: "Creo que no te va a salir". Me quedé mirándolo sin entender por qué me podría hacer una observación tan tajante. Antes de que atinara a nada, y cuando los asistentes comenzaron a darse vuelta para saber quién era el que me hablaba, Claudio me gritó desde lo alto: "Es que estás usando el 51 como número primo, y no lo es". ¡Increíble, ¿no?! Pero tiene/tenía razón. Es tanta la confianza, es tanto el tiempo que estamos juntos que hizo muy bien en decírmelo, pero quiero remarcar que lo notable es que él ya sabe en qué se basan ciertos 'juegos' que hago/hacemos para seducir a los asistentes, y ahora él sabe muy bien que hace falta que ciertos números (en este ejemplo) *sean primos*, porque si no, el problema no sale. Y no sé si a usted le pasa, pero 51 tiene *todo el aspecto* de ser primo (solamente *divisible por él mismo y por el número uno*). Bueno, pues no. 51 no es primo porque es divisible por 17 y por 3. Más aún: $51 = 3 \times 17$. Creo que no lo olvidaré más, pero Claudio tampoco. Lo mismo que le pasa a él, les sucede a todas las personas con las que trabajo desde hace tanto tiempo: Glenda Vieites, María Marta García Scarano, Woody González, Edy Gerber, Laura Cukierman, Gaby Díaz, Betina Rodríguez, Elisabet Alegre, Ezequiel Rodríguez… sirvan estas líneas para ofrecerles mi gratitud.

El problema del ping-pong

El siguiente es un problema espectacular. Por si le queda alguna duda, lo voy a escribir de nuevo: es-pec-ta-cu-lar.

Todas las personas a las que se lo sugerí, quedaron fascinadas. Aspiro a que a usted le pase lo mismo. Antes de avanzar, quiero contar cómo me enteré y a través de quiénes.

Carlos D'Andrea es doctor en matemática y profesor en la Universidad de Barcelona. Sus aportes a la matemática lo transformaron en uno de los más importantes referentes contemporáneos entre los que nacieron en nuestro país. Carlos es correntino, se licenció en matemáticas en la Universidad del Nordeste y se doctoró en la UBA. Luego realizó estancias de investigación posdoctoral en el INRIA de Francia y en la prestigiosa Universidad de California[1], en Berkeley, y desde hace unos años es profesor en la Universidad de Barcelona, en España.

---

1. La Facultad de Ciencias Exactas y Naturales de la UBA, *tambi*én es prestigiosa. Carlos fue alumno de doctorado de Alicia Dickenstein, una de las actuales vicepresidentas de la Unión Matemática Internacional. Me cuesta trabajo escribir que la Universidad de California es prestigiosa y, si bien desde el punto de vista de la lógica *no dice nada* sobre Exactas, parecería que nuestra facultad no lo es, o que está en un lugar *inferior*. No sólo no es cierto sino que Exactas UBA es un orgullo para todos los argentinos.

Pero Carlos, además de hacer investigación en matemática pura y aplicada, ha sido jurado de centenares de pruebas de matemática a nivel mundial, es un referente obligado en todo lo que tenga que ver con matemática recreativa, y su pasión para acercar la matemática a múltiples generaciones de jóvenes de todo el mundo lo ubican en un lugar muy destacado.

Uno de sus colegas en Barcelona es el doctor Juan Carlos Naranjo. Más allá de las tareas específicas que desarrollan allá, están sistemáticamente a la búsqueda de problemas que sirvan para exhibir el *poder* de la matemática en todos los niveles. Y por supuesto, cada vez que encuentran algo que valga la pena difundir, me lo hacen llegar para que yo pueda distribuirlo.

Ahora sí, la historia prometida.

Marzo 17, 2015. Recibo este mail de Carlos que transcribo textualmente. Aquí figura el problema. Es mejor que usted lea la versión original:

> Otro problema MUY BONITO que quiero compartir contigo. Me lo contó Juan Carlos Naranjo ayer. Estoy seguro de que te va a gustar mucho. Aquí va: tres amigos (digamos A, B y C) se pasan la tarde jugando al ping-pong con el método "el que pierde se va y entra a jugar el que está afuera".
>
> Al acabar la tarde, las cantidades de partidos que jugó cada uno fueron las siguientes:
>
> A=10, B=15, C=17.
>
> La pregunta es: ¿Quién perdió el segundo partido?

Ahora sigo yo. Creo que se entiende bien el enunciado, pero me interesa enfatizar que para pensarlo (y resolverlo) no hace falta saber jugar al ping-pong. Sólo que se juega de a dos. Como son tres participantes, mientras dos juegan, el tercero… 'mira'. El perdedor sale y le deja su lugar al participante que estaba afuera como observador. El ganador sigue jugando.

Como escribió Carlos, al finalizar la tarde, más allá de quién ganó o perdió cada partido, contabilizaron cuántos partidos *jugó* cada uno, y éste fue el resumen:

A jugó 10 partidos
B jugó 15 partidos
C jugó 17 partidos

La pregunta es: ¿quién perdió el *segundo* partido?

Parece rara la pregunta, ¿no es así? Me importa reflexionar un instante con usted: ¿No es notable que se pueda contestar esta pregunta?

Cuando lo leí por primera vez (y por segunda… y tercera…) pensé que faltaban datos. ¿A usted no le pasa lo mismo?

Ahora sí… la/lo dejo a usted para que lo piense. Yo sigo a continuación.

Respuesta

Ésta es mi propuesta para resolver el problema. Quiero que usted y yo nos pongamos de acuerdo en un par de ideas.

Primero, ¿cuántos partidos se jugaron en total?

Uno podría pensar así: como A jugó 10, B jugó 15 y C jugó 17, si sumamos los tres números, el resultado es 42 partidos. Es decir, *entre los tres* jugaron 42 partidos. Pero, usted advierte que estoy contando dos veces cada partido, porque hacen falta dos jugadores para cada encuentro. Luego, el total de partidos jugados *no es* 42 sino la mitad: 21. Entonces se deduce que *en total* se jugaron 21 partidos.

Segundo, recuerdo acá las características que establecimos para este tipo de torneo: después de jugar cada partido, el ganador se queda para jugar el próximo, el perdedor sale y el que miraba entra a jugar.

Ahora, tome dos partidos consecutivos cualesquiera. Fíjese que cada uno de los tres (A, B y C) tuvo que haber jugado *por lo menos un partido*.

Entonces, como se jugaron 21 en total, la *menor cantidad de partidos que un participante pudo haber jugado es ¡diez!* ¿Por qué?, pensará usted. Fíjese en lo siguiente: cada participante no puede pasar *dos* partidos sin jugar. No puede esperar *afuera* dos partidos consecutivos. Por lo tanto, tiene que jugar —por lo menos— la mitad de ellos (si no más), pero como mínimo juega la mitad. En consecuencia, como 21 es un número impar, la 'mitad' de los partidos pudo haber sido o bien 10 o bien 11. Serían 11 si empezara jugando y los fuera perdiendo todos. Jugaría el 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19 y 21.

Pero si fueran 10 (como es el caso de A), es porque jugó los partidos 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18 y 20.

Luego, como A es el jugador que participó en exactamente diez partidos, la secuencia ***tuvo que haber sido la siguiente:***

X A X A X A X A X A X A X A X A X A X A X (*)

en donde estoy poniendo una letra 'X' para indicar que esos partidos los jugaron B contra C. Por otro lado, seguro que los partidos pares: 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18 y 20 debió haberlos jugado A, aunque no sabemos contra cuál de los dos. Por último, ahora se entiende qué tuvo que pasar: A no sólo jugó todos los partidos pares, sino que además ¡los tuvo que haber perdido todos!

Y por eso, A entra, juega un partido, lo pierde y sale. Espera su turno otra vez: entra, lo juega, lo pierde y sale nuevamente. De ahí surge que la secuencia es la que escribí en (*).

Por lo tanto, ahora estamos en condiciones de responder la pregunta (usted también puede responder ahora, ¿no es así?): el jugador que perdió el segundo partido *tuvo que haber sido* A. Más aún: no solamente perdió el segundo partido, sino que perdió *todos los partidos **pares***: 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18 y 20.

Es decir, yo podría haber preguntado: ¿quién perdió el sexto partido? ¿O el decimosegundo? Todos los partidos *pares* los perdió A. No se puede saber contra quién los perdió (si fue contra B o contra C) pero lo que es seguro es que el perdedor fue siempre A[2].

Antes de ofrecer una reflexión final, quiero agregar una forma *diferente* de pensar y resolver el problema. El crédito es para Carlos Sarraute que, sin haber leído lo que yo escribí, me envió esta solución que me parece preciosa. Acá va.

---

2. Un dato más que me aportó Juan Sabia: como sabemos que C jugó 17 partidos y B 15, y que entre B y C jugaron 11 partidos, C tuvo que haber jugado 6 veces contra A y B tuvo que haber jugado 4 veces contra A. Además, cada vez que C jugó contra A es porque vino de ganarle a B, y cada vez que B jugó contra A es porque viene de ganarle a C. Luego, C le ganó por lo menos 6 veces a B, y B le ganó por lo menos 4 veces a C.

En total entonces, C ganó por lo menos 12 veces y B ganó 8. El dato que falta para ver qué pasó con el otro partido es que no sabemos qué sucedió en el último: si conociéramos al ganador, sabríamos exactamente cuántos ganó cada uno y a quién. Interesante, ¿no?

Jugaron (10 + 15 + 17)/2 = 21 partidos.

Como A jugó 10 partidos, entonces B y C jugaron 11 partidos juntos, lo noto BC = 11.

Como B jugó 15 partidos, entonces A y C jugaron 6 partidos: AC = 6.

Como C jugó 17 partidos, entonces A y B jugaron 4 partidos: AB = 4.

Al tratar de escribir una secuencia de partidos posibles, no puedo repetir dos veces los mismos jugadores. Me lo imagino como un grafo con tres nodos:

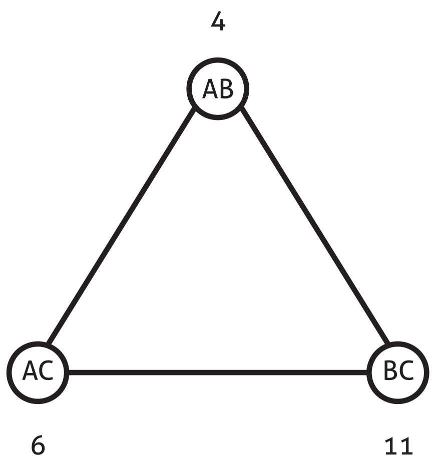


Figura 1

Escribir una secuencia de partidos es como recorrer los nodos del grafo. Quiero encontrar un camino que pase 11 veces por BC, 6 veces por AC, 4 veces por AB.

Como más de la mitad de los pasos son por BC, la única forma es empezar y terminar en BC, y en los pasos (partidos) pares puedo elegir AB o AC.

¡Otra forma de llegar al mismo resultado!

Final

¿No es espectacular que uno pueda contestar esa pregunta cuando al principio parecía que no habría manera?

Y quiero hacer una reflexión más: espero que usted se haya tomado un tiempo para pensarlo y que haya podido deducirlo sin leer ninguna de las dos soluciones. ¿Sabe por qué? Cuando uno advierte qué es lo que debe hacer, cuando descubre que para cumplir los datos el *menor número de partidos que tuvo que haber jugado algún participante es 10, y que justamente ése es el dato que uno sabía sobre A… en ese momento, en ese particular momento, uno siente que tiene en sus manos un determinado* ***poder.***

De ese momento se trata: ser capaz de pensar y advertir la potencia de nuestra capacidad reflexiva y deductiva. Solamente por eso valió la pena haber dedicado algún tiempo a pensar quién perdió el partido número *dos* de un torneo de ping-pong entre tres amigos.

Más sobre *Piedra, Papel o Tijera*

Piedra, Papel o Tijera… otra vez. No sé si a usted le producirá el mismo asombro que a mí, pero cada tanto me cruzo con algún artículo que involucra alguna decisión que se tomó usando 'Piedra, papel o tijera' me genera *infinita* curiosidad y no puedo dejar de averiguar qué fue lo que sucedió.

Lo que quiero comentar acá pasó hace más de *diez* años. Corría 2005. Una compañía japonesa (Maspro Denkoh Corporation[3]) que fabricaba (todavía lo hace) equipos para televisión (cámaras, micrófonos, antenas, consolas, cables, etc.) contaba entre sus activos con algo totalmente inusual (para mí, claro está): una colección importante (importantísima, debería decir) de cuadros de algunos de los más relevantes impresionistas franceses (y también otros de igual nivel).

No entendí bien por qué tenía esta colección pero, a los efectos de lo que me interesa comentar, las razones son totalmente irrelevantes. Supongo que así como hay empresas que tienen su capital invertido en inmuebles, a Maspro Denkoh le interesaban los cuadros.

---

3. Maspro Denkoh Corporation tenía la fábrica principal en Nisshin, en las afueras de Nagoya, Japón.

Para mostrar la magnitud de la colección, piense que entre las pinturas había un original de Paul Cézanne (nada menos), otro de Van Gogh, uno de Picasso y otro de Sisley. El presidente de la compañía, Takashi Hashiyama, declaró que la colección estaba valuada inicialmente entre 15 y 20 millones de dólares. Hashiyama ya había cumplido 74 años y quería tener liquidez para poder dedicarse a otro de sus hobbies: *cerámicas japonesas*.

Tratar de vender colecciones de este tipo requiere de la intervención de galerías de arte, subastadores, intermediarios de diferente tipo. No crea que yo sé mucho más al respecto, pero lo que me queda claro después de haber leído una porción insignificante de la literatura accesible para 'gente como yo' (y quizá 'como usted' también) es que en todo el mundo no hay muchas *confiables*, que atraigan compradores con este poder adquisitivo y que puedan *garantizar la autenticidad* de las obras.

Lo que también aprendí es que hay *dos en particular* que tienen una tradición que las posicionan en un lugar muy privilegiado en el mundo. Una se llama Christie's International, fue fundada en 1766 y tiene su base en Londres, Inglaterra. La otra, Sotheby's Holdings, también tiene sus cuarteles generales en Londres pero fue fundada 22 años antes: en 1744. Escribo las antigüedades para mostrar qué garantías se buscan en operaciones de este tipo, y además para resaltar que los ingleses han estado a la vanguardia en este rubro desde hace siglos (así como en las casas matrices de las compañías de seguros más importantes del mundo).

De todas formas voy a escribir sobre estas dos en particular porque son las que tuvieron injerencia en el caso que quiero comentar. De hecho, Hashiyama, el presidente de la compañía japonesa, sabía que necesitaría alguna empresa de estas características para garantizar la operación y, por supuesto, este tipo de colección lo ameritaba.

Supongo que a esta altura usted estará preguntándose lo que me pregunté yo también: ¿cuánto cobran de comisión? ¿Cuánto *cuestan* los intermediarios? En estos casos, la comisión es de un 20 por ciento por los primeros 200.000 dólares del precio final y a partir de allí, un 12 por ciento.

Hasta acá, todo bien… ¿y? ¿Por qué habría de estar escribiendo todo esta introducción? Es que en algún momento del proceso de venta, hubo que tomar una decisión: ¿a cuál de las dos darle la colección para que se ocupara de buscar los compradores y hacer la subasta? ¿Qué método cree que la compañía de Hashiyama eligió para decidir entre Christie's y Sotheby's? Sí, tal como figura en el título… decidieron usar 'Piedra, Papel o Tijera'. Increíble, ¿no?… pero hay más. No termina acá: siga leyendo y verá.

Los periodistas del *New York Times*, de la BBC, del *Wall Street Journal* y del *Telegraph* (por sólo mencionar algunos) se comunicaron telefónicamente con Hashiyama, quien les dijo que usar 'Piedra, Papel o Tijera' es un método muy frecuente en Japón. Más aún: "Algunas veces yo mismo uso este juego cuando no tengo claro qué dirección tomar".

Hashiyama le comentó a Brooks Barnes, periodista del *Wall Street Journal*, que de esa forma la subastadora que *perdiera* el caso, no tendría que explicarle nada a sus jefes; se habría debido pura y exclusivamente al azar. Y así fue.

El último jueves de enero de 2005, fueron citados a una reunión en el centro de Tokio un representante de cada una de las dos compañías subastadoras. El propio Hashiyama les dijo que tenían tiempo hasta el siguiente lunes para elegir 'Piedra, Papel o Tijera'. La que *ganara* en el encuentro de ese lunes, se quedaría con todo el dinero de las comisiones.

La presidente de Christie's en Japón, Kanae Ishibashi, cuando fue entrevistada por los periodistas ese fin de semana, se negó a contar cuál sería su estrategia. El periodista del *New York Times* Carlos Vogel escribió en su artículo del 29 de abril: "Ishibashi no habló, pero sus colegas en Estados Unidos confesaron que se pasó todo el fin de semana estudiando la *psicología* del juego, sobre todo de aquellos que lo juegan por internet y terminó consultando con Nicholas Maclean, director del departamento de Impresionismo y Arte Moderno de Christie's. ¿Por qué cuento esto? Porque Maclean tenía dos hijas mellizas de 11 años, Flora y Alicia. Ellas terminaron siendo, como dice Vogel, las *expertas* que buscaba Ishibashi. Ambas confesaron que lo jugaban *prácticamente todos los días*.

Y aquí viene la parte interesante (creo). Una de las mellizas le dijo al padre: "Todo el mundo sabe que uno siempre empieza con *tijera*. Es que *piedra* es demasiado obvio y *tijera* corta el *papel*". Supongo que *piedra* es demasiado obvio porque una *roca* o una *piedra* otorga una sensación de mayor poder a quien la usa que una tijera o un pedazo de papel. Entonces, si la mayoría siente que jugando *piedra* tiene más chances, entonces es posible que el rival, analizando esto, decida jugar *papel* para *envolver* a la *piedra* y ganar el tiro.

Flora no se detuvo en su análisis: "Como en este juego ambos participantes son *principiantes* yo creo que habría que jugar *tijera*. Y dejame decirte algo más: en el caso en que hubiera *empate* yo seguiría apostando por *tijera*". Entre paréntesis, este tipo de reflexiones no parece hecho por una *personita* de 11 años pero fíjese que esto es lo que está ocurriendo ahora con los niños (si es que no ocurría desde antes) y todos los aportes que hace la 'Teoría de Juegos' apuntan en esa dirección.

A todo esto, la otra compañía, Sotheby's, consultó también con su propio experto en Impresionismo y Arte Moderno, Blake

Koh. Blake dijo: "Este juego es puro azar y por lo tanto no hay demasiado que pensar. No elegimos ningún tipo de estrategia en particular".

Cuando llegó el día lunes, Ishibashi, una de las dos personas que representaría a Christie's, comentó que ella "rezó, llevó algunos amuletos que suponía que le traerían buena fortuna y esparció *sal* sobre la mesa" (símbolo o ritual de la 'buena suerte' en Japón).

En la reunión había seis personas: dos de cada galería y dos de Maspro, los dueños de la colección. Los sentaron enfrentados en una mesa larga y todos sabían que habría una modificación en las reglas habituales del juego. No habría *señales con las manos, ni mímica ni voz para mostrar lo que habían decidido jugar durante el fin de semana*. No. Cada subastadora tendría que escribir en un papel que se les había entregado a esos efectos una de las tres palabras: 'piedra, papel o tijera'... ¡en japonés!

Cuando cada parte completó el formalismo, la ganadora fue Christie's. El aporte de Flora y Alicia no había sido en vano: *'la tijera cortó el papel'*.

Algo más: el cuadro de Cézanne, "Les grands arbres au Jas de Bouffan" ("Los grandes árboles de Jas de Bouffan", 1885-1887, que retrata la famosa mansión en Aix-en-Provence donde Cézanne vivió por más de 40 años), se vendió por más de 16 millones de dólares cuando el precio que estimaba la propia compañía japonesa era de *doce*[4].

4. Originalmente, la propia compañía japonesa le había comprado a Sotheby's el cuadro de Cézanne en 1996. En ese momento había pagado 7.900.000 de dólares. Hoy se sabe que el precio está por encima de 16 millones. O sea, si la compra fue pensada como una inversión, a Maspro le fue decididamente muy bien. Por otro lado, el cuadro de Picasso que se subastaba fue pintado por el autor español en 1901 y se llama "Boulevard de Clichy". Su

Pero todo esto termina siendo irrelevante o anecdótico. En algún otro momento quiero comentar más sobre la abundante literatura que hay escrita (y se sigue escribiendo) alrededor de este juego. El 21 de abril del año pasado (2014), tres doctores en física chinos (Zhijian Wang, Bin Xu y Hai-Jun Zhou) publicaron un artículo[5] fantástico sobre cómo hacemos los humanos para tomar decisiones miradas desde un punto de vista científico. Pero más allá del aporte de ellos, el estudio evidencia *otro* problema que tenemos: *no sabemos bien qué es el azar*.

Por ejemplo, nos cuesta aceptar repeticiones y de hecho creemos que porque *salió siete veces seguidas el color 'negro' en alguna ruleta de un casino, entonces es más probable que salga 'colorado' ahora… porque le* ***tiene*** *que tocar*. Pero eso será para otro momento. Por ahora me quedo satisfecho con exhibir un caso (más) en donde haber sabido usar *una tijera* en el momento adecuado le permitió a una compañía *ganar más de cuatro millones de dólares* y mostrar la potencia que uno adquiere si es capaz de usar la 'Teoría de Juegos'.

Subnota

La literatura ubica en el siglo XVIII el origen del juego, según lo que señala Douglas Walker, presidente de la Sociedad Mundial de 'Piedra, Papel o Tijera'. Increíble que haya una asocia-

---

valor en ese momento se estimaba entre 1.800.000 y 2.500.000 de dólares, en tanto que el óleo de Van Gogh salió con una base de 1.500.000 de la misma moneda.

5. El artículo se llama "Social Cycling and Conditional Responses in the Rock-Paper-Scissors Game" (http://arxiv.org/pdf/1404.5199v1.pdf) y la versión en inglés fue publicada por la Universidad Cornell, en Estados Unidos.

ción dedicada a este juego, ¿no es así? La sociedad tiene su base en Toronto, Canadá, y son ellos los primeros en publicar un libro de 208 páginas que se llama *The Official Rock Paper Scissors Strategy Guide*, o sea, la Guía oficial para la estrategia de Piedra, Papel o Tijera. De acuerdo con lo que allí se indica, jugar *papel* es considerado como más *amigable* y *sutil*. Por su parte, *tijera* es más agresivo y astuto, mientras que *piedra* es el 'arma' más conservadora y se usa como 'protección'. Créame: yo sólo transcribo lo que leo. No tengo opinión sobre el tema.

Por último, los porcentajes que revela la guía: piedra, el 35,4%; papel, el 35% y tijera, 29,6%. No sé si le interesa *apoyarse* en los porcentajes para *jugar* o para *tomar decisiones*, pero ésos son los valores 'oficiales'. Usted decide…

Tongo

¡Qué título!, ¿no? Más aún: la palabra 'tongo' hasta suena pornográfica. Pero no… no quiero hablar de pornografía. Me explico. Las líneas que siguen están basadas en un artículo que apareció en la edición del 3 de octubre de 2014 en *El Periódico de Badalona*, uno de los diarios españoles que se vende predominantemente en Cataluña[6].

El título de la nota es: "Ola de acusaciones de tongo en el examen de la policía de Badalona". Puesto en esos términos, ya me dieron ganas de leerla. Pero además, quien me advirtió del texto fue mi querido amigo y matemático Carlos D'Andrea, profesor en la Universidad de Barcelona. Carlos me escribió: "Adrián, leé la nota y fijate cómo la matemática les permitió a los acusadores encontrar argumentos para sostener su posición".

Eso hice y acá estoy. La historia —en resumen— es que habida cuenta de las vacantes que se habían producido en la Guardia Urbana de la ciudad (Badalona) se abrió un concurso de aspirantes para llenarlas. La forma de selección incluía un examen

6. Badalona es una ciudad que está a 12 kilómetros al noreste de Barcelona, en Cataluña. El artículo original se puede encontrar en http://www.elperiodico.com/es/noticias/barcelona/ola-acusaciones-tongo-examen-policia-badalona-3569873

de 90 preguntas. El puntaje máximo era de 20 (veinte) puntos. Se presentaron 670 candidatos pero solamente 486 entregaron la hoja con las respuestas.

De ellos, sólo aprobaron 12 (doce). Como dice el diario, "hasta acá, nada anómalo". Sigo. Lo notable es que seis de ellos lograron notas *significativamente más altas* que todo el resto. Aquí quiero detenerme e invitarlo a que mire la Figura 1. Revise los datos y piense lo que le sugieren a usted.

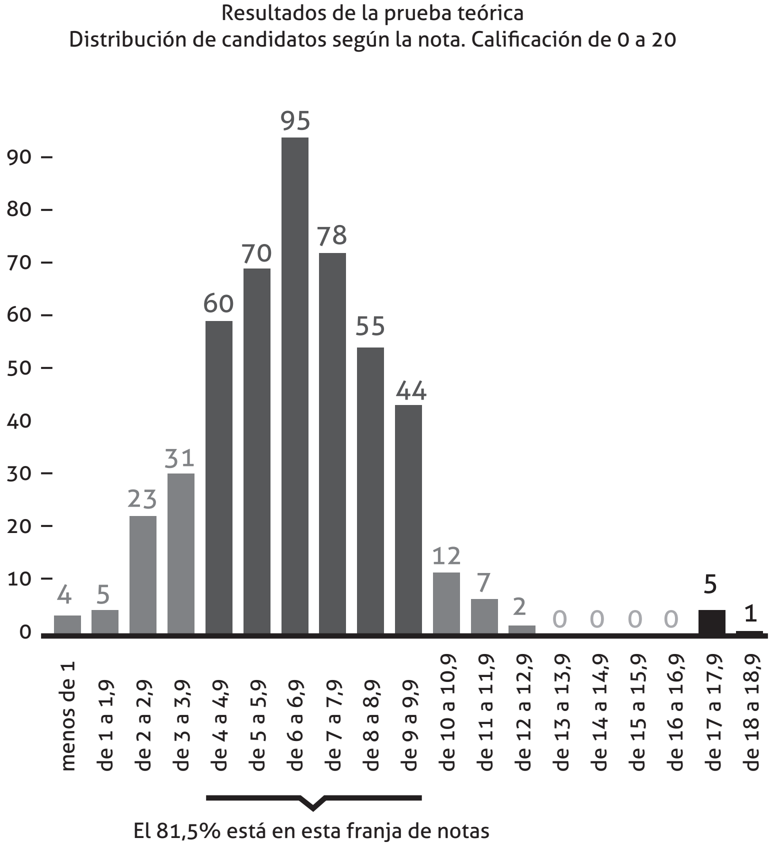


Figura 1

En vista de estos datos, uno de los denunciantes analizó estadísticamente los 486 resultados y para ello usó lo que se conoce con el nombre de la *campana de Gauss*. ¿Qué quiere decir esto? No me abandone ahora que la idea es muy sencilla. Solamente me voy a referir a este ejemplo particular, el del examen.

Como el puntaje mínimo era cero (obviamente) y el máximo para quien contestara todo bien era 20, se agrupan los exámenes que obtuvieron notas entre 0 y 1, los que sacaron entre 1 y 2, los que lograron entre 2 y 3… y así siguiendo, hasta que el último segmento corresponde a las notas entre 19 y 20. Una vez hecha esa división, se *suma* el número de exámenes que obtuvieron esos puntajes y se coloca una 'franja' (como se ve en la Figura 1) en donde la *altura* representa esa cifra. Por ejemplo, el número 70, que aparece arriba del segmento que va entre 5 y 6, indica que hubo 70 exámenes con esas notas. Justamente, las alturas van marcando las distintas concentraciones que se produjeron.

Con la misma idea, fíjese que el número 95 corresponde a las personas que obtuvieron entre 6 y 7, y lo interesante es que allí se concentró el número máximo de exámenes.

Si usted mira lo que sucede a los dos costados de esa franja, aparecen los números 70 y 73 que corresponden al número de exámenes que obtuvieron entre 5 y 6, y los que sacaron entre 7 y 8. A medida que uno se va alejando hacia los dos extremos, las alturas disminuyen, lo que indica que son menos las personas a quienes les fue cada vez peor o cada vez mejor.

Si uno tuviera que trazar una curva vería que va tomando la forma de una *campana*. Este tipo de análisis y de distribución fue detectado por Gauss, de allí que reciba el nombre de 'campana de Gauss'. A pesar de que yo lo diga 'como al pasar', todo el desarrollo que hizo quien es considerado *El Príncipe de la Matemática* merece otro tipo de atención, pero no es éste ni el lugar ni el momento. De todas formas, créame que vale la pena dedicar algún tiempo para leer sobre la vida de esta persona increíble.

Me apuro a escribir que *no todo* en la vida tiene una *distribución normal o admite una campana de Gauss como descripción del fenómeno*, pero si usted quiere pensar en otros ejemplos, imagine las alturas de las personas que viven en una ciudad, o la distribución que se obtendría si uno analizara los kilogramos que pesa cada uno. En el caso de las alturas, supongo que la mayor concentración de personas estará arriba de los que miden entre 160 y 170 centímetros, así como la de los pesos debería estar por encima de los que varían entre 60 y 70 kilos. Siguiendo con estos ejemplos, los que miden menos de 130 centímetros o más de dos metros figurarán a ambos costados ya que serán muchos menos, y los que pesan 30 kilos o 150, también.

Pero quiero volver al ejemplo. Como escribí antes, en el gráfico que apareció en el diario de Badalona sólo se reflejan los datos de 486 personas que fueron quienes entregaron la prueba. Es fácil *descubrir* la forma de *campana* que tiene la distribución de las notas. Si uno suma el número de personas que obtuvieron entre 4 y 10 obtiene 397 (ya que 60 + 70 + 95 + 73 + 55 + 44 = 397), lo que representa casi el 82% de los casos evaluados.

Sin embargo, como usted advierte, el mismo gráfico tiene una 'curiosidad' añadida: sobre el sector derecho, aparecen seis personas que obtuvieron entre 17 y 19 (nadie sacó el puntaje ideal). Y ésa es una anomalía a la que había que prestarle atención.

Entusiasmados por el descubrimiento, un grupo de los que rindieron el examen buscó los antecedentes de las personas que 'sobresalieron'. Los periodistas del diario los ayudaron y concluyeron que de los seis, dos son hijos de dos de los actuales escoltas personales del alcalde de la ciudad y otros tres son hijos de agentes de la Guardia Urbana. Hasta este momento no pudieron encontrar ningún parentesco que invitara a la sospecha sobre el sexto aspirante.

Una vez que tuvieron estas herramientas, analizaron el examen desde otro lugar. La persona que obtuvo el puntaje mayor contestó 82 preguntas correctamente, se equivocó en dos y dejó seis en blanco, y el que *más* se equivocó de los seis también respondió bien 82, se equivocó en siete y no contestó una. Justamente estos seis casos invitaban a sospechar la existencia de algún tipo de anomalía. Eso los llevó a investigar algunas preguntas y cuestionarse cómo podía ser posible que algunos pudieran contestarlas sin despertar la sospecha de 'tongo'. Uno de los acusadores declaró: "Algunas preguntas eran imposibles de responder". Por ejemplo, una de ellas pedía contestar *cuál es el porcentaje de desocupación juvenil que hay en Europa de acuerdo con lo que publicó la edición digital del diario El País (???)*. Teniendo en cuenta que el examen fue en septiembre y esa nota había salido en el diario en marzo, la pregunta parece —para ser generosos— muy 'rara'. Lo curioso es que no se pide el dato de la desocupación, sino el *dato publicado* por la edición *digital* de un diario. Otra: "¿Cuál es la forma política de Japón?". Como dicen los periodistas del diario de Badalona, parece una pregunta extraña para hacerle a alguien que pretende ser agente de la policía municipal de Badalona.

A esta altura —supongo que como a usted—, el problema que hay en Badalona dejó de interesarme, pero sí quería remarcar cómo la matemática vino en socorro de aquellos que *sospechaban* que había habido 'tongo' o 'fraude', o que *alguien* pasó los datos sobre 82 de las 90 preguntas, y que, curiosamente, cinco de los seis afortunados tenían una relación de parentesco con autoridades locales: ¡*toda* una casualidad!

El bar *antisocial*

Conozco mucha gente que está interesada en que publique tantos problemas como pueda en donde haya una suerte de *desafío*. La idea es tener que *pensar* o, mejor dicho, tener '*algo* para pensar'. Siempre es posible agregarle una motivación 'extra', por ejemplo, que el problema haya sido propuesto en alguna entrevista de trabajo en donde se intenta medir la capacidad de adaptación a nuevas situaciones por parte de la candidata (o candidato). Pero tengo algo más para decir: cuando la compañía interesada en la contratación es o bien Apple o bien Google, por poner dos de los ejemplos más rutilantes, entonces el problema adquiere una dimensión distinta.

De eso se trata el que voy a proponer ahora. Verá que tiene un enunciado muy sencillo. Si estuviera junto a usted en este momento, le *pediría* que lo leyera y, salvo que tuviera tiempo ahora mismo, se lo llevara y *se dedicara a usted misma/mismo* la oportunidad de disfrutarlo cuando pudiera. Es un problema precioso y la solución (que yo conozco) está al alcance de todos, está 'ahí', lista para ser deducida. No se lo pierda, téngame confianza. Acá voy.

Suponga que usted entra en un bar. En la barra hay 25 asientos, puestos en una hilera o fila (como se ve en la Figura 1).

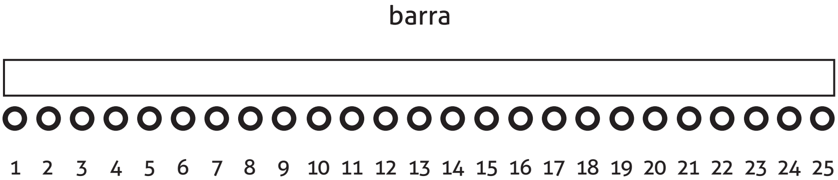


Figura 1

La curiosidad es que *todos* los clientes que tiene el bar (y que ha tenido históricamente) son *antisociables*. ¿Qué quiero decir? Cada vez que alguien viene al bar, mira cuáles de los 25 asientos están disponibles y sigue la siguiente regla (no escrita) pero que *todos* cumplen: si todos los asientos están vacíos, se sienta en cualquier parte; pero si hay alguno o algunos ocupados, se sienta dejando la *máxima distancia posible* con los otros clientes. En particular, nadie se sienta 'al lado de nadie', en el sentido de que si alguien entra y advierte que para sentarse deberá tener algún vecino, entonces 'pega media vuelta' y se va.

Algo más que transforma esta escena en algo bizarro: el barman, si pudiera, trataría de que, aun siguiendo la regla que se autoimpusieron, siempre hubiera la mayor cantidad de clientes posible.

Ahora tengo una pregunta para usted: si el barman pudiera determinar adónde sentar al *primer* cliente, ¿qué lugar debería elegir para que poder alcanzar el máximo posible de clientes? Es decir, ¿cuál debería ser la *estrategia* del barman de manera tal que los clientes ocupen la mayor cantidad de lugares?

Como usted ve, el enunciado del problema es ciertamente sencillo. ¿Por qué habrían de elegir Google o Apple plantear situaciones de este tipo? Si yo tuviera que dar una respuesta diría que se valora *muchísimo* la capacidad de elaborar o establecer *estrategias*. No se mide el 'volumen de conocimiento' sino la 'capacidad creativa', la 'capacidad para inventar', para 'correrse de los lugares comunes'.

Ahora sí, la/lo dejo a usted con usted misma/mismo.

Una forma de pensar el problema

Me pongo en su lugar y me imagino que usted advierte que la *solución* al problema es lograr que se sienten como aparece en la última fila de la Figura 2. Es decir, uno debería lograr que los clientes se ubiquen en *todos los asientos que tienen un número impar*, dejando vacíos los pares. De esta forma, se puede llegar al *máximo* de trece personas. No puede haber más, porque cualquier otro que quisiera ocupar un lugar terminaría teniendo algún vecino, lo que está expresamente prohibido. ¿Qué dice esto entonces? Que el máximo posible de personas es trece y que *tienen* que estar distribuidas de esa forma.

Conocemos entonces la distribución final, sí, pero ¿cómo la logramos? Es decir, ¿cómo llegamos hasta ella?

Sígame por acá: suponga que llega el primer cliente cuando el bar está vacío. ¿Dónde se sienta? Digamos que elige una de las dos puntas: el asiento #1 o el #25 es lo mismo: todo es simétrico en este contexto. El primer cliente se sentó en #1 y llega otra persona. Para seguir con la regla, *tiene* que sentarse en #25. De esa forma estará lo más alejada posible del #1. Hasta acá, todo bien. Llega un tercer cliente. Una vez más, para seguir con la regla y elegir un lugar que sea lo más alejado posible de los otros *dos*, debe sentarse en el lugar #13. De esta forma, hay 12 asientos vacíos hacia el lado en donde está sentado el #1 y también 12 asientos vacíos hacia el lado en donde está sentado el #25.

Cuando llegue un cuarto cliente, verá que están ocupados el #1, #13 y #25. Acá hay un par de posibilidades: o bien se sienta en #7 o en #19. En cualquier caso, si elige #7, cuando venga el siguiente se sentará en #19 (y viceversa). O sea, podemos suponer que están ocupados: #1, #7, #13, #19 y #25.

Pero ahora se plantea un problema que no habíamos previsto. Recuerde que queremos llegar a que en el final se ocupen *todos los asientos impares* y que los pares queden todos libres. Fíjese lo que pasa: cuando llegue el sexto cliente, ¿dónde se sienta? El espacio que queda entre los cinco que ya están ocupados es siempre el mismo: seis asientos. Por lo tanto, el próximo cliente debería sentarse en #4, #10, #16 o #22. No importa cuál de los cuatro, pero como usted advierte *son todos* ***pares***. Mmmm… ¿y entonces?

Luego deducimos que *no podemos empezar haciendo sentar al primero en el asiento #1 o en el* #25, porque al seguir la regla llegamos en pocos pasos a tener que ubicar clientes en asientos pares. ¿Qué hacer? ¿Habrá alguna forma de comenzar de manera tal que, al final, la configuración quede con todos los impares ocupados y los pares libres?

Acá es donde me gustaría volver a dejarla/dejarlo para que usted piense por su cuenta. Es que apareció una situación que no habíamos considerado: para llegar a la distribución ideal, es necesario *empezar* en alguna parte y seguir con la regla establecida. Esto implica *decidir* dónde ubicar al primer cliente. A partir de allí, todo lo demás es *directo*, pero elegir el asiento del primero es *determinante*.

Si me permite una sugerencia: empiece 'de atrás hacia adelante'. Es decir, usted (y yo) sabemos cuál tiene que ser la configuración final. Empiece desde allí, y evalúe qué pasos tuvieron que darse para lograrlo.

Por ejemplo, si al final hubo alguien sentado en el #3, es porque *antes* tuvo que haber dos personas ocupando #1 y #5. Ésta es la única forma de poder ocupar el #3. ¿Y cómo puede ser que haya alguien que pudo sentarse en el #5? Los asientos #1 y #9 debieron estar ocupados en algún paso anterior. Esto me fuerza a seguir con las preguntas: ¿cómo hacer para que alguien tuviera que sentarse en #9? Para eso, *dos personas* debieron estar ocupando #1 y #17.

Y acá aparece un problema que no tuvimos antes. ¿Cuál? Para que alguien haya *tenido que ocupar el #17*, había gente en #1 y #33. Todo bien, pero… ¡no existe el asiento #33! ¿Entonces? En este punto pareciera que hemos llegado a un problema sin solución. ¿Cómo lograr que el asiento #17 esté ocupado? ¿Se le ocurre algo?

Recuerde cuál era la pregunta original del problema. El barman… sí, el barman era quien tenía que tomar la decisión sobre dónde ubicar a la primera persona. Justamente acá es donde ha llegado el momento en el que él debe intervenir: invitará a la primera persona que llega a sentarse en el lugar #17. Como en el bar no hay nadie, hay total libertad de elegir dónde sentarse sin violar la regla (no escrita). ¿Comprobamos juntos que funciona?

Veamos. El primero ocupa el lugar #17. El segundo (como se ve en la Figura 2) se sienta lo más alejado de él o de ella que le es posible y, para eso, tiene que ocupar el #1. El cliente que sigue puede elegir sentarse en #9 o en #25. Los dos dejarían siete asientos vacíos. Digamos que elige el #25. Cuando llegue el próximo, tendrá que sentarse en #9. Los siguientes ocuparán (verifíquelo usted, por favor) #5, #13 y #21. Cada uno de ellos tiene *tres asientos* vacíos respecto del vecino.

Y al final, los siguientes seis clientes deberán ocupar los únicos lugares que no tengan ningún vecino: #3, #7, #11, #15, #19 y #23.

Figura 2

Moraleja

Me quiero apurar a escribir que el barman pudo haber elegido #9 en lugar del #17 y todo hubiera funcionado igual de bien. La simetría que tiene el problema así lo permite.

Pero no quiero terminar sin hacer una observación más: elaborar una estrategia para llegar a un determinado destino es algo no menor. No siempre es fácil, no siempre es posible. Pero el espíritu investigador, el entrenamiento que requiere, permite distinguir a aquellas personas que disfrutan del placer de pensar. No hay fórmulas mágicas ni caminos *directos* o que sean *siempre* conducentes. Pero el placer de tener un problema no resuelto en la cabeza es una asignatura pendiente en nuestros colegios y escuelas. Permitámonos que *algo no nos salga*. ¡No pasa nada! Es bueno saber frustrarse y aprender a tener paciencia y a 'jugar en equipo'. Lo que no se le ocurre a una, se le ocurre a otro y, entre todos, es posible que podamos resolver el problema. No sé si servirá para trabajar en Google o en Apple o en Microsoft, pero seguro que mejora nuestra calidad de vida.

La cooperación

¿Cuán dispuestos estamos a cooperar? ¿Cuán generosos somos? ¿Hay alguna forma de medirlo?

Para aquellos que gozamos del privilegio de tener casa propia, trabajo, salud, educación, ropa, *independencia*… hay ciertos temas que parecen no figurar en la agenda. Quizá suceda porque los adultos, a partir de un cierto momento, no necesitamos tener que dar *más* explicaciones. La propiedad *privada*, ser el *dueño* de algo, genera una necesidad de *defender* el objeto, algo *adquirido* es un bien que debe ser protegido.

Pero al vivir en comunidad, al coexistir con otro grupo de personas, o mejor dicho, al coexistir con personas, así 'a secas', aparecen los bienes comunes, los bienes de los cuales somos *todos* un poco dueños. Y esos bienes *también* hay que cuidarlos, pero empiezan a aparecer distintos grados de compromiso. En todo caso, lo que no hago yo lo debería hacer otro, o *el otro*. Y puede que ahora yo no tenga tiempo o no tenga ganas o sencillamente, *no me interese*.

Quiero poner un ejemplo que viví hace muchísimos años. No estoy seguro de que el caso sea pertinente al tema que estoy desarrollando acá, pero me tropecé con él en mi cabeza en los últimos días varias veces, y pensé que debía compartirlo. No es nada espectacular ni tan valioso como para merecer tanto preámbulo, pero *sí* sé que en su momento me impactó mucho. Puede que hayan pasado ya 35 años, quizá más. No importa, ¡casi cuatro décadas!

Durante mucho tiempo compartí una oficina en el segundo piso de lo que para mí/nosotros era 'la facultad': Exactas, UBA. Pasamos muchos matemáticos por esas oficinas, pero en particular quiero hacer referencia a tres: Néstor Búcari, con quien escribimos nuestra tesis de doctorado allá por el año 1979; Alicia Dickenstein y Carmen Sessa, quienes *también* escribieron sus respectivas tesis de doctorado en el mismo ambiente. Los cuatro tuvimos el mismo director: el increíble Miguel Herrera, fallecido muy prematuramente pero quien nos guió a todos hasta la 'tierra prometida'. Me desvié.

Esa oficina era pintada cada tanto por personal de maestranza de la facultad. Nunca hubo mayores diferencias entre nosotros: docentes, pintores, plomeros, electricistas, secretarias, los que imprimían las listas de problemas que los alumnos debían resolver en los trabajos prácticos, o los textos… en fin… todos. Esa porción del segundo piso era de *todos* nosotros, *nuestro* lugar común, nuestro hábitat.

Desayunábamos, estudiábamos y trabajábamos juntos, dábamos clases en las mismas aulas que otros limpiaban y cuidaban, almorzábamos en el mismo lugar, jugábamos al fútbol o comíamos asado en el mismo lugar (cuando era pertinente) y, de alguna manera, formábamos una familia. Algunos más distantes, otros más cercanos. Nada diferente de lo que podría estar pasándole (o le pasó) a usted.

Nuestra oficina, con paredes amarillas pintadas de la misma forma y un pizarrón verde, la habitábamos no sólo los profesores, docentes auxiliares, sino que también venían alumnos. Todos los días. Golpeaban la misma puerta, que tenía nuestros nombres escritos a mano o impresos en una de esas *máquinas que imprimían letras de a una mientras la cinta seguía corriendo*… *'La oficina'* o *'el **cuartito**' de Carmen, Alicia, Quiquín y Adrián* era el lugar de encuentro.

Poca luz y, la mayoría de las veces, artificial. Mucho frío y a la vez mucho calor. De todo. Baños en condiciones difíciles, los de las mujeres mejor cuidados, los de los hombres sin *tabla* para el inodoro, pero… era *nuestro baño… el de **todos***. Allí vivíamos.

Antes se fumaba mucho y, como los cuartitos eran pequeños, el olor a cigarrillo impregnaba todo. Por más que quiero, no puedo llegar a la historia que intento contar, que va a ser *tan menor* comparada con lo que acabo de escribir que tengo la tentación de abandonarla y dejar este contexto tal como está… pero no, quiero recordarlo igual.

Un día, uno de los alumnos entró para hacer la revisión de su examen. Algo habitual. Se generaba una larga cola de alumnos que esperaban hacer su revisión, que los docentes volviéramos a mirar lo que habíamos corregido. La mayoría de ellos querían *disputar* el puntaje que los docentes habíamos usado para calificar el tal examen o, en todo caso, *discutir* nuestro punto de vista.

Por supuesto, siempre había alguno que había sacado ocho o nueve, pero quería diez. Aunque la mayoría la formaban los otros, los que habían sacado *uno*, o *dos* y, obviamente, querían un *cuatro*… o más.

Muchísimos de ellos lo merecían y deploro recordar esos momentos, porque tratar de ser justo es una tarea 'casi' imposible… Mejor dicho, 'tratar de ser justo', no, pero 'ser justo', sí. Y la sensación de discusión entre quien siente que mereció más y el docente, que o bien no quiere revisar y exponerse vulnerable, o bien lo invade la tentación de ver cómo se producen los 'sometimientos' por un lado y los 'abusos de poder' por el otro, sólo me genera un gran dolor de estómago… aún hoy.

Siempre lamenté esos momentos, momentos de 'tira y afloje' que son tan tristes, desde ambos lados… no crea que me excluyo. Siempre tendía a *ceder*, salvo que fuera muy obvio que no había error nuestro, de los docentes; pero cuando algún tipo de interpretación podía favorecer al alumno, históricamente quise ponerme del lado de él (o de ella). Como usted imagina, me es mucho más cómodo situarme hoy allí, porque me deja mejor parado conmigo mismo. ¿Habrá sido realmente así? O mejor: ¿habré sido realmente así? ¿O fue nada más que mi percepción? No sé. Pero ya estoy llegando… o mejor dicho, llegué.

Un día entra un alumno a discutir su nota. Fumaba. Mucho. Y estaba muy tenso, muy nervioso. Estábamos cerca de la ventana, al lado del pizarrón. Me ofrece sus argumentos y yo le devuelvo el examen, después de revisarlo, diciéndole que creía que él estaba equivocado, que la corrección estaba bien y que no podía modificar la nota.

Él, parado ahora decididamente al lado del pizarrón, tomó nuevamente el examen y empezó a leer la hoja en cuestión. Puso su espalda contra la pared, para no tener que hacer fuerza con su cuerpo y, en ese momento, dobló la rodilla derecha y apoyó el zapato en la pared mientras tiraba las cenizas de su cigarrillo en el piso.

Aquí me quiero detener. Es obvio que no recuerdo su nombre, ni siquiera su cara. Sólo sé que me quedé mirándolo de la cintura para abajo, sabiendo que ni bien se retirara de la pared habría una huella inscripta: el zapato quedaría registrado. No hablemos de las cenizas porque a los efectos de esta historia es irrelevante, pero la huella del zapato… no… *la huella quedó marcada en la pared amarilla*. 'Eso sí que no. Ése fue *mi* límite.'

Lo interrumpí y le dije: "¿Vos hacés esto en tu casa?". Me miró sorprendido porque no entendía bien lo que le estaba diciendo.

"Sí", seguí yo, "vos, ¿procedés de esa forma en tu habitación o en la cocina o en el living de tu casa?"

Seguía sin entenderme, hasta que le dije que se corriera de donde estaba. Se movió un poco y por supuesto, tuvo que sacar el pie (y el zapato). Yo sabía lo que había abajo y le mostré inmediatamente la huella. Ya no había más sorpresa, ahora ya había entendido.

¿Cuántas veces obramos así? Y no me refiero a *ustedes*, sino a *nosotros*. ¿Cuántas veces POR DÍA somos desatentos y desconsiderados con lo 'nuestro', lo que es de 'todos' por lo que termina no siendo de 'nadie'?

Aquí es donde yo debería detener lo que estoy escribiendo y darle tiempo para que usted, si tiene ganas, reflexione sobre mi ejemplo. Como habrá advertido no tiene tanto valor en sí mismo, salvo… *salvo*… que a usted la/lo haya llevado a buscar *sus propios ejemplos*, aquellos que involucran a otros que están cerca suyo, pero a usted también.

Un paso más

En el año 1984, la revista *Science 84* intentó pulsar cuán 'buenos' o 'solidarios' somos. No es fácil, obvio. Y trató de hacerlo de la siguiente forma. En el número que correspondía a la edición de octubre de ese año, sus lectores fueron invitados a enviar un sobre a la editorial que contuviera un papel con uno de estos dos números escritos: 20 o 100. Si el lector que había mandado el sobre había escrito 20, la revista le mandaría a su casa un cheque por 20 dólares. En cambio, si había escrito 100, habría de recibir un cheque con 100 dólares.

A esta altura usted debe estar pensando lo mismo que pensé yo: ¿quién, en su sano juicio, habría de escribir el número 20?

Bien. Es que no me dio tiempo de terminar las condiciones del problema: cada lector tenía la libertad de escribir cualquiera de los dos números, pero, si entre todos los lectores que mandaban sobres, el 20% o *más* había escrito el número 100, entonces nadie recibiría nada. Para que cada uno recibiera un cheque con el importe equivalente al número que había escrito, los sobres con el número 100 debían ser *estrictamente menos* del 20% de total enviado.

Ahora se advierte que las condiciones eran diferentes. ¿Qué hacer?

En realidad, antes que siga con la historia, lo interesante sería plantearse qué habría hecho usted como lector de la revista o, si prefiere trasladar la pregunta al acá y ahora: ¿qué haría hoy usted… o qué haría yo: escribiría 20 o 100?

Lo que sucedió hace 30 años es irrelevante. Más aún: *no tiene nada que ver con nosotros ni con nuestra actualidad*. Será ***un*** caso más.

Sigo con la revista *Science*. Si todo el mundo hubiera enviado un sobre con el número 20, todos habrían recibido los 20 dólares. Y como dice William Poundstone, autor del libro[7] en donde leí el caso, siempre hay lugar para que algunas personas se exhiban como más codiciosas (o *desesperadas*, agrego yo) y por eso anoten el número 100.

De todas maneras, todos hubieran obtenido el equivalente en dólares de lo que habían anotado en la medida en que este grupo no fuera *demasiado grande*. Lo que sucede es que si mucha gente quiere 100 y no está dispuesta a ceder por el bien de todos, entonces *todo el mundo se queda con* NADA.

7. William Poundstone, *Prisoner's Dilemma* ("El dilema del prisionero"), Anchor Books, Nueva York, 1992, p. 203.

Al mismo tiempo, si son *muchos* quienes participan, el hecho de que una persona escriba el número 100 no parece modificar el resultado final y, por lo tanto, no deja demasiado lugar para la culpa. Cada uno de ellos puede pensar: "No puede ser que *mi* sobre, *mi* número, *mi* voto sea tan significativo que altere lo que les pase a todos. ¡Yo escribo 100 y listo!".

Si uno se pusiera en la mente de quien va a escribir 100, podría imaginar el siguiente razonamiento: "O bien la probabilidad de que los que escriban 100 va a estar por debajo del 20% por lo que ***mi*** sobre, ***mi*** número, no va a cambiar nada; o bien el porcentaje va a ser ***mayor*** que el 20% y, en ese caso, ***mi*** voto, ***mi*** opinión, TAMPOCO va a cambiar nada".

Es decir, en la mente de quien piensa en forma individual, las justificaciones y/o explicaciones son múltiples… y todas valederas (para él o ella).

La editorial que publica la revista, la Asociación Norteamericana para el Avance de la Ciencia, buscó protección. Pensando en que podía ser que debiera terminar *pagando* lo que prometía, intentó convencer a una de las compañías aseguradoras más importantes del mundo: Lloyd's, de Londres. Un periodista de la revista, William F. Allman, ofreció sus futuros sueldos como *colateral* para garantizar el pago. Ninguno de los dos casos prosperó. Ni Lloyd's aceptó extender una póliza que le permitiera a la revista recuperar el dinero en el caso de que su *sospecha* sobre la generosidad de la sociedad en la que vivimos fuera equivocada, ni Allman tuvo que aportar sus salarios. A último momento, la revista decidió hacer la misma encuesta pero solamente en forma simbólica, sin dinero involucrado. Claramente, *esa decisión cambió todo*. Por supuesto que los lectores supieron del cambio y ya, el experimento como tal, dejó de tener valor (al menos para mí).

Los resultados fueron éstos: participaron 33.511 personas. De ellas, 21.753 pidieron \$20 y 11.758 los *temidos* \$100. Por lo tanto, en términos de porcentaje, más del 35% anotó el número 100[8]. Con los resultados a la vista, *Science* ¡no hubiera tenido que pagar nada! Pero claro, era demasiado tarde. Igualmente, el caso termina siendo testimonial y provocador.

Aunque el resultado hubiera sido distinto, nada diría de lo que nos sucedería a nosotros como sociedad ni entonces ni ahora. Los ingleses son distintos de los argentinos y si no, basta ver lo que hacemos nosotros en partidos de fútbol y la forma en la que los jugadores nacidos en nuestras tierras viven *simulando* lo que no pasa. Ya sé, ésa es otra historia… pero no esté tan seguro.

Quiero agregar algo más que dijo en su momento Isaac Asimov, uno de los escritores de ciencia ficción más populares (y prestigiosos) de la historia. Cuando se enteró de la encuesta, al saber que no habría dinero involucrado, Asimov dijo: "A un lector usted le pide que anote 20 dólares y él/ella mismo/a se vea como *buena persona* o que anote 100 dólares y se considere a sí mismo *no tan bueno*. ¿Quién escribiría 100?".

Es obvio que no pretendo sacar ninguna conclusión con estas líneas sino invitarla/lo a pensar. ¿Cómo somos? ¿Qué creemos ser? ¿Cuán buenos creemos que somos? ¿Cuán *generosos* creemos que somos? Supongo que se le ocurrirán preguntas mejores. Acá no termina nada… en todo caso, queda abierta la discusión. Usted, ¿qué piensa?

---

8. El total de lo que los lectores enviaron hubiera sumado 1.610.860 dólares. Si *todos* hubieran anotado 20 en el sobre, la revista habría tenido que invertir 670.200 dólares. Por último, el *máximo* que habría tenido que pagar en el caso en que estrictamente menos del 20% hubiera escrito 100 y el resto, el número 20, habría llegado a 1.206.380.

Los relojes de Juan Sabia

Juan Sabia es doctor en matemática. Además, escribe cuentos para niños. Es profesor en Exactas, UBA. Está a cargo de varias clases y cursos en el Ciclo Básico Común. Pero por encima de todo, Juan es una extraordinaria persona que disfruta enseñando y comunicando. Es un gusto ver la forma en la que se relaciona con sus alumnos: con pasión, con dedicación, con interés. Cuando uno escucha: "Uy, si yo hubiera tenido un profesor así en matemática *todo* hubiera sido distinto"… bueno, Juan es *uno* de esos profesores. Juan es un profesor '*así*'.

Juan (¡qué bueno que se llame Juan, ¿no?! Un nombre bien común para una persona que de *común* no tiene nada), decía, Juan es un enamorado de la *matemática recreativa* y, con el tiempo, se ha transformado en una inagotable fuente de problemas para pensar. Acá quiero contar el último que me envió. Tiene un enunciado muy sencillo y no hace falta *saber* nada. Sólo hay que tener *ganas* de pensar y de entretenerse en el camino. Voy a reproducir —casi— textualmente lo que me escribió.

> Tengo tres relojes. Uno es eléctrico de pared, con agujas que, cuando hay un corte de energía eléctrica, se detiene. Cuando vuelve la electricidad, vuelve a funcionar.

Por otro lado, tengo un radio reloj que, a diferencia del eléctrico, se detiene si hay un corte de energía y no vuelve a funcionar salvo que yo lo vuelva a poner en hora. Si no, queda fijo en la última hora que funcionó.

Por último, mi tercer reloj es el que está en el horno microondas. Es un reloj digital que, cuando hay un corte de luz, deja de funcionar pero cuando vuelve la electricidad arranca nuevamente como si fuesen las 00.00 am.

Hechas las descripciones sobre los tres relojes acá va el problema.

Anoche, antes de acostarme estaban los tres relojes en hora. Sin embargo, esta mañana me desperté exactamente a las ocho y pude observar lo siguiente:

a) El reloj de pared decía que eran las 7.45.
b) El radio reloj, que eran las 23.30.
c) El reloj del microondas, que eran las 8:00 am.

Si los tres relojes andan bien y se comportan de acuerdo con lo establecido antes, ¿puede ser esto cierto? Si la respuesta es que ***sí***, ¿qué se puede deducir que pasó durante la noche?

Como advertirá, no hay que 'saber' nada. Sólo se trata de *imaginar* escenarios posibles y descubrir si las condiciones en las que Juan dice haber encontrado los relojes a las ocho de la mañana son factibles… o no. Ahora le toca a usted.

Solución

Una de las cosas interesantes que tiene este problema es que uno está acostumbrado a que, cuando le plantean algo para pensar, la persona que hace la propuesta *conoce* la solución. Es decir, cuando uno está en el colegio o incluso en la universidad, el docente suele pedir que uno encuentre la solución a algo, pero uno *asume* que ella o él conoce la respuesta. Más aún: uno presupone que *hay* una respuesta.

La diferencia con el problema de los relojes es que uno *no* sabe si el escenario que plantea Juan es posible o no, y eso ya sitúa la dificultad en un lugar distinto. No estamos muy acostumbrados a pensar así cuando nos educan. Sin embargo, en la vida cotidiana, los problemas no vienen con un 'cartel' que dice: "Busque la solución porque *se sabe* que existe". Uno está a ciegas: ¿tiene o no tiene solución? ¿Vale la pena seguir buscando porque uno sabe que la tendría que encontrar, o lo que hay que hacer es pensar *por qué* el problema no puede tener respuesta?

Antes de avanzar, y como tantas otras veces, me apresuro a escribir que si usted lee lo que sigue (y está en todo su derecho de hacerlo) se privará de disfrutar de pensar si el problema tiene respuesta o no. Y aunque sea *nada más que por eso*, ya habrá valido la pena haberle dedicado tiempo.

Ahora sigo con la respuesta. Pensemos juntos.

Como el radio reloj marcaba las 23.30, esto indica que la luz se cortó por primera vez a las once y media de la noche. Lo que pasó después es irrelevante para este reloj porque ya no volvería a funcionar más.

Por otro lado, como el reloj digital indicaba las 8.00 am, y esto coincidía con la hora verdadera, el último corte de luz terminó a las doce de la noche. La electricidad volvió exactamente a medianoche y no se cortó nunca más. Es por eso que el reloj digital marcaba la hora verdadera.

La pregunta ahora es: ¿qué pasó en la media hora que va entre las once y media y las doce de la noche?

Hasta acá, el único dato que no usé es que el reloj eléctrico marcaba las 7.45 am. O sea, estaba *atrasado* quince minutos respecto de las ocho de la mañana cuando Juan se despertó.

¿Cómo usar este dato? Escribo ahora algo que *pudo* haber pasado y después saquemos juntos la conclusión final.

Fíjese si está de acuerdo con esta posibilidad. No digo que haya pasado *exactamente* esto, pero piense conmigo si es un posible escenario:

a) La luz se cortó por primera vez a las 23.30. Esto ya lo sabíamos. Los tres relojes dejaron de funcionar, obviamente.
b) El radio reloj no funcionará nunca más, independientemente de lo que suceda de acá en adelante. Quedará marcando esa hora: las 23.30.
c) El reloj eléctrico queda también con sus agujas indicando las once y media (de la noche). En cambio, el reloj del horno microondas está apagado. No marca nada.
d) A los efectos de sugerirle una idea, supongamos que la luz volvió a las 23.40 y se cortó a las 23.55 otra vez. O sea, hubo luz durante 15 minutos y después se cortó de nuevo.
e) ¿Qué hora marcaba el reloj eléctrico cuando se cortó la luz por segunda vez? (piénselo usted). Sigo: el reloj eléctrico marcaba las 23.45. ¿Por qué? Porque como hubo luz por 15 minutos (de 23.40 a 23.55), entonces, partiendo desde las 23.30 (como habían quedado las agujas cuando se cortó la luz por primera vez), el reloj eléctrico llega hasta las 23.45. Allí la luz se corta otra vez.

f) El reloj digital había reanudado su marcha otra vez desde 00:00 a las 23:40 y llega a marcar 00.15 (ya que funcionó nada más que 15 minutos). A las 23.55 se vuelve a apagar.
g) El radio reloj nunca más volvería a funcionar por lo que en esos 15 minutos siguió marcando las 23.30.
h) Ahora, el paso final. Supongamos ahora que el segundo corte duró 5 minutos. La luz estuvo interrumpida entre 23.55 y 24.00 (o las cero horas del día siguiente). Cuando vuelve la luz, el reloj digital empieza a funcionar desde 00.00 y a las ocho de la mañana exhibe la hora correcta.
i) El radio reloj no produce modificaciones: sigue *detenido* en las 23.30 (como ya sabíamos).
j) Por último, el reloj eléctrico, que a las 23.55 mostraba las 23.45, *arranca* a la medianoche y funciona ininterrumpidamente por ocho horas. Pero como empezó desde las 23.45, ocho horas más tardes, muestra 7.45 am.

¿Cuál es la conclusión? El ejemplo que yo puse es —obviamente— arbitrario. En todo caso, sirve para mostrar que el escenario que está planteado en el problema ¡es posible!

Ahora bien: el caso que yo planteé ¿es lo único que pudo haber pasado?

Respuesta (que espero que saque usted): ¡Por supuesto que no! Pudieron haber pasado muchísimas otras cosas, muchísimas otras variantes. La luz pudo haberse cortado muchísimas veces en esa media hora, pero *seguro* tuvo que haber habido electricidad exactamente quince minutos. Eso *sí* que es no negociable, porque el reloj eléctrico solamente funcionó quince minutos[9].

---

9. Cuando Carlos D'Andrea leyó el problema, me escribió lo siguiente (que quiero compartir): "Una de las cosas que transforma en 'interesante' a

El número de veces que se cortó la luz, las horas exactas en lo que eso sucedió, termina siendo irrelevante. Lo único que importa es que hubo electricidad durante exactamente quince minutos en esa media hora.

Y eso termina por resolver el problema. Espero que usted coincida conmigo en que es un problema precioso que no requiere de *saber* nada. Sólo se trató de *pensar.* ¿No era ésa la idea? Y una vez más, *todo esto que hicimos antes es* ***hacer*** *matemática*.

Eso sí y como final, quiero cambiar el 'así' por 'Juan' en la frase que escribí al comienzo. Ahora hay que leer: "Uy, si yo hubiera tenido un profesor *como Juan* en matemática, *todo* hubiera sido distinto". Agrego yo: "Verdad".

---

este problema, es que hay *varias* soluciones posibles. Eso es algo a lo que incluso los que hacemos matemática no estamos acostumbrados. Yo veo que pasa mucho en los exámenes con los alumnos, que siempre buscan 'la' solución, a menos que les indique que habrá más de una…".

Autitos[10]

Tengo un problema interesantísimo para plantearle. En general, este tipo de problemas parecen no estar ligados con la matemática pero, en realidad, forman una parte central de su estructura. Me apuro a escribir que es entretenido, divertido, accesible y tiene el atractivo extra de que yo le voy a dar una parte de la solución. Si me permite sugerirle algo, no trate de resolverlo inmediatamente. Permítase pensarlo durante un tiempo. No hay apuro. Más aún: si usted logra describir 'alguna' estrategia, no importa si es la óptima, verá que se va a sentir muy bien.

Por otro lado, en la vida cotidiana, uno tiene pocas oportunidades de resolver este tipo de problemas y, cuando se enfrenta con uno de ellos, pareciera que uno está 'jugando' o 'perdiendo el tiempo'. En realidad, no sólo no es así, sino que es una verdadera lástima que se interpreten de esa forma. Pensarlos (y resolverlos) es 'hacer matemática' y, en el mundo que vivimos hoy, las personas capaces de diseñar soluciones a este tipo de problemas son fuertemente valoradas y muy buscadas en el mercado laboral.

10. Este problema lo conocí a través de Juan Pablo Pinasco. Lo propuse en varias escuelas públicas del país y también el 25 de octubre en una reunión en Tecnópolis.

Bueno, basta de prolegómenos. Acá voy.

Suponga que usted tiene 25 autitos de carrera. Necesita seleccionar los tres más rápidos. Tiene una pista para hacerlos correr pero no tiene cronómetro. Eso no sería un problema si usted pudiera hacerlos correr a todos al mismo tiempo. Bastaría con hacerlos dar vueltas a una pista (digamos diez vueltas) y quedarse con los tres que llegaran primeros. Pero aquí aparece la primera dificultad: la pista sólo 'tolera' cinco autitos por carrera. Es decir, no puede haber más de cinco autos por vez.

Y acá llega el punto crítico. Uno podría preguntarse: ¿cuántas carreras tienen que correr para poder encontrar los tres más rápidos? Si uno tuviera tiempo y recursos ilimitados, estoy seguro de que usted podría diseñar múltiples alternativas para determinar los tres más rápidos, pero ¿qué pasaría si yo le dijera que solamente puede usar la pista siete veces? Como usted advierte, ahora el problema adquiere otra dimensión. ¿Cómo hacer? ¿Cómo elegir los autitos que tienen que correr esas siete carreras?

Resumo: uno tiene 25 autitos, una pista para hacerlos dar vueltas. Solamente se permiten cinco autos por carrera. No hay un cronómetro para determinar los tiempos. Todo lo que se puede hacer al terminar una carrera, es ordenarlos por orden de llegada. Se trata entonces de elegir los tres más rápidos usando *nada más* que *siete carreras*.

Como se ve, el problema consiste en diseñar una estrategia para seleccionar los autitos para cada carrera. Ésa es la parte que le corresponde a usted. Yo ya lo 'ayudé' cuando le dije que con siete carreras alcanza. Ahora se queda con la chance de pensar.

Solución

Yo voy a proponer una estrategia posible. Estoy seguro de que debe haber otras. En todo caso, si usted encontró alguna, fíjese si coincide con la que figura a continuación. Si así no fuere, nadie dice que la suya sea ni peor ni mejor que la mía. Serán dos formas diferentes de resolver el mismo problema.

Las primeras cinco carreras servirán para determinar 'algún' orden entre los 25 autitos. Digamos que terminar ordenados así:

A1, A2, A3, A4, A5

(donde A1 es el más rápido y A5 el más lento entre estos cinco).

De la misma forma, se obtienen estos otros resultados:

B1, B2, B3, B4, B5
C1, C2, C3, C4, C5
D1, D2, D3, D4, D5
E1, E2, E3, E4, E5

Antes de avanzar, fíjese que estas carreras sólo determinan un orden entre los cinco que estaban en la pista, pero no se puede sacar ninguna conclusión si uno los mezclara. ¿Qué quiero decir con esto? Es que el auto C5 pudo haber sido el más lento cuando se enfrentó con C1, C2, C3 y C4; pero quizás hubiera sido el más rápido si lo hubiera hecho correr con A1, A2, A3 y A4.

Entonces ahora, para la sexta carrera, voy a tratar de relacionar a todos los competidores de alguna forma. Para eso, hago correr a los ganadores de las cinco carreras: A1, B1, C1, D1 y E1.

Supongamos, que éste fue el resultado de esa competencia:

A1, B1, C1, D1 y E1.

¿Qué conclusiones se pueden sacar de estas seis carreras? Éste sería el momento en el que usted, si llegó hasta acá, debería detenerse y pensar qué hacer para poder concluir cuáles son los tres más rápidos —entre los 25—, pero ahora ¡solamente nos queda una carrera para realizar! Yo sigo, pero le sugeriría que no lea lo que viene sin haberle dedicado un rato a pensar usted en soledad. Créame que vale la pena.

Ahora voy a sacar —junto con usted— algunas conclusiones de las seis carreras que hubo hasta acá.

De las cinco primeras carreras se obtienen estas dos conclusiones:

1) los autitos A4 y A5 quedan eliminados, porque tienen por delante de ellos tres que son más rápidos: A1, A2 y A3.
2) los autitos B4, B5, C4, C5, D4, D5, E4 y E5 quedan eliminados por la misma razón: todos tienen tres autitos más rápidos (ver Figuras 1 y 2).

Luego, ya hemos eliminado diez autitos. Nos quedan quince. ¿Qué se puede inferir ahora con la sexta carrera que relaciona los ganadores de las cinco primeras?

Fíjese que como el orden en esa sexta carrera fue A1, B1, C1, D1 y E1, quedan eliminados D1 y E1 porque tienen tres autos por delante: A1, B1 y C1.

Pero si D1 y E1 están eliminados, entonces también lo están todos los que corren con las letras D y E, porque si los dos más rápidos quedaron afuera, con más razón los que vinieron por detrás.

Hasta acá entonces, quedaron afuera, por distintas razones (y fíjese si usted está de acuerdo): A4, A5, B4, B5, C4, C5 y *todos* los que corrieron con las letras D y E. Esto significa que hemos eliminado 16 autos. Nos quedan nueve.

Ahora acompáñeme a pensar por este lado. Fíjese que la sexta carrera dice que C1 tiene dos autos por delante: A1 y B1. Luego, C2 y C3 tienen *tres o más autos que son más rápidos* que ellos y, por lo tanto, quedan eliminados también. Esto permite afirmar que de los coches que llevan la letra C, el único que tiene posibilidades de estar entre los tres más rápidos es C1 y se quedan afuera C2 y C3.

Por su parte, como B3 tiene por delante a B1 y B2 por la carrera entre ellos; además, por la sexta carrera sabemos que A1 es más rápido que B1, y por lo tanto que B2. Esto dice que B3 se queda afuera porque están por delante de él A1, B1 y B2 (ver Figuras 3 y 4).

Yo sé que todo esto se parece a una 'sopa de letras', pero si usted me siguió hasta acá, habrá descubierto que quedaron estos autos como candidatos:

A1, A2, A3, B1, B2 y C1 (*)

¿Y entonces? Tenemos seis autos para seleccionar los tres más rápidos, pero no los podemos hacer correr a todos porque sólo entran cinco en la pista. Nos queda una sola carrera para usar. ¿Qué hacer?

Le propongo pensar con una idea diferente. Fíjese que el auto A1, al haber ganado la sexta carrera, demostró ser el más rápido de los 25 autos: ganó su serie (con todos los autos que llevaban la letra A), pero además les ganó a todos los ganadores de las otras carreras. Luego, el auto A1 ***seguro*** que está entre los tres más rápidos. Tanto es así, que es el más rápido de todos. Luego, no hace falta que lo haga correr con los otros que quedaron entre los que figuran en (*). Lo que puedo hacer entonces es hacer participar a los otros cinco (A2, A3, B1, B2 y C1) y quedarme con los ***dos más rápidos***. ¿Se entiende la diferencia? Ahora no necesito seleccionar los tres más rápidos entre los cinco que quedan, sino los **dos más rápidos**. De esta forma, estos dos autos más A1 serán los tres más rápidos que estaba buscando… y utilicé para descubrirlos ***solamente siete carreras*** (ver Figura 5).

A1	A2	A3	A4	A5
B1	B2	B3	B4	B5
C1	C2	C3	C4	C5
D1	D2	D3	D4	D5
E1	E2	E3	E4	E5

Figura 1

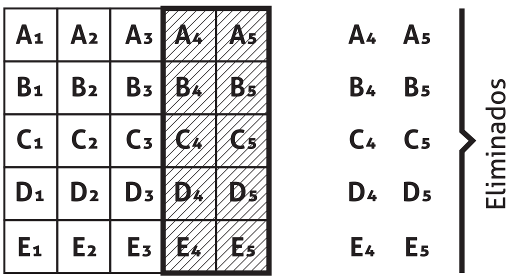


Figura 2

A1	B1	C1	D1	E1

Figura 3

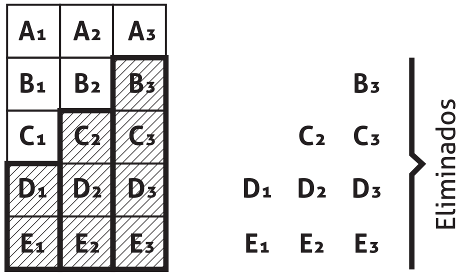


Figura 4

Corren

A_1 A_2 A_3 B_1 B_2 C_1

Figura 5

Moraleja

Como escribí en el problema anterior, aunque no lo parezca, esto es 'hacer matemática'. Más aún: los matemáticos, o los programadores, detectarían que hay algunas variaciones que se pueden hacer al problema original y buscar diferentes estrategias para resolverlo. Sígame por acá.

1) Uno podría modificar el número de autos. No tienen por qué ser 25. ¿Cómo cambiará la estrategia si en lugar de haber 25 autos hubiera diez? ¿Y si hubiera 30? ¿O cien? Esto ya muestra que quizá siete carreras no alcanzarán (o sobrarán, dependiendo el caso).
2) Otra variable a considerar es el número de autos que entran por carrera. Si en lugar de cinco entraran 25 por ejemplo, entonces alcanzaría con una sola carrera: corren todos y

listo. Me quedo con los tres más rápidos. Pero si uno permitiera seis autos, ¿cómo habría que modificar lo que hicimos antes? ¿Y si pudieran participar siete autos por carrera? ¿O diez? Luego, el número de autos por carrera también es una variable a considerar.

3) ¿Y si en lugar de elegir los tres más rápidos hubiera que elegir los cuatro más rápidos? ¿O los dos más rápidos? Es decir, *el número de autos a seleccionar es **también** una variable a tener en cuenta*.

Como se ve, reducir el problema a 25 autos, en donde pueden correr cinco por carrera y debemos elegir los tres más rápidos, es sólo un caso particular entre los infinitos posibles. Elaborar estrategias que permitan resolver todos los problemas al mismo tiempo no es algo sencillo ni mucho menos; pero, como usted detecta, el problema original, que parecía un juego, se puede transformar en algo muchísimo más complicado y útil. Es sólo cuestión de aprender a diseñar estrategias que minimicen el esfuerzo, optimicen los recursos y maximicen los resultados. Algo parecido a lo que sucede en la vida cotidiana, ¿no es así?

Contraseñas para más de dos personas

Hay algo que se ha convertido en una suerte de *constante* en nuestras vidas cotidianas: la necesidad de generar contraseñas. La cantidad de cuentas de correo electrónico, cajeros automáticos, sitios de internet para compras o incluso operaciones bancarias son ejemplos más que suficientes.

No pretendo hacer acá un manual de cómo encontrar contraseñas o *passwords* que sean efectivos. No sólo no es mi objetivo sino que tampoco sabría cómo hacerlo. Más aún: no creo que exista nada que sea imposible de *hackear*. Esto me lo dijo hace muchos años uno de los grandes *hackers* que existen en el mundo, Pablos Holman (sí, con una '*ese*' al final de su primer nombre): "Si me dan tiempo y dinero, no existe ***nada*** que no se pueda hackear". Cuando le pregunté: "Pero entonces, ¿qué pasa con la privacidad de cada persona?", su respuesta fue: "Mirá Adrián, si te llegara a suceder que estás en un bosque junto a un grupo de amigos y sorpresivamente se encuentran con un oso, lo que vos necesitás hacer no es correr más rápido que el oso: ¡necesitás correr más rápido que tus amigos!". Eso lo entendí perfectamente: ¿para qué habrían de invertir tiempo y dinero en *hackearme*, cuando hay otras personas muchísimo más interesantes y poderosas?

Conté todo esto porque mucha gente me pregunta si la matemática puede proveer claves 'impenetrables': la respuesta es que "sí, pero…". Es decir, existen formas de construirse claves *muy difíciles de hackear*, pero no son imposibles. Me desvié.

Lo que quiero hacer acá es plantear otro tipo de problema. Voy a poner un ejemplo para explicarme mejor.

Supongamos que uno está trabajando para una compañía que necesita guardar ciertos datos privados dentro de una caja fuerte. Esa caja se abre con una combinación que involucra un número grande de dígitos, digamos 100.

El director de la empresa les va a entregar a cada uno de los empleados 'una parte' de la clave pero *no* la información completa. De hecho, para que la clave sea accesible, hace falta que *tres* ***cualesquiera*** de ellos combinen sus datos.

O sea, la información que tienen una o dos personas no es suficiente: hacen falta por lo menos *tres de ellos* para que entonces sí, cuando cada uno aporta lo que sabe, aparezca la clave.

Supongamos que la empresa les da una *parte* de esa clave a 30 personas. Lo notable de la solución que voy a proponer es que no importa *cuáles sean las tres que se junten: la contraseña que generen entre ellos será la misma, siempre.*

Ahora quiero proponer una idea para resolver el problema. Eso sí: voy a necesitar escribir algunos resultados de la geometría que son *muy intuitivos*. Verá usted que es muy posible que *todos* le resulten familiares, pero casi seguramente nunca pensó que los terminaría utilizando en un problema como éste. Acá voy.

¿Cómo determinar un punto en una ciudad?

Piense en la ciudad en la que está leyendo este texto. No sé si es una ciudad chica, grande… ni siquiera sé si es una ciudad: usted podría estar en un pequeño pueblo o incluso en el campo. Hay ciertos lugares que son muy reconocidos por todos, sin necesidad de dar muchas explicaciones. Si usted está en la Capital Federal de la Argentina, el Obelisco es uno de ellos, así como la cancha de Boca o la estación de trenes de Retiro.

De la misma forma, si usted estuviera en Rosario, el Monumento a la Bandera o el estadio de Newell's en el Parque de la Independencia también lo son. Y la lista es tan larga como usted quiera. ¿Por qué escribo esto?

Elijamos uno cualquiera para que nos sirva de ejemplo… el Obelisco en Buenos Aires. Pongámonos de acuerdo en que lo vamos a elegir como 'centro'. Ahora, suponga que yo quiero encontrarme con usted en algún otro punto de la Capital. ¿Cómo hago para indicarle dónde queda este nuevo *punto*?

Quiero mostrarle que una forma de hacerlo sería la siguiente. Yo le diría: "Mirá, andá hasta el Obelisco, y para identificar el punto en el que yo voy a estar, caminá 3 kilómetros hacia el Norte y 5 hacia el Este. Yo voy a estar *parado* allí esperándote".

Como usted advierte, *hacen falta* ***dos*** *números: uno que indique cuántos kilómetros hay que ir hacia el Norte y otro que indique cuántos al Este*.

Es decir, yo podría darle nada más que este par de números (3, 5) y ya habríamos establecido una convención por la cual, el primero indica la cantidad de kilómetros que hay que ir hacia el Norte (DESDE el Obelisco, o desde el *centro*), y el segundo, cuántos kilómetros hay que ir hacia el Este. Es indistinto por dónde empezar: primero hacia el Norte y luego al Este, o primero al Este y después al Norte. El lugar de llegada es el mismo.

Pregunta: si yo le diera ahora este par: (-3, 14), ¿qué punto le estoy indicando? Me imagino su cara… ¿Qué hace un *signo menos* delante del número *tres*? ¿Un número *negativo*? Mi idea es que si yo quiero que usted camine hacia el Sur, podríamos usar como convención que los números positivos indican '*ir hacia el Norte*', mientras que cuando aparece un número *negativo* hay que ir hacia el otro lado, hacia el Sur.

Luego, el par (-3, 14) indica el punto al que uno llega si camina 3 kilómetros hacia el Sur y después, 14 kilómetros hacia el Este.

De la misma forma, y como último ejemplo, si yo le diera el *punto* identificado por el *par* (-5, -8), usted debería caminar —desde el *centro*— 5 kilómetros hacia el Sur, y después 8 kilómetros hacia el *Oeste*. O lo que es lo mismo, empezar yendo hacia el Oeste (8 kilómetros) y después, caminar 5 kilómetros hacia el Sur.

Creo que se entiende entonces que cada punto queda identificado por un par de números, *siempre y cuando nos hayamos puesto de acuerdo en algunas convenciones*:

a) Haber determinado un '*centro*'.
b) Establecer que cuando uno vea un *par* de números, el primero indica la coordenada Norte-Sur (los números positivos indican hacia el Norte y los negativos hacia el Sur), y la segunda coordenada (o segundo número del par) indica Este-Oeste, en donde los positivos indican Este y los negativos Oeste.
c) La unidad de medida que estamos utilizando en cada caso es el 'kilómetro'.

Escribí todo este texto para que usted y yo nos convenzamos de que para indicar un *punto en una ciudad* o *un punto en un plano*, una forma de hacerlo es a través de un *par de números*.

Me apresuro a decir que la que describí antes ***NO es la única forma de determinar un punto en un plano***, pero lo que me importa es que es ***una*** forma posible de hacerlo.

Ahora quiero avanzar un poco más y hacerle algunas preguntas de manera tal que recorramos juntos las respuestas.

La primera tiene que ver con algo muy intuitivo… creo. ¿Cuántos puntos hace falta tener para que quede determinada una recta (o un segmento)? Claramente, *un solo punto* no sería suficiente, ya que por un solo punto pasan *infinitas rectas*. ¿Está de acuerdo con esto?

Es que si uno tiene *un solo punto*, sabría que la recta debería pasar por él, pero… ¿en qué dirección debería apuntar la recta? Como usted advierte, hay *demasiada* ***libertad*** para moverse y, por lo tanto, esa libertad determina que haya *infinitas rectas* que pasen por ese punto.

Lo interesante es que *con solamente* ***dos*** puntos, uno determina una única recta. Es algo bien intuitivo que uno no tiene siquiera que pensar. De hecho, si alguien le preguntara: "¿Cuál es la menor distancia para *unir* dos puntos?", usted respondería sin dudar: "La distancia que mide el segmento que los une".

Aunque uno no lo advierta conscientemente, podemos decir 'el segmento' que los une porque de antemano uno acepta que *hay* ***un solo segmento*** *que pasa por esos dos puntos o que une esos dos puntos*, y por eso queda determinada una única distancia.

Por lo tanto, dos puntos determinan una única recta que pasa por ellos y, por otro lado, basta conocer dos puntos cualesquiera de una recta para conocerle *todos* los puntos que la componen. ¿Está segura/seguro que entendió lo que escribí acá?

Ahora quiero avanzar un paso más y formularle la siguiente pregunta: recién vimos que con dos puntos queda determinada una única recta… ¿y tres puntos? Es decir, ¿qué pasará cuando uno tiene *tres puntos*?

La primera observación que debemos hacer es que si los tres puntos están alineados (o si ellos mismos ya están sobre una recta) entonces no hay nada más que agregar. O mejor dicho, sí: si los tres puntos están sobre una recta, entonces esos tres puntos la determinan. Pero eso no tiene 'gracia'. En todo caso, es una información *redundante*. Lo interesante es preguntarse: ¿qué determinan *tres* puntos que no están sobre una misma recta?

La respuesta no sé si es sorprendente pero, en todo caso, me permito calificarla como curiosa: tres puntos son suficientes para determinar una única circunferencia (o círculo). Notable, ¿no es así?

Otra pregunta, casi tangencial: ¿se preguntó alguna vez *qué es una circunferencia*? En general, uno conoce la definición *clásica* (¿quiere pensar usted que *definición daría si alguien le pidiera alguna?*).

Escribo una yo: "Una circunferencia es el conjunto de todos los puntos que *equidistan* de uno dado".

'Equidistan' quiere decir que *todos* los puntos están a *igual* distancia de uno fijo, que es el que se llama *centro*. *Esa distancia es lo que se denomina* ***el radio de la circunferencia***.

Pero como escribí antes, hay otras formas de determinar una circunferencia. Por ejemplo, *marcando tres puntos (no alineados) en el plano*. Cuando uno tiene tres puntos entonces está en condiciones de determinar una única circunferencia que pasa por ellos. En consecuencia, conocida la circunferencia, uno deduce el *centro* y el *radio*.

Dicho todo esto, creo que ahora estoy en condiciones de abordar el problema original. Quiero mostrar cómo se pueden usar estas *propiedades geométricas* para determinar una contraseña y lograr que hagan falta por lo menos tres personas que aporten sus datos para encontrarla. ¿Cómo?

Supongamos que la contraseña que estableció la empresa es un *número natural*, o sea, algún número de los que figuran en esta lista *infinita* (de la cual escribo los primeros términos):

$$\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7,\ldots\}$$

Podría ser —por ejemplo— un número de 100 dígitos o de 500 dígitos. Escribo esto como para dar la idea de un número *grande*, o al menos *grande* de acuerdo con nuestros parámetros. A este número lo voy a llamar R.

Lo quiero llamar así para *inducirla/lo* a pensar hacia dónde voy. Quisiera poder utilizar ese número como el ***radio*** de alguna *circunferencia*.

Bien, pero ¿qué circunferencia?

Ahora viene lo mejor. Es que nos fuimos preparando, usted y yo, para llegar acá.

Suponga que la empresa le quiere dar a 30 personas algunos datos para que puedan *deducir la contraseña*, pero que no le alcance a cada uno individualmente, ni tampoco juntándose *dos* personas de ese grupo de 30. Lo que la empresa quiere es que hagan falta *por lo menos* ***tres*** *para que —combinadas— puedan acceder al número* R.

¿Se le ocurre alguna idea con lo que vinimos haciendo hasta acá?

Pensémoslo así: la empresa podría tener escrita en alguna parte una cierta circunferencia. Los datos sobre esa circunferencia son privados y solamente los conocen los directivos de la compañía. Justamente, como ellos *saben* cuál es la circunferencia, en particular saben *qué puntos están en esa circunferencia y, además, el radio que tiene*.

Acá voy a usar algo que escribí antes: cada punto del plano viene dado por *un par de números*, ¿recuerda? Luego, la empresa podría tomar 30 puntos de la circunferencia, o sea, 30 pares de números, y dárselos a cada una de las 30 personas que forman parte del grupo que estaría en condiciones de conocer la contraseña.

Intuyo que ahora usted empieza a entender cuál es la estrategia. Si cada uno de ellos tiene los datos de *un solo punto de la circunferencia*, con ese dato solo es imposible 'recuperarla'. Más aún: si se juntaran dos personas y trataran de 'unir fuerzas' o 'combinar los datos que tienen (los dos pares)' tampoco les alcanzaría.

Ahora, si *tres* de ellos se juntan, cada uno aportaría *un punto de la circunferencia*. Con tres puntos… SÍ podrían *recuperar la circunferencia* y, justamente, ni bien conozcan la circunferencia sabrán el radio, o sea R. Y allí se termina de develar el misterio: con R, conocerán la contraseña y podrán acceder a la caja de seguridad que contiene los documentos privados.

Moraleja

La idea que tuve al producir esta historia es mostrar cómo la matemática puede servir para generar no sólo una contraseña en el sentido clásico, sino que también puede ofrecer una variante para que no alcancen los datos que tenga una sola persona, ni dos (como en este caso), sino que hagan falta tres.

Estoy seguro de que usted mismo se preguntará ahora: ¿y si yo quisiera que no alcancen tres tampoco sino que sean *cuatro*? ¿Habrá alguna forma de hacerlo?

La respuesta es que sí, pero en ese caso ya no será el radio de una circunferencia, sino el radio de una esfera en tres dimensiones. Y como usted también intuye (supongo) se puede seguir ampliando el número de personas requeridas para conseguir la contraseña, en cuyo caso irán aumentando las dimensiones en las que estará sumergida la *esfera*. Pero ésa ya es otra historia. Por ahora, me quedo con el radio de una circunferencia y con la satisfacción de haberla/haberlo invitado a recorrer conmigo este camino. Ojalá que lo haya disfrutado al leerlo (y pensarlo) como yo al escribirlo[11].

---

11. Cuando le envié este artículo a Carlos D'Andrea, el mismo día de recibirlo me contestó con el siguiente aporte, que adjunto como nota al pie porque no tengo espacio suficiente para escribir todos los prerrequisitos necesarios para poder entenderlo. De todas formas, no quiero omitirlo porque para todos aquellos lectores que intenten profundizar un poco más en este tema, el camino que propone Carlos resulta 'hiperinteresante'. Acá va su comentario: "Para cuatro o más puntos, en lugar de irte 'al espacio' que es un recurso válido y simple, podés pensarlo de otra manera y quedarte en el plano. Hay un resultado general que dice lo siguiente: '*Cinco puntos en el plano determinan una única cónica que pasa por ellos*'. Fijate que la ecuación general de una cónica en el plano es:

$$Ax^2 + By^2 + Cxy + Dx + Ey + F = 0$$

Podemos suponer que F *no es cero* y dividimos la ecuación por F. Ahora nos quedan *cinco* parámetros y la ecuación se transforma en ésta:

$$ax^2 + by^2 + cxy + dx + ey + 1 = 0$$

El caso de la circunferencia es cuando $b = 0$ y $a = c$. Así quedan $(5 - 2) = 3$ parámetros libres que son tus tres puntos. Pero uno podría pensar que solamente $c = 0$ (o alguno de esos valores que queden nulos) y entonces resulta que uno tiene la ecuación de una curva que debería ser capaz de recuperar unívocamente. Ahora, si hubiera más de cinco puntos, entonces deberíamos pensar en secciones cúbicas, etc.".

Ruedas y dientes de colores

Volvíamos de San Juan muy tarde, de noche. Cansados, llegamos al aeropuerto. Mientras hacíamos la cola para embarcar, una joven se me acercó y me dijo si podía hacer una pregunta sobre un juego que estaban diseñando con algunas amigas. Le dije que sí, que no me comprometía a poder pensar nada en el avión después de una jornada de 15 horas, pero que me contara el problema y vería si se me ocurría algo.

Joana me hizo el siguiente planteo del cual usted recibirá una versión *abreviada y adaptada*: el juego no está terminado, por lo tanto no está patentado y, además, es solamente un eslabón muy menor de todo lo que ella y sus amigos fueron programando. Pero más allá de todo lo que rodea el diseño, hay un punto en donde Joana necesitaba poder contestar una pregunta. En todo caso, mi satisfacción fue convencerla de que ella estaba en condiciones de encontrar la respuesta sin la necesidad de ayuda de terceros. Y esto fue lo que pasó.

Suponga que usted tiene dos ruedas dentadas, como si fueran dos engranajes. Cada una de ellas tiene *cien dientes*. Estos dientes están pintados de dos colores: blanco y negro, pero con la restricción de que haya 50 de cada color (en cada rueda). La distribución de los colores es al azar y la única regla a respetar es que haya la misma cantidad en cada rueda.

Las ruedas son iguales, en el sentido de que son físicamente indistinguibles, *salvo* por la distribución de los colores. De esa forma, cuando uno apoya una arriba de la otra, los cien dientes coinciden. Por supuesto, no hay ninguna razón que obligue a que haya siquiera *un par de dientes* cuyos colores coincidan. Sin embargo, Joana necesitaba que sucediera algo curioso y que le parecía *falso* o *antiintuitivo*.

¿Será verdad que sea cual fuere la distribución de los colores haya *siempre* una forma de rotar una de las ruedas de manera tal que cuando apoya una arriba de la otra haya *por lo menos* 50 dientes que tienen el mismo color en las dos ruedas?

Me apuro a decir que la respuesta es sí: sucede *siempre* independientemente de cómo usted pinte o haya pintado las dos ruedas. ¿Por qué? Ahora… ahora le toca a usted.

Idea para la solución

No sé si hace falta que escriba que la solución no se nos ocurrió en el avión (ni mucho menos), pero cuando Joana me escribió que habían descubierto la respuesta, ella y sus amigas, sentí una gran alegría: todo lo que les hacía falta era el *empuje* para superar un escollo mental más que verdadero. Y ésta fue la solución que encontraron.

Si usted le dedicó tiempo, quizá la idea que encontró para convencerse difiere de la de ellas, pero en definitiva, ¡qué importa!

Ellas diseñaron este procedimiento. Acompáñeme por acá. En principio, voy a empezar colocando una rueda encima de la otra de manera tal que coincidan los cien dientes. La rueda de abajo quedará fija; en cambio, voy a hacer rotar la de arriba, una vez que vaya tomando nota de un número que me importa. Fíjese que cada vez que usted apoya las dos ruedas, hay un número de dientes que tienen el mismo color (arriba y abajo). Puede que exista alguna situación en la cual *no haya ninguna coincidencia*. En ese caso, la respuesta va a ser ¡cero!

Al número de coincidencias que se produce la primera vez que apoyo las dos ruedas lo voy a llamar C1 (no se asuste con los nombres: es sólo para ponernos de acuerdo en la terminología; uso la letra C para que marque que son las 'coincidencias' y el número *uno* porque es la primera posición en la que apoyo una sobre la otra).

Lo que importa entonces es que este número C1 mide *el número total* de coincidencias entre los colores de las dos ruedas. Lo anoto y sigo.

Ahora, hago girar la rueda de arriba hasta que vuelvan a coincidir los dientes. Cuento de nuevo. A ese número lo voy a llamar C2.

Y así sigo y voy anotando: C3, C4, C5, … , C97, C98, C99 y C100. Acá paro. ¿Por qué? Si hiciera rotar la rueda de arriba una vez más, sería la vez *ciento una*, y entonces llegaría nuevamente a la posición 'inicial', o de 'partida'. Ese particular número de coincidencias ya lo conté antes y lo llamé C1.

Con este procedimiento hemos *generado* cien números, desde el C1 hasta el C100. Mi objetivo es probar que *al menos* ***uno*** de estos números es ***mayor o igual*** que 50.

Hagamos una pausa y quiero invitarla/lo a *contar* ***de otra forma*** las coincidencias que se van produciendo al rotar la rueda de arriba.

Como antes, empiezo superponiendo ambas ruedas. La de abajo quedará fija y voy a hacer rotar la de arriba de manera tal que los dientes se superpongan. Pero ahora voy a *contar* las coincidencias de otro modo.

Elijamos juntos *un diente de la rueda de abajo*, no importa cuál. Al apoyar la de arriba sobre la de abajo, puede que *arriba de este diente en particular haya quedado uno* (*de la rueda de arriba*) *que sea del mismo color* (*o no*). Pero SÍ *estamos seguros* de que como el diente de abajo está fijo y yo hago rotar la rueda de arriba, tendré ***exactamente*** 50 coincidencias cuando haya hecho las 100 rotaciones. Es que sabemos desde el comienzo que las dos ruedas tienen 50 dientes blancos y 50 negros. Luego, al recorrer *todas* las posibles rotaciones (que son 100) voy a encontrar que se aparean bien en 50 de las 100 veces.

Por otro lado, *lo mismo va a pasar* con los otros 100 dientes de la rueda de abajo. Si hubiera elegido *otro diente*, también habría 50 veces en las que coincidiría con el diente 'que le toque arriba'.

Es decir: cuando haya recorrido las 100 rotaciones con la rueda de arriba, *cada diente* de la rueda de abajo se *apareó correctamente* (en cuanto al color) 50 veces. Como son 100 dientes y hay 50 coincidencias por diente, entonces ***en total*** hay

$$50 \times 100 = 5.000 \qquad (**)$$

coincidencias. ¿Me siguió? Es importante que revise mis argumentos porque estamos a punto de terminar y necesito que no se pierda. Lo que hemos comprobado juntos es que en el proceso de dejar una rueda quieta (la de abajo) y hacer rotar la de arriba 100 veces, *en total hay 5.000* coincidencias.

Ahora vuelvo para atrás en el texto y la/lo invito a que usted haga lo mismo. ¿Recuerda lo que significaban los números C1, C2, C3, … , C99, C100? Eran los que contaban el número de coincidencias que había cada vez que apoyaba las dos ruedas. Lo que hemos hecho en (**) es comprobar que la *suma de todos los números*

$$C1 + C2 + C3 + C4 + \ldots + C97 + C98 + C99 + C100$$

es igual a 5.000. ¿Y por qué es tan importante? ¿Quiere terminar el problema usted?

Es que hemos llegado a la conclusión de que

$$C1 + C2 + C3 + C4 + \ldots + C97 + C98 + C99 + C100 = 5.000$$

¿Qué se deduce de esto? Si la suma de estos cien números es igual a 5.000, entonces ¡no puede ser que ***todos*** *sean menores estrictos de 50!* Si así fuere, si *todos* fueran menores estrictos que 50, la suma ¡no podría llegar a 5.000!

Moraleja

Alguno de los 'numeritos' ***tiene que ser mayor o igual que*** 50… ¡Y eso es EXACTAMENTE lo que queríamos comprobar!

En alguna de las posiciones, o mejor dicho, en *por lo menos una* de las posiciones en que hagamos coincidir las dos ruedas, tiene que haber 50 coincidencias… o más.

¿No es bonito? ¿No es notable también cómo uno puede responder la pregunta sin tener que intentar con *todas las posibles formas de colorear las dos ruedas*?

Bien, de esto se trata la matemática también: de encontrar razonamientos que no requieran de la *fuerza bruta*, sino de una forma 'creativa' de modelar un problema. De ahí mi entusiasmo… ¡y ni hablar del de ellas!

Los teléfonos celulares y la ciencia de los datos

Para empezar, le pido que lea con atención este párrafo:

> En la década pasada, los teléfonos celulares han adquirido una fuerte popularidad en todo el mundo, cruzando todos los grupos demográficos. Son usados por hombres y mujeres indistintamente, cubriendo un amplio espectro de edades e independientemente de la riqueza del país en donde se encuentre el usuario. Estos teléfonos móviles se han transformado en uno de los mecanismos más importantes para estudiar la interacción social dentro de una población, convirtiéndose en una fuente increíble de información para analizar el comportamiento humano, la demografía humana y sus correlaciones. En particular, la información que uno recoge a través de las comunicaciones por vía de la telefonía celular está siendo usada para elaborar análisis cuantitativos en la demografía de los usuarios, separándolos por edades, género, educación y poder adquisitivo.

Este párrafo inicial debería ser lo suficientemente atractivo como para entender el salto de calidad que hemos dado en la última década. Para hacer estudios en el pasado, era necesario mirar a 'muestras' muy pequeñas ya que el costo las transformaba en prohibitivas. La tentación a extrapolar sin tener suficientes datos nos hizo conjeturar cosas que terminaron siendo falsas. Pero aún más: la cantidad de datos que tenemos hoy es tan abrumadora, que si bien uno sabe que dentro de ese océano de información están escondidos mensajes, todavía resulta muy difícil poder descifrarlos. Carlos Sarraute[12] lo puso en las siguientes palabras: "Uno sabe que hay una mina de oro escondida en alguna parte. Bien, pero ¿dónde buscar las pepitas?".

Hacer las preguntas adecuadas, entender *qué* buscar y *dónde* buscar es una tarea a la que se dedica la 'ciencia de los datos'. La "memoria" que se debe usar es cada vez más grande pero, al mismo tiempo, cada vez más barata. Es por eso que en lugar de seleccionar, uno tolera 'llevarse todo': "Ya veremos cómo buscar lo que necesitamos". Estoy seguro de que aquellas personas que tenemos el privilegio de usar 'desde siempre' una computadora, entendemos bien de qué se trata, aun cuando uno las usa para tareas personales. ¿Cuántos de nosotros/ustedes tienen múltiples copias de un archivo que no necesitamos/necesitan? Antes, uno era muy precavido con lo que almacenaba, porque los 'armarios' o 'cajas' o 'cajones' que teníamos disponibles eran muy pocos. Por eso los cuidábamos mucho. Hoy, ya no hace falta. Esa ventaja cuantitativa tiene un costo: cada vez cuesta más trabajo encontrar lo que uno busca.

Suponga que usted pudiera registrar *todas las conversaciones telefónicas que se han hecho usando teléfonos celulares, todos los mensajes de texto, todas las fotos, todos los videos, toda la música, etc.* ¿Y entonces? Aunque uno lo hiciera en forma anónima, aunque uno fuera hipercuidadoso con la discreción que corresponde, aunque uno no quisiera aprovecharse de las 'fallas del sistema', aun así… ¿qué buscar? ¿Qué es lo importante? ¿Qué es lo que queremos aprender que no sabemos e intuimos que está escondido en esa montaña virtualmente 'infinita' de información?

12. Uno de los autores del trabajo del cual extraje el párrafo inicial.

Como escribí antes habrá que educarse para saber qué preguntas hacer. Me surgen disparadores por todos lados. Mis dedos 'vuelan' sobre el teclado. Se mezcla la curiosidad que tenemos los humanos para descubrir cosas que ni sabíamos que nos interesaban hasta que las vimos por primera vez, pero al mismo tiempo me asaltan las dudas sobre lo 'maligno' que podría resultar si esta montaña de datos quedara en 'malas manos'[13] (si es que ya no lo está). ¿Qué conclusiones estaremos dispuestos a tolerar? ¿Y si resulta que descubrimos cosas que no queremos saber? Así dicho, parece tonto: ¿cómo no vamos a querer saber? Bueno, podría haber gente que no quisiera conocer determinadas cosas de su vida. Lo voy a poner en términos extremos para 'tratar de tener razón'. Supongamos que usted pudiera averiguar que tiene una enfermedad que no conoce, silenciosa porque no tiene síntomas, pero que lo va a matar en un lapso muy breve. Exagero con el ejemplo en forma adrede para invitarla/lo a pensar. ¿Reaccionaríamos todos igual? ¿Todos querríamos saber? O mejor dicho, ¿todos querrían saber?

Las diferencias individuales que tenemos son fascinantes. Somos un mundo de individualidades tratando de coexistir en sociedad. Nuestras particularidades —inexorablemente— nos distinguen. Pero, como queda muy claro, me desvié de mi objetivo

13. Cuando Carlos D'Andrea leyó esta nota, agregó un comentario que me parece muy importante compartir: "¿Qué quiere decir quedar en 'malas manos'? ¿Cuáles serían las 'buenas manos'? Para mí, el gran problema es que no importa quién sea, si uno tiene capacidad de acceder a ese tipo de información por más bueno o malo que sea, accederá a ella. 'Información es poder', y eso es muy irresistible. Me da la impresión de que justamente no debería NUNCA haber una causa o motivo para acumular todos los datos de una persona o población…".

que era contar un trabajo científico que les valió a los autores[14], todos argentinos, el reconocimiento internacional que los/nos ubica en un lugar privilegiado en el mundo cuando se trata de hacer estudios de este tipo.

El trabajo se hizo con datos provistos por una compañía de teléfonos celulares de México. La idea era detectar algunos atributos de los usuarios; más específicamente, ser capaces de 'deducir las edades de los clientes'. Me explico: la compañía les entregó datos de más de 90 millones de usuarios. Lo quiero escribir otra vez para que no crea que me equivoqué: más de noventa millones de usuarios. La base de datos usada consistió en las llamadas telefónicas y también SMS[15] (mensajes de texto breves). En un plazo de tres meses, se recolectaron más de dos mil millones de llamados y otros dos mil millones de mensajes de texto[16]. Cada registro contenía la información detallada de los números de teléfono (pero anónimos en el sentido de que no se sabe quién es el usuario al que le corresponde ese número) de quién hacía la llamada y de quién la recibía. Se registró también la duración de la llamada, el momento del día en el que se efectuaba y las antenas que fue utilizando el cliente a medida que se desarrollaba la acción.

Esta información tan detallada les permitió crear una red

---

14. "Harnessing Mobile Phone Social Network Topology to Infer Users Demographic Attributes", por Jorge Brea, Javier Burroni, Martín Minnoni y Carlos Sarraute. O sea, en una traducción libre mía, algo así como "Tratando de 'dominar' la topología de la red social provista por los teléfonos celulares, para tratar de inferir los atributos demográficos de los usuarios".

15. SMS son las siglas en inglés de "short message service" (mensajes de texto breves)

16. Para ser más precisos, los datos correspondieron a 93.797.349 usuarios, de los cuales se analizaron 2.185.852.564 llamados y 2.033.719.579 mensajes de texto.

dinámica compleja con la posibilidad de estudiar la movilidad habida cuenta del cambio de antenas que se producía en el momento de la llamada.

Los autores separaron un grupo de datos para analizar y luego confrontar con el resto, para saber si las inferencias que habían hecho eran correctas. En principio, dividieron a los usuarios por edades en cuatro categorías: menores de 25 años, entre 25 y 34, entre 34 y 49 y la última, mayores de 50 años. La motivación que los llevó a hacer esta subdivisión que parece arbitraria se debió a intereses particulares de la compañía telefónica.

Las conclusiones más importantes fueron las siguientes:

a) Si bien la población mexicana tiene número de hombres y mujeres distribuidos en 'mitades' (aproximadamente), esos porcentajes no respetan a los usuarios de telefonía celular. El 57% son hombres y el 43%, obviamente, mujeres. La diferencia es ciertamente *muy notable*. La desigualdad de género en cantidad también se manifiesta en el tiempo y duración de los llamados. El género masculino habla más tiempo o, por lo menos, están 'más pegados al teléfono'.
b) Al distinguir las llamadas entrantes y salientes, también hay una *asimetría*. Los hombres hablan más tiempo cuando son ellos los que *inician* la llamada, pero son las mujeres las que hablan más cuando ellas *reciben* la llamada.
c) Existe una fuerte *homofilia* respecto de la edad cuando uno estudia el grafo de las comunicaciones. ¿Qué quiere decir esto? Esencialmente que los humanos (al menos los que viven en México) tienen una tendencia desde el punto de vista estadístico a comunicarse con personas de edades similares. Es decir, hablan más con la gente de su propia edad que con cualquier otro grupo.

d) Sin embargo, el segundo ‘pico’ de comunicaciones se da para una diferencia de edades de 25 años. Por ejemplo, un joven de 30 años habla más (en promedio) con otros jóvenes de 30 años o de edades cercanas, pero el segundo grupo relevante corresponde al de gente que tiene alrededor de 55 años. Si uno se permite pensar que cada 25 años se produce un salto generacional, es esperable que estas comunicaciones correspondan a llamados de hijos a sus respectivos padres (y al revés).
e) Otro dato interesante tiene que ver con cierta *homofilia* respecto al género. Es decir, los hombres hablan más entre ellos y lo mismo sucede con las mujeres. Me apuro a escribir una vez más (igual que los autores): todo esto es ‘en promedio’.

Con estos resultados, análisis posteriores les permitieron desarrollar *un nuevo modelo*, esta vez basado en la información de los vínculos de cada persona. ¿Qué quiere decir? Como todos los usuarios fueron divididos en cuatro categorías (por edades), si uno tomara una persona al azar, tendría un 25% de posibilidades de pertenecer a alguno de los grupos (la probabilidad de pertenecer a cada grupo es ¼). Sin embargo, usando el nuevo modelo, el algoritmo permite decidir a qué grupo pertenece esa persona con un 62% de posibilidades de estar en lo cierto. Como se advierte, es un resultado muy fuerte: uno puede inferir la edad de la persona en cuestión en función de las personas con las que se comunica. Algo así como ‘dime con quién hablas y te diré qué edad tienes’.

Más allá de este estudio particular y de los cientos que se están realizando mientras yo escribo y usted lo lee, decía, mi idea es mostrar cuál es la potencia de esta nueva ciencia conocida como ‘la ciencia de los datos’. Hasta hace nada más que diez años, todo esto hubiera sido imposible. La decodificación del genoma humano hubiera sido imposible. La estructura en la que se basa la ‘minería de datos’ hubiera sido imposible. Y la lista sigue.

Mientras tanto, uno sigue dejando huellas por todos lados, totalmente inconsciente de lo que hace, como si les estuviera pasando ‘a los otros’. Bueno, lamento informar que no es así. Está aquí, acá, alrededor suyo, ‘casi’ en todas partes. No es ni bueno, ni malo. Es. En la medida en que cada uno sepa que existe, sabrá qué es lo que hace, qué determinaciones toma. Y mientras tanto, la vida sigue.

Computadoras en las escuelas (y niños para compartirlas)

Más allá de la opinión que usted tenga (o haya tenido) del gobierno de Cristina Kirchner en la República Argentina, uno de los logros más *espectaculares* (y creo que indisputables) es el de haber distribuido en forma gratuita a través del plan Conectar Igualdad casi ¡cinco millones de computadoras en menos de cuatro años! (los que correspondieron al período 2011-2015).

Habrá que revisar la definición de lo que significa ser *alfabeto*. Cuando yo era niño (y muy posiblemente cuando usted también), bastaba con saber leer y escribir para que uno estuviera en condiciones de integrarse a la vida laboral y tener acceso a un empleo digno. La historia argentina (y mundial) está plagada de historias de gente que firmaba *poniendo el dedo o imprimiendo su huella digital*. No conozco las cifras de analfabetismo que había 50 o 60 años atrás pero no parece que en la actualidad sea un problema acuciante en el país. Claro: eso dependerá —una vez más— de lo que decidamos que sea un *piso de mínima* como para que todo niño tenga las mismas posibilidades que tuve yo (y quizás usted también). El objetivo, obviamente, es *analfabetismo* ***cero***.

Pero hoy, retomando lo que decía antes, no alcanza con saber *leer y escribir*. Por supuesto que es necesario, pero es *clara-*

mente insuficiente. Si tuviera que improvisar un conjunto de necesidades mínimas para considerar que una persona es 'letrada', diría que es imprescindible que sepa otro idioma (además del castellano, inglés o chino, para que no quede todo reducido a lo que nos llega del país del norte), pero también que tenga conocimientos sobre cómo programar. Por eso no me voy a cansar de proponer que, *así como es obligatorio estudiar matemática, lengua, historia y geografía, en todas las escuelas públicas primarias y secundarias se incluya programación* en la misma categoría.

Creo que sé lo que está pensando: ¿y quiénes van a enseñar a programar? Entiendo el problema y desde hace tiempo también que andamos en la búsqueda de soluciones, incluso como la que propuse hace un tiempo sobre la 'Educación horizontal'[17].

Ahora me *corro* un poco de lo que estaba escribiendo: quiero proponerle pensar un problema sencillo pero hiperatractivo, y que tiene que ver con niños, escuelas y computadoras. Es un problema que se resuelve usando *solamente* su capacidad para razonar, por eso me parece muy interesante. Acá va.

Suponga que en una clase hay 33 niños y que en total hay 10 netbooks que van a compartir. Por razones casi obvias, lo mejor sería que cada niño tuviera una computadora y no tener que compartirla, pero hagamos de cuenta que el docente ha decidido poner una restricción: como máximo, cada computadora puede ser utilizada por cinco niños al mismo tiempo. El maestro les propone a los estudiantes que decidan ellos cómo se van a distribuir. Pero les hace una advertencia que ellos deberán comprobar si es cierta (y de paso, le sugiero que piense usted si el docente tiene razón o no): "Verán ustedes que hagan la distribución que

---

17. http://www.pagina12.com.ar/diario/contratapa/13-219587-2013-05-09.html

hagan, inexorablemente habrá por lo menos *cinco* computadoras que tendrán que compartir tres niños o más".

Es decir, el docente dejaba que los niños eligieran con qué compañeros se juntarían para usar cada netbook; pero siendo 33 alumnos, 10 computadoras y permitiendo que como máximo hubiera cinco niños por aparato, eso obligaría a que en por lo menos cinco computadoras haya tres niños asignados (o más). ¿Quiere pensar por qué? O, en todo caso, quizá sea útil que usted se proponga elaborar una estrategia que demuestre que el maestro *no tenía razón*. Haga la prueba y verá lo que sucede. Yo sigo a continuación.

Idea para pensar

¿Será verdad lo que dijo el docente? ¿Cómo hacer para comprobarlo? Es decir, está claro que no vamos a intentar todas las combinaciones posibles de niños y computadoras. No es que no se pueda, pero sería una tarea tediosa e innecesaria. ¿Qué otra idea podríamos utilizar? Acá es donde la/lo invito a pensar junto conmigo.

Tratemos de 'desafiar' lo que dijo el maestro. O sea, nuestro objetivo es distribuir los niños de manera tal que a lo sumo sean *cuatro* las computadoras que tengan tres o más niños alrededor de ella. ¿Por qué *cuatro*? Porque él dijo que no hay manera de distribuirlos sin que haya por lo menos *cinco* computadoras con tres niños o más.

Elijamos entonces cuatro computadoras cualesquiera y asignémosles cinco niños a cada una, ya que ése es el *máximo* número de estudiantes que puede tener cada una. Una vez hecho esto, habremos distribuido ya 20 niños de los 33 que teníamos originalmente.

Ahora bien: ¿qué hacer con las seis computadoras restantes? Alrededor de ellas querría que hubiera —*a lo sumo*— dos niños.

¿Por qué? Como quiero desafiar lo que dijo el maestro, no puedo permitir que haya más de cuatro con tres niños (o más). Por lo tanto, asigno dos niños por cada una de las *seis* computadoras que no utilicé hasta acá. Eso significa que resuelvo el problema de *doce estudiantes más*.

Como usted advierte, por un lado asigné 20 estudiantes a cuatro computadoras, y después 12 niños a las seis que restaban. En total, suman 32 alumnos (ver Figura 1).

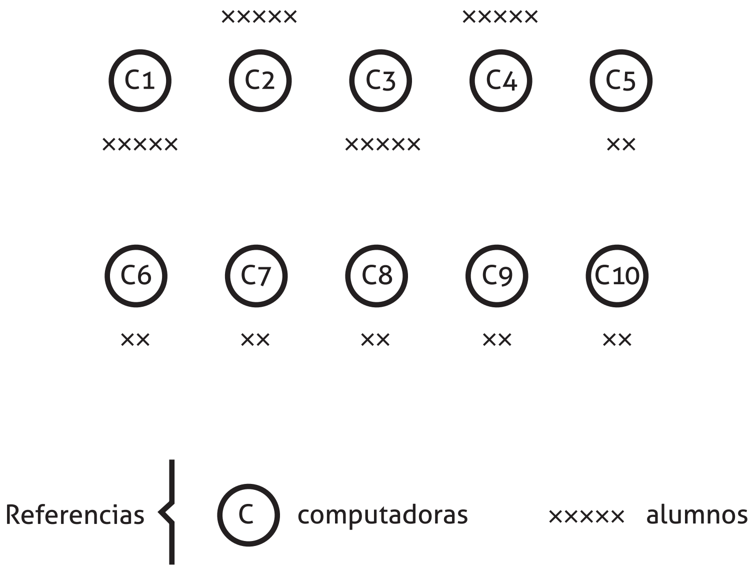


Figura 1

¿Entonces? Bueno, es que estamos ante un problema, porque todavía ¡nos queda un niño sin asignar! (le recuerdo que eran 33). Y no hay ningún lugar disponible sin *romper* las reglas. Si agrego un niño más a las primeras cuatro computadoras, habría seis en una de ellas, lo que violaría el tope máximo de cinco. Si agrego un niño más alrededor de alguna de las seis pantallas restantes, entonces esa computadora pasaría a tener *tres* estudiantes asignados y, por lo tanto, sumaría una computadora más con tres niños (o más).

Resumen: con 33 niños y 10 computadoras, y con una restricción de cinco estudiantes por aparato, no es posible distribuirlos sin que en cinco de ellas haya tres alumnos o más. El maestro tenía/tiene razón.

Me gustaría sacar una conclusión más. La matemática permitió que uno no tuviera que escribir *todas* las distribuciones y combinaciones posibles, sino que un análisis como el que figura anteriormente nos ahorró el *sufrimiento*. Por supuesto, este caso es muy sencillo ya que el número de niños y de computadoras es manejable y, por lo tanto, se podría haber encarado *manualmente*, pero ¿se imagina lo que sería tener que distribuir las computadoras en todas las escuelas de un país tratando de respetar ciertas restricciones?

Como escribí antes, lo ideal es tener una computadora por niño y, hasta donde sé, ese objetivo está en camino de cumplirse. Creo que vale la pena celebrarlo.

Pinasco y el Sistema Dinámico Repulsor

Julio de 2014. Primera reunión para discutir los programas de *Alterados por Pi* que vamos a grabar en octubre. Se van a emitir recién en la temporada 2015, por lo cual parece increíble preparar todo con tanta anticipación. Sin embargo, es lo que venimos haciendo desde hace ya ocho años.

María Marta (García Scarano), la productora general, *sufre* porque no importa cuándo empecemos, para ella *siempre* será muy tarde. Juan Pablo (Pinasco)[18] es quien se ocupa de proveer la primera tanda de *contenidos*. Me los mandaron hace un par de días y ahora vamos a revisarlos y a evaluar grados de dificultad e interés. Los plantearemos en diferentes escuelas públicas de todo el país, encontrar el material adecuado es siempre un desafío para todos.

Juan Pablo trajo veinticinco problemas para empezar. De ellos, hay *uno* que me pareció *espectacular*. Ni bien lo leí pensé: "Éste es un problema precioso para hacer no sólo en *Alterados por Pi*, sino también para publicar en *Página 12* y por supuesto, en alguno de los libros de divulgación de matemática que vienen

18. Doctor en Matemática y profesor del departamento de Matemática de la Facultad de Ciencias Exactas y Naturales de la UBA, uno de los mejores especialistas argentinos en 'Teoría de Juegos'.

saliendo todos los años y que publica esta editorial, Penguin Random House".

Si logro que se involucre con el problema, verá qué interesante es no sólo por la dificultad en sí misma, sino porque requiere utilizar herramientas que uno posee y ni siquiera lo sabe. Sígame por acá.

Suponga que uno tiene un tablero cuadriculado, como si fuera de ajedrez. Puede ser de 8×8 o de 10×10. Más aún: ni siquiera hace falta que sea cuadrado. Podría ser rectangular y no importa el número de casillas que tenga. Es decir, el tamaño del tablero no será un factor que determine nada. Dicho esto, imagine que en cada casilla hay una flecha. Esa flecha puede apuntar hacia arriba o hacia abajo, a la derecha o a la izquierda de manera tal que haya cuatro posiciones iniciales posibles. Lo que *sí* interesa es saber que *todas* las casillas tienen una flecha asignada. La idea será hacer un *recorrido imaginario por el tablero siguiendo las direcciones de esas flechas*.

Pero me falta escribir las reglas. Lo que usted tiene que hacer es:

a) Elegir una casilla cualquiera del tablero desde donde va a empezar.
b) Obedecer la dirección hacia la que apunta la flecha y dirigirse hacia la casilla contigua.
c) Una vez que llegó a la casilla siguiente, deberá *mover* la flecha de la casilla de la que partió *y rotarla 90 grados en la dirección de las agujas del reloj*. Es decir, si estaba apuntando hacia abajo, ahora usted la *rota para que apunte hacia la izquierda*. Si estaba apuntando hacia la izquierda, la *rota para que apunte hacia arriba*. Si estaba apuntando hacia arriba, la *rota para que apunte hacia la derecha* y por último, si estaba apuntando hacia la derecha, *la rota para*

que apunte hacia abajo. Por lo tanto, *cada vez que usted abandonó una casilla*, la flecha cambiará de orientación en 90 grados, como si usted estuviera *apretando un tornillo o usando una llave para cerrar una cerradura, por ejemplo*.

d) Por último, si la casilla en la que usted está ubicado es una de las del borde y la flecha está justamente apuntando hacia afuera, entonces usted *sale del tablero* y se termina el trayecto.

Ahora viene lo mejor. El problema consiste en lo siguiente: elija *usted* la orientación de las flechas como quiera. Es decir, distribuya las flechas como se sienta cómodo. También elija la casilla desde la que quiere empezar.

Lo extraordinario es que, independientemente de las orientaciones de las flechas y del punto de partida, le aseguro que usted va a terminar *saliendo del tablero… inexorablemente*.

Raro, ¿no? Parecería que uno va a poder elegir orientaciones de las flechas de manera tal de poder permanecer adentro y no salir nunca, como si estuviera dando vueltas y vueltas. Sin embargo, *eso no es posible*. Le sugiero que lo piense porque el problema es precioso y la solución que yo conozco también es maravillosa.

Solución

Ésta es una idea que sirve para encontrar la solución. Supongamos que no, que lo que yo afirmé antes es falso. Es decir, supongamos que usted encontró una forma de orientar las flechas y un lugar en donde empezar de manera tal que, por más que sigamos dando pasos y más pasos, uno siempre se queda *dentro* del tablero. Yo quiero convencerla/lo de que eso no es posible. ¿Por qué?

El tablero tiene un número finito de casillas. Cuando usted empieza a recorrer su camino, si *nunca saliera* del tablero, tendría que repetir casillas por las que ya pasó. Debe haber *por lo menos una casilla por la que usted tiene que pasar 'infinitas veces'*.

Suponga que llamamos **A** a un casillero por el que usted pasa una y otra vez reiteradamente. Como hay que cambiarle la orientación a la flecha de **A** cada vez que usted sale de ella, usted empezará a pasar también —indefinidamente— por las cuatro casillas que son vecinas de **A**. Y por supuesto, en esas cuatro casillas *también* tendrá que cambiarles la orientación a las flechas.

Por lo tanto, en su camino, pasará '*infinitamente*' por **A**, pero también *infinitamente* por las cuatro casillas vecinas de **A** y, por la misma razón, atravesará *infinitamente* las casillas que son vecinas de las vecinas a **A**. Y así siguiendo.

Con esta idea usted detecta que llegará un momento en el que llegará hasta alguna casilla que está en el borde.

Pero ahora, la diferencia está en que si uno pasara *infinitamente* por una casilla que está en el borde, a lo sumo en la cuarta *pasada*, la flecha apuntará hacia *afuera*. Ni bien eso suceda, usted sale del tablero y listo. Allí se terminó todo.

¿Por qué me gustó tanto este problema? Si usted piensa bien, advertirá que sería imposible imaginar *todos los posibles tableros de todas las posibles dimensiones con todas las posibles distribuciones de flechas y todas las posiciones iniciales*. Ese conjunto *es* infinito. ¿Cómo hacer para convencerse de que no hay ningún camino que nos mantenga dentro del tablero? Puesto en estos términos, el problema parece inabordable.

Sin embargo, uno termina hilvanando estas ideas:

a) si uno pudiera elaborar un camino que no saliera nunca del tablero, entonces tendría que haber casillas por las que pasa infinitamente;
b) como cada vez que pasa por ellas cambia la orientación de las flechas, inexorablemente se va acercando al borde;
c) una vez que uno *descubre* que tendría que pasar infinitamente por una casilla que está en el borde, a lo sumo a la cuarta *pasada*, la flecha tendrá que apuntar hacia afuera: allí sale del tablero y *se terminó el problema*.

Aunque no parezca, una vez más, esto es *hacer* matemática… y además, *buena matemática*.

No se me escapa que elaborar una estrategia para salir de un tablero es totalmente irrelevante, pero lo que *es **no*** menor, es aprender a pensar problemas de este tipo. Muchas veces las variantes y variables involucradas son infinitas o técnicamente *inabordables*, pero una adecuada *demostración por 'el absurdo'*[19] es una herramienta perfecta que resuelve la cuestión.

---

19. Muchas veces, cuando uno tiene que demostrar la validez de una *implicación* suele apelar a demostrar la afirmación '*contra-recíproca*'. Son las que se conocen comúnmente con el nombre de 'demostraciones *por el absurdo*'. Son muy comunes en matemática y créame que sería muy deseable que formaran parte del arsenal *lógico* con el que una persona enfrenta su vida cotidiana.

Para comparar números grandes

Suponga que usted tiene *un millón* de dólares, y que decide *gastar mil dólares* por día. ¿En cuánto tiempo se queda sin dinero?

Por otro lado, si en lugar de tener *un millón* tuviera *mil millones* y gastara, otra vez, *mil dólares* por día, ¿en cuánto tiempo se quedaría ahora sin dinero?

Piénselo y haga una estimación sin necesidad de hacer las cuentas.

Solución

Un año tiene 365 días, entonces en 3 años hay 1.095 días. Como usted está gastando 1.000 dólares por día,

$$(1.095) \times (1.000) = 1.095.000$$

o sea, en aproximadamente 3 años usted se queda sin dinero.

En cambio, pensemos ahora cuántos años necesita para quedarse sin dinero gastando mil dólares por día si usted tiene *mil millones de dólares.*

Si uno gasta mil dólares por día y divide 1.000.000.000 por

1.000, obtiene un millón de días. Es decir, gastando de a mil por día, consumiría todo el dinero en *1.000.000* de días.

Ahora bien: ¿cuántos son *un millón* de días? Hay que dividir 1.000.000 por 365.

La/lo invito a que haga la cuenta: 2.740. Es decir, gastando 1.000 dólares por día, tardaría 2.740 años en consumir todo el dinero.

Otra manera (más fácil) de pensar este problema: una vez que uno descubrió que necesita un poco menos de 3 años para gastar el dinero si tuviera un millón de dólares, si tuviera 1.000 veces más (ya que mil millones es mil veces más que un millón) entonces debería tardar mil veces más en gastarlo. Y mil veces más que 3 años, es casi 3.000 años. El número más cercano fue el que encontramos: 2.740 años.

En cualquier caso, creo que estas cuentas sirven para entender la diferencia que hay entre *un millón* y *mil millones*.

La paradoja de Simpson

La que sigue es una historia sobre el *mal* uso de la matemática. Una aventura peligrosa que terminó en un juicio por discriminación de género que —en rigor— cualquier matemático podría haber detectado y evitado, si es que hubiera formado parte del estudio jurídico que asesoró a la joven que se sintió damnificada.

Con todo, creo que vale la pena contarlo porque es un ejemplo de algo que sucede mucho más frecuentemente de lo que uno advierte. Acá va.

Sucedió hace un poco más de 40 años, para ser más precisos, en 1973, en la Universidad de California, Berkeley, una de las más importantes del mundo y, sobre todo, la que alberga a uno de los *departamentos de matemática* más importantes del planeta.

Muchísimos argentinos han estudiado allí, se han graduado y doctorado en Berkeley. Y muchísimos también han enseñado y han dejado (y dejan) huellas muy profundas. Pero sobre ese tema escribiré en otro momento. Quiero volver a la historia que derivó en el juicio.

Una joven estudiante intentó ingresar en la universidad, pero no pudo hacerlo. Es decir, no pudo superar lo que aquí sería equivalente a un *examen de ingreso*. Ella, seguramente asesorada por un grupo de abogados, creyó interpretar que en Berkeley, en ese momento, había una práctica —sutil por cierto— para discriminar hombres y mujeres, algo así como una segregación por género.

Como creían tener pruebas suficientes, iniciaron un juicio que conmovió no sólo a la universidad propiamente dicha, sino a toda la comunidad local. No lo escribí aún, pero Berkeley es un barrio que queda a unos 20 kilómetros al noreste de San Francisco, en California. Si hubiera sucedido en un estado en donde un caso de estas características podría ser más esperable (piense en Mississippi, Alabama o incluso Texas), quizás habría tenido un impacto distinto, pero… ¿en San Francisco?

Lo que sigue entonces es una breve descripción del error que se cometió o que cometieron los abogados que representaron a la joven. Los datos parecían mostrar que personas del sexo masculino eran aceptados para ingresar en un porcentaje mayor que las mujeres o, en todo caso, en un porcentaje mayor que el simple azar.

Voy a modificar los datos originales para hacer los cálculos más sencillos, pero nada va a cambiar en términos conceptuales. Le pido que me siga porque —como escribí antes— es un problema que aparece con mucha más frecuencia de la que uno cree, tanto que el error de interpretación que genera recibe un nombre: '*La paradoja de Simpson*'.

En general, una universidad está conformada por distintas facultades donde se estudian diferentes disciplinas. Piense usted en el ejemplo que le resulte más cómodo o más familiar. Para citar un caso, la Universidad de Buenos Aires alberga, entre otras, a las facultades de Ciencias Exactas, Medicina, Arquitectura, Ingeniería, Farmacia y Bioquímica, etc.

Para hacer las cuentas más fáciles, voy a suponer que en Berkeley había nada más que dos facultades: medicina y kinesiología, y voy a suponer que ese año se presentaron a rendir los exámenes de admisión 2.200 personas divididas por mitades: 1.100 de cada sexo.

Luego de las pruebas pertinentes, ingresaron en total, 930 hombres y 390 mujeres.

Si uno mira estos datos, la conclusión inmediata que saca es la siguiente:

930/1.100 = 84,54% ingresantes hombres
versus
390/1.100 = 35,45% ingresantes mujeres

Ante estos números no parece haber mucho para discutir: salvo que haya algún argumento desconocido, demuestra ser un caso *evidente de discriminación por sexo o favoritismo por género*. Más aún: cuando uno revisa años anteriores, este caso se repetía en forma sistemática.

Es por eso que con estos datos, los letrados de la joven creyeron que tenían motivos suficientes para iniciar el juicio. Y lo hicieron. Ahora, acompáñeme a revisar con un poco más de cuidado los detalles que faltan.

Investiguemos primero la distribución por facultad. Es decir, qué proporción de hombres y de mujeres se inscribió tanto en Medicina como en Kinesiología.

Una observación: no deje que los números la/lo confundan. Elegí a propósito números fáciles para poder seguir el ejemplo. En definitiva, no se trata de revisar el juicio que está saldado hace 41 años, sino de entender en dónde está la paradoja. Sigo.

De las 1.100 mujeres aspirantes en total, 1.000 aplicaron en Medicina y solamente 100 se anotaron en Kinesiología.

La proporción se revirtió en el caso de los hombres: de los 1.100

aspirantes-hombres que se presentaron en la universidad, 1.000 se inscribieron en Kinesiología y solamente 100 en Medicina.

O sea, exactamente al revés que las mujeres.

Ahora veamos si hubo discriminación por facultad. Es decir, supongo que no se le escapa que —en general— los exámenes de ingreso a la facultad de Medicina son más *difíciles* que los de Kinesiología, o bien las vacantes que tiene cada una son ciertamente distintas. De una u otra forma, como el examen fue el mismo en cada facultad (para hombres y mujeres) es razonable investigar cómo les fue a cada grupo.

En el caso de Medicina: de las 1.000 mujeres que se presentaron ingresaron 300. O sea, el 30%.

Curiosamente, lo mismo sucedió con los hombres, sólo que se presentaron muchos menos. Sobre 100 hombres que rindieron, aprobaron 30. Es decir, se *mantuvo* el mismo porcentaje entre hombres y mujeres: ingresó el 30%.

Ahora exploremos lo que pasó en Kinesiología: se presentaron 100 mujeres a rendir el examen y aprobaron 90, es decir el 90%.

Por otro lado, se presentaron muchísimos más hombres: 1.000, y lo interesantísimo es que aprobaron 900, o sea, *también el* 90%.

¿Qué conclusión podemos sacar hasta acá?

En cada facultad, el número de hombres y de mujeres que se presentaron a rendir el examen fueron muy diferentes, pero *¡el porcentaje que superó la prueba fue el mismo en cada caso: 30% en Medicina —independientemente del sexo— y 90% en Kinesiología, también independientemente del sexo!*

Evidentemente el sexo no tuvo ninguna relevancia. Sin embargo, cuando uno mira los totales, sobre una muestra de 1.100 hombres y el mismo número de mujeres, ¡ingresaron 930 hombres y 390 mujeres!

Justamente *en eso consiste la paradoja*. En realidad, no hubo ninguna discriminación. Sólo que al agruparlos por sexo y no por facultad, aparece una inconsistencia que no existe[20].

Fíjese en esta tabla que resume todo:

Porcentaje de ingreso a Kinesiología	**Porcentaje de ingreso a Medicina**	**Totales**
Hombres	900/1.000 = 90%	30/100 = 30% 930/1.100 = 84,54% (*)
Mujeres	90/100 = 90%	300/1.000 = 30% 390/1.100 = 35,45%

Estos números son muy claros ahora. Al mirar la última columna solamente, pareciera que hay un evidente sesgo en favor de los hombres, pero al hacer la discriminación por facultad, se advierte que la 'tal' discriminación no existe.

¿Cómo se explica esta 'aparente' paradoja? Al haber una diferencia *tan grande* entre los postulantes hombres y mujeres por facultad, eso termina distorsionando la *muestra total*.

Cuando uno está en el colegio, 'sufre' al sumar fracciones. La tentación es sumar los numeradores entre sí, y lo mismo con los denominadores. Por ejemplo, sería mucho más fácil si

$$2/3 + 5/8 = 7/11$$

¡Pero eso no es cierto! No se pueden sumar los numeradores y los denominadores así como están[21].

En el caso que nos ocupa, si usted mira el cuadro que figura en (*), podría creer que:

---

20. En realidad, lo que uno puede deducir de todo esto es que no hay ninguna razón para pensar que se discriminó por sexo en estos exámenes…

21. Dicho en términos generales, NO ES CIERTO que $(a/b) + (c/d) = (a + c)/(b + d)$. En rigor, $2/3 + 5/8 = 31/24$, pero ésa es otra historia.

$$(30/100) + (900/1.000) = 930/1.100 \qquad (1)$$

y

$$(300/1.000) + (90/100) = 390/1.100 \qquad (2)$$

¡PERO NINGUNA DE LAS DOS IGUALDADES ES CIERTA!

De hecho, los números que figuran en (1) (sobre el sector izquierdo) son los mismos que en (2), sólo que aparecen 'disimulados'. Es que (30/100) = (300/1.000) y (900/1.000) = (90/100). Si se pudieran sumar fracciones simplemente sumando los numeradores por un lado y los denominadores por el otro, quizá no habría paradoja y sí discriminación. Pero para qué ocuparse de algo que es falso… ¿no?

El tema es que el juicio *cayó* ni bien fue presentado y el prestigio de la Universidad de Berkeley queda intacto. Eso sí, terminó siendo un bochorno.

Reflexión final

Así como propuse hace un tiempo la incorporación de matemáticos en hospitales (o centros de salud) en donde se investiga la incidencia del uso de ciertas drogas y el análisis estadístico requiere de especialistas en el área, ¿no habrá llegado el momento de incorporar matemáticos a los estudios jurídicos? ¿O ya es de práctica común y a mí se me escapa? Ciertamente no consultaron a ninguno en el estudio de letrados que asesoró a la joven estudiante, en el famoso caso de segregación por sexo que nunca existió.

Los dos mejores

Suponga que usted tiene una lista de 32 números enteros distintos, todos mayores que cero. Su objetivo es tratar de encontrar los dos más grandes. ¿Cómo hacer?

En principio, lo que uno haría es ir comparándolos de a dos. Es decir, para empezar, usted elige un par cualquiera. Los compara y se queda con el mayor. Por ahora, el menor queda eliminado. Digo 'por ahora', porque este que quedó 'afuera' podría ser el 'segundo' que usted podría estar buscando. Por eso cuando uno hizo la comparación inicial, se queda con el más grande pero al mismo tiempo debería 'guardar' en alguna parte al otro ya que puede necesitarlo otra vez. Sigo.

De los 32 números usted ya comparó dos: se quedó con uno y eliminó al otro. Ahora, de los 30 restantes, elige otro número más y lo compara con el más grande que había resultado de antes. Si el nuevo número es mayor que el que tenía, se queda con este nuevo. Si no, sigue conservando el que ya tenía.

Hasta acá usted hizo dos comparaciones que le sirvieron para seleccionar un número entre tres. Con la misma idea, seguiría eligiendo entre los restantes, los compara con el más grande que tiene hasta que al final, luego de 31 comparaciones, habrá encontrado el más grande de todos.

En todo esto que escribí, creo que no hay nada nuevo. Todo resulta muy sencillo y es una tarea ciertamente rutinaria y, encima, aburrida. Sin embargo, verá que se pone interesante en unas pocas líneas más.

Si uno quiere avanzar y encontrar el *segundo* más grande, tendrá que repetir el procedimiento anterior, pero ahora con 31 números en lugar de los 32 originales. Esto no sería nada nuevo, solo que si uno hubiera sabido que después habría de buscar *el mayor de los 31 que quedaron en el camino*, no hubiera descartado parte de la información que al principio no fue relevante pero que ahora podría ser muy útil.

Es decir, hasta acá, para encontrar los dos números más grandes, tendría que usar (32 + 31 = 63) comparaciones. ¿Habrá alguna forma de *mejorar* esto?

Usted me preguntaría (si pudiera hablarme) o se preguntará: ¿Para qué habría de mejorar este número de comparaciones? No son tantas y la diferencia en todo caso, si se pudiera conseguir, sería algo tan menor que pareciera no tener sentido. ¿Para qué dedicar un esfuerzo 'extra' a algo que —parece— tan irrelevante?

Acá es donde necesito invitarla/lo a hacer una reflexión. Por supuesto, cuando uno trabaja con números tan pequeños, las diferencias van a ser minúsculas. Sin embargo, el problema podría adquirir otra dimensión si yo pudiera exhibir *otro tipo de ejemplos* más significativos y de mayor importancia.

En principio, una computadora se pasa 'ordenando' no sólo números sino también palabras en forma creciente o decreciente o siguiendo el orden del alfabeto. Buenos casos son, por ejemplo, ordenar todos los DNI de un país u ordenar alfabéticamente los libros de una biblioteca de un millón de ejemplares o, en su propia computadora, ordenar sus archivos por fecha o por el título que usted les puso. En definitiva, se trata de *ordenar*. ¿Cómo hacerlo de la manera más *efectiva*?

Si uno puede *mejorar* el algoritmo de comparaciones, para aprovechar al máximo los datos que fue consiguiendo en el proceso, el *tiempo* (ya que de esto se trata) que usa la máquina es muchísimo menor, haciendo más expeditivo el proceso y más rápido el acceso a la información. O sea, aunque en principio los casos pequeños parecieran no ser significativos, ni bien uno 'sale a la vida real', cualquier ahorro que uno pueda producir, tiene consecuencias muy valiosas.

Antes de volver al ejemplo de los 32 números, le propongo que piense en un torneo de tenis, de los miles que hay por año en todo el mundo. Suponga que se inscribieron 128 participantes como en Roland-Garros o Wimbledon o el abierto de Australia o Estados Unidos. Muchas veces uno escucha hablar o lee sobre los 'cabezas de serie'. ¿Por qué pasa esto? Es que los organizadores le asignan a cada jugador un número como si de antemano se supiera cuál va a ser el orden en el que terminarán después del torneo. De esa forma, se separan en dos grandes grupos (de 64 tenistas en este caso). ¿Para qué? Para evitar que se enfrenten el mejor y el segundo mejor en una ronda inicial, quitándole todo incentivo al torneo. En realidad, están tratando de *compensar* un problema que podría suceder: que los mejores jugadores queden eliminados en rondas iniciales. Sin embargo, ¿quién dice que el que salió segundo es el segundo mejor del torneo? ¿Habría alguna otra forma de determinarlo? En realidad, la respuesta es que sí, y para eso, voy a utilizar el ejemplo con el que empecé este artículo: elegir los dos números más grandes entre un grupo de 32. Ya verá cómo este ejemplo sirve para todo lo que estuve escribiendo.

Para empezar, divida los 32 números en dos grupos de 16. Al distribuirlos de esta forma, uno se quedará con el más grande de cada par. Pero si bien nos quedamos con los dieciséis más grandes (y acá viene la primera *gran* diferencia entre lo que uno hace habitualmente y lo que le propongo que vea conmigo acá), guardamos en alguna parte a quién le 'ganó' cada uno. Por ejemplo, supongamos que uno tiene estos números:

{7,15, 31, 180, 212, 5, 47, 57, 112, 17, 3, 9, 11, 104, 214, 17, 98, 73, 101, 5, 33, 191, 35, 14, 18, 103, 114, 117, 170, 19, 193, 1}

y los apareamos así:

(7,15) (31, 180) (212, 5) (47, 57), (112, 17) (3, 9) (11, 104) (214, 17) (98, 73) (101, 5) (33,191) (35, 14) (18, 103) (114, 117) (170, 19) (193, 1)

Voy a escribir a los 'ganadores' por un lado, y a un costado voy a 'guardar' los números que quedaron superados en primera instancia pero recordando quién fue el que les ganó. Por ejemplo, entre el 7 y el 15 (que es el primer par que figura), el 15 va a ser el ganador, pero yo quiero guardar el *siete* y también almacenar en ese 'recuerdo' que fue el 15 el que le ganó.

En ese caso voy a poner primero al que 'ganó' y segundo, separado, al que 'perdió'. Éstos son los resultados:

(15… 7)
(180… 31)

(212… 5)
(57… 47)

(112… 17)
(9… 3)

(104… 11)
(214… 17)

(98… 73)
(101… 5)

(191… 33)
(35… 14)

(103… 18)
(117… 114)

(170… 19)
(193… 1)

Ahora, voy a 'aparear' a los ganadores de los pares y, como siempre, *voy a guardar la información* sobre los que quedaron 'eliminados' en el camino. Por ejemplo, cuando se 'enfrenten' el 15 y el 180 (que son los dos primeros ganadores en la lista anterior), el 180 le va a ganar al 15, pero voy a guardar la información de la trayectoria del 180, que ya le ganó al 31 y ahora también al 15. Los eliminados, ahora sí, quedan afuera. Éste es el resultado después de esta etapa:

180… (31, 15)
212… (5, 57)

112… (17, 9)
214… (17, 104)

101… (5, 98)
191… (33, 35)

117… (114, 103)
193… (1, 170)

Como se ve, ahora quedaron ocho ganadores, cada uno con su ‘historia’, o sea, los que ‘perdieron’ en el camino con ellos. Por ejemplo, el 214 le ganó en el primer paso al 17 y después al 104, y por eso aparecen en la ‘historia’ del 214. Sigamos un paso más.

212… (5, 57, 180)
214… (17, 104, 112)

191… (33, 35, 101)
193… (1, 170, 117)

Ya falta poco. En el próximo paso se obtiene:

214… (17, 104, 112, 212)
193… (1, 170, 117, 191)

Y en la ‘final’, quedan el 214 y el 193. En este caso, el resultado final va a ser:

214… (17, 104, 112, 212, 193)

Fíjese lo que sucedió: el 214 ‘ganó’ el torneo o el ‘honor’ de ser el número más grande. Sin embargo, en la ‘final’ le ganó al 193. Ahora si usted se fija bien, el 193 ¡no es el segundo número más grande entre los que participaron! Ese número es el 212. Lo interesante es que si usted mira la 'historia' de los que 'perdieron' con el 214, *aparece el 212*. Y eso es lo que yo quiero, porque si el objetivo es encontrar al *segundo mayor*, lo que uno podría hacer es '*comparar entre ellos a los números que perdieron con el 214*'.

Ahora sí, voy a necesitar hacer cuatro comparaciones y voy a descubrir al 212, que era el 'verdadero' segundo número y no el 193 como había resultado antes.

Pregunta: ¿siempre va a quedar el segundo entre los que perdieron con el ganador? ¡Sí! ¿Por qué? Es que la única forma en la que pudo haber perdido el segundo número más grande es si lo hice 'enfrentar' con el más grande de todos. Si el segundo fuera apareado con cualquier otro, ganaría el segundo. Luego, ***inexorablemente*** el segundo estará en la 'historia' o mejor dicho, entre los que perdieron con el primero, haya sido en la primera vuelta, en la cuarta o en cualquier otra, pero *seguro* que va a aparecer. Al hacer ahora cuatro comparaciones más, llegamos a descubrir al *segundo número*.

¿Qué ganamos con esto? Una vez descubierto al ganador, el 214, si uno no tuviera en cuenta lo que fue pasando al hacer las comparaciones, habría que empezar todo de nuevo, ahora con 31 números en lugar de 32. Y para eso, necesitaría hacer 30 comparaciones. Sin embargo, con el método que estoy proponiendo, en lugar de 30, resolvemos el problema con *nada más que cuatro*.

Para tener idea de cómo empieza el 'ahorro' cuando los números son más grandes, piénselo así: si en lugar de 32 hubiera un millón de números, para elegir el mayor no hay más remedio que hacer 999.999 comparaciones, pero para el segundo, en lugar de 999.998, bastan ¡dieciocho más![22]

---

22. En general, si uno tiene *n* números, el algoritmo necesita del orden de (n + log(n)) operaciones.

Es decir, la *tremenda potencia* de lo que uno gana es imposible de describir en pocas líneas; aunque usted advierte que el número de operaciones necesarias decrece fuertemente y, por ende, el tiempo requerido, también.

Una observación más: en el ejemplo del tenis (o de cualquier otro tipo de torneo en donde se busca al campeón pero también cuál es el 'segundo mejor'), el método de los cabezas de serie 'corrige en parte' el problema. Con todo, bien podría pasar que el campeón hubiera derrotado en alguna ronda preliminar a un jugador que hubiera merecido estar en la final (en el caso de los números que puse antes, el campeón termina derrotando al 193 que queda como segundo mejor, cuando en realidad, ese lugar le debió haber correspondido —como vimos— al 212). ¿Qué hacer entonces?

Cuando termina el torneo, los jugadores que perdieron con el campeón deberían jugar entre ellos para saber bien quién fue el verdadero subcampeón. Naturalmente, la pregunta será: ¿y a quién le importa? No sé, no sé a quién podría importarle pero en todo caso si el objetivo es elegir a los dos mejores, el método que se utiliza actualmente no lo consigue, o mejor dicho, depende de que los que establecen las 'cabezas de serie' y los ordenamientos previos, logren hacerlo sin cometer errores. El método que está descripto en este capítulo lo garantiza.

Dos problemas más de sombreros… ¡qué sé yo cuántos van!

PARTE 1

El que sigue es un problema más… sobre sombreros… raro, ¿no? ¿Qué sé yo cuántos van ya? No importa: siempre son muy sugerentes y muy útiles para pensar estrategias. Acá va.

Tres personas entran en una habitación y, sin que puedan ver el color del sombrero que les pondrán en la cabeza, les tocará 'al azar' uno de los dos posibles colores: B o N (blanco o negro).

Una vez que los tres ya se situaron en la habitación, cada uno puede mirar los sombreros de los otros dos. No pueden conversar entre ellos, no pueden hacerse señas ni pasarse mensajes de ningún tipo.

En esa misma habitación hay una cuarta persona que les va a hacer una pregunta: ¿qué color de sombrero tiene cada uno? Los tres *tienen* que contestar simultáneamente o, si usted prefiere, los tres tienen que escribir en un papel el color de sombrero que —creen— que tienen.

Cualquier estrategia que hubieran decidido usar para ayudarse deberían haberla pactado antes. A partir del momento en el que recibieron el sombrero, ya no podrán hablar más. Pueden contestar obviamente o bien B o bien N. Si sienten que prefieren ‘pasar’ porque no están seguros, pueden hacerlo. El ‘equipo’ (que conforman los tres) *gana* si por lo menos uno de ellos responde correctamente y ninguno lo hace en forma incorrecta. ¿Qué estrategia usar?

De entrada, parece que una buena estrategia podría ser ésta: dos de los tres ‘pasan’ y el tercero elige al azar. Como la probabilidad de tener blanco o negro es ½, o un 50%, entonces, haber optado por este camino les ‘garantiza’ esa probabilidad: ½.

Dicho esto, ¿habrá alguna forma de mejorar este esquema? Por supuesto, si los tres decidieran ‘adivinar’, cada uno de ellos tendría ½ de posibilidades de acertar. Cuando uno repite este proceso para las tres personas involucradas, las probabilidades se multiplican. En este caso será:

$$\tfrac{1}{2} \times \tfrac{1}{2} \times \tfrac{1}{2} = 1/8$$

lo cual muestra que es efectivamente una estrategia *peor* que la que se tiene si dos pasan y uno solo intenta acertar.

¿Se podrá mejorar la estrategia que ofrecía un 50%? Lo que puedo hacer es afirmar que aunque no lo parezca, *sí*… existe una forma de *mejorar* ese 50%, pero me gustaría dejarla/lo en soledad para que lo piense usted. Vale la pena dedicarle un rato porque en principio da la sensación que no es posible… y sin embargo, ¡se puede!

Estrategia

Escribamos juntos las ocho distribuciones de sombreros, en donde —por ejemplo— BNB significa que la primera persona tiene sombrero blanco, la segunda negro y la tercera, blanco otra vez. Éstas son todas las posibilidades:

BBB
BBN
BNB
BNN
NBB
NBN
NNB
NNN

Fíjese en lo siguiente. De estas ocho alternativas hay solamente *dos* en donde los tres participantes tienen el mismo color de sombrero: BBB o NNN. En los seis restantes, hay dos de un color y uno del otro. ¿Qué se podría hacer entonces?

Una idea: entran los tres en la habitación. Si cualquiera de ellos ve *dos sombreros del mismo color* (*no importa si blanco o negro*) dice el *color contrario al que ve*. En el caso en que alguno observara dos sombreros de *diferente color*, pasa. ¿Qué posibilidades tienen de *ganar* con esta estrategia? (Le sugiero que piense usted por su cuenta antes de leer lo que sigue.)

Las únicas dos formas en las que perderían, serían si los tres tienen el mismo color de sombrero. En ese caso, todos ellos verían dos sombreros del mismo color y, por lo tanto, elegirían el color contrario… ¡y perderían! En realidad, los tres se equivocarían.

Pero en *cualquier otra situación de las seis que quedan, si siguen con esta estrategia*, *¡ganarían siempre!*

¿Por qué? Por ejemplo, si la distribución es BBN, entonces, el primero que tiene B no dice nada porque ve dos sombreros de diferente color. Lo mismo le sucede al segundo, que ve que el primero tiene B y el tercero N. Luego, el segundo *tampoco* dice nada y *pasa*. El único que va a hablar es el tercero. ¿Y qué dice? El último dice (o escribe): "Yo tengo Negro".

Es que como esta persona ve que las otras dos tienen sombreros del mismo color (en este caso B), diría lo contrario… ¡y ganarían!

Corrobórelo usted pero verá que en *seis* de los *ocho* casos posibles, la estrategia es ganadora. En consecuencia, como seis sobre ocho es lo mismo que tres sobre cuatro, la *probabilidad* de acertar es de ¾, o sea un 75% de posibilidades de que el equipo que la implemente 'acierte' o 'gane'.

Lo notable es que originalmente parecía que no era posible mejorar el 50%. El algoritmo propuesto anteriormente (que ciertamente no me pertenece) demuestra que sí, que era posible mejorar. No sólo eso: derivó en un 75% de posibilidades de éxito. Interesante, ¿no?

PARTE 2

El problema que sigue es una adaptación del anterior que me propuso Juan Sabia. Lo iba a agregar como una *nota al pie*, pero me pareció tan interesante que creo merece un lugar aquí.

Fíjese qué interesante: haciendo un pequeño cambio en las hipótesis, la respuesta resulta ser muy diferente. Lo que Juan me sugirió es pensar la siguiente variante: si en lugar de que contesten todos simultáneamente o que cada uno tenga que escribir en un papel el color de sombrero que *cree* que tiene, ¿qué pasaría si la cuarta persona hace las preguntas de a uno por vez, y los otros dos pueden *escuchar* las respuestas que dan sus compañeros? Como siempre, le propongo que piense usted qué estrategia se le ocurre.

Sigo yo.

Si el primero ve que los otros dos tienen sombreros *negros*, elige un color cualquiera al azar y lo dice. Los dos restantes, pasan.

En cambio, si el primero ve que sus compañeros **no tienen los dos sombreros negros**, pasa él.

En este caso, el segundo sabe que si el primero pasó, es porque *no vio* dos sombreros negros. Por lo tanto, él mira el del tercero. Si éste es de color negro, él *debe tener blanco y eso es lo que dice*. Por su parte, el tercero pasa. O sea, en esta situación, ganan porque el primero y el tercero pasan, pero el segundo dice correctamente su color de sombrero.

En cambio, si el segundo ve que el tercero tiene color blanco, no puede saber si él tiene negro o blanco y, por lo tanto, pasa.

Ahora llega el turno del tercero. Sabe que sus dos compañeros *pasaron* pero, claro, esto le aporta mucha información. En principio, sabe que si el primero pasó, es porque el segundo y él (el tercero) *no tienen los dos sombreros negros*. Por otro lado, como el segundo *también* pasó, esto significa que él *no puede tener un sombrero negro*. Si no, el segundo habría dicho blanco.

Luego, el tercero dice blanco y acierta.

Ahora bien: con esta estrategia, ¿en qué situación van a perder? Por el análisis que acabo de hacer, las únicas formas que tienen de perder ocurren si el primero de los que habla *no pasa*. Si el primero pasó, o bien el segundo o bien el tercero pueden determinar el color de su sombrero. Luego, para *perder*, tendrían que suceder una de estas dos cosas:

a) La distribución de sombreros es BNN. En este caso, el primero ve que el segundo y el tercero tienen sombreros negros, y él, intentando acertar, se equivoca y dice Negro.

b) La distribución de sombreros es NNN. En este caso, una vez más, el primero ve que el segundo y el tercero tienen sombreros negros. El primero quiere acertar y arriesga un color, pero se equivoca porque dice Blanco.

¿Cuál es la probabilidad de que esto suceda?

La probabilidad de que la distribución sea BNN es 1/8 y, por supuesto, de que el primero elija N es ½. Por lo tanto, la probabilidad de que ocurran ambos eventos es 1/8 × ½.

Por otro lado, la probabilidad de que la distribución sea NNN es también 1/8 y, una vez más, de que elija B es ½.

Luego, la probabilidad *total* es ((1/8) × (1/2)) + ((1/8) × (1/2)) = 1/8. O sea, la probabilidad de *perder* es 1/8.

Esto quiere decir que la probabilidad de ***ganar*** es 7/8 = 0,875, exactamente un 87,5%, que es ciertamente mayor que el 75% que resultaba antes.

Pero también es cierto que la respuesta es distinta, porque ¡el problema ahora es distinto!

Probar sin exhibir[23]

¿Qué título, no? Cierto, pero sígame por acá.

En el mundo digital/virtual las cuestiones que involucran temas de seguridad se transformaron en aspectos relevantes de nuestra vida cotidiana. Operaciones bancarias, compras por internet, tarjetas de crédito o de débito, contraseñas, cajeros automáticos, correos electrónicos, transacciones de compra y venta… en todo caso, agregue lo que le parezca pertinente. No va a ser la primera vez que usted reflexione sobre la posibilidad de que alguien *le robe* la identidad y se haga pasar por usted. El *anonimato* que ofrece este mundo hubiera sido impensable muy poco tiempo atrás. ¿Cómo hacer para saber que quien nos *habla* o nos *escribe* es quien dice ser? ¿Cómo hacer para ratificar que quien está por recibir dinero de nuestra cuenta bancaria es el destinatario que nosotros querríamos? ¿Cómo protegerse? ¿Cómo *probar* que somos quienes decimos ser y cómo *verificar* que otra u otro es verdaderamente quien creemos que es?

Acá aparece la *criptografía*, la ciencia dedicada a estudiar las técnicas que permiten establecer comunicaciones seguras entre

23. El nombre del artículo es una traducción libre mía. En inglés se conoce como “Zero Knowledge Proof”.

dos ‘entidades’/personas/instituciones. La pregunta obvia es: ¿seguras ante quién? Es que si no hubiera terceros involucrados, no tendría sentido modificar nada de la información: uno podría leerla en voz alta o enviar una carta con un sobre abierto (o sin sobre) directamente. En algún lugar, *cerrar* un sobre con el que se hace un envío es la forma ‘antigua’ mediante la cual se enviaban ‘átomos’/paquetes/mensajes en papel o mercadería. El cheque reemplaza en ese sentido al dinero en efectivo; aunque en un mundo ideal, de Walt Disney, en donde no existe la ‘maldad’ o el ‘crimen’, uno hubiera podido enviar dinero en efectivo usando el correo común y, en todo caso, el sobre se habría utilizado sólo para que el dinero no se desparramara. Sin embargo, ni uno manda dinero en efectivo ni sobres abiertos. De la misma forma, las comunicaciones virtuales requieren de otro tipo de ‘sobres’ y ‘firmas’ que garanticen que uno es quien dice ser. La criptografía es la ciencia que ofrece las técnicas y elementos para la protección de los que se comunican.

En general uno supone que el problema reside en que dos personas se quieren comunicar o intercambiar un mensaje y que hay una tercera que pretende interceptar la información. Y ahí parece terminar todo: protegerse frente al ‘atentado’ desde afuera. Pero también podría darse el caso en el que una de las dos personas afirma conocer o tener algo valioso y necesita convencer a la otra. Es decir, que la otra persona ‘le crea’ que lo tiene pero —y esto es importante— *sin necesidad de divulgarlo*. ¿Cómo hace uno para *probar* que *sabe* algo sin necesidad de exhibirlo y *cómo hace el otro para creerle*?

Me apuro a poner un ejemplo, pero quiero hacerle una observación: es posible que todo esto parezca entre *infantil* y *elemental*. Créame que no lo es. Acá voy.

Suponga que hay dos amigos, que a los efectos prácticos voy a llamar Ana y José[24], que se encuentran a tomar un café. José sigue soltero y Ana tiene muchas amigas. Ana sabe que hay en particular *una* amiga de ella que siente un atractivo particular por José, pero su personalidad le impediría hacérselo saber. Ana, respetuosa de su amiga, no quiere *filtrar* la información porque le parece improcedente.

Curiosamente José también siente una particular atracción por *una* de las amigas de Ana, pero no quiere elaborar sobre el tema porque siente que no necesita de intermediarios para dirigir su atención.

Lo que transforma la historia en interesante, es que tanto Ana como José conocen la misma información: es decir, Ana sabe que hay una amiga de ella que gusta de José y sabe que José gusta de una amiga de ella.

Pero hasta allí llegan ambos. ¿Qué hacer?

José no tendría problemas en juntarse con la amiga de Ana si lograra saber que ella es justo la persona que a él le gusta. Y Ana no tendría problemas en divulgar el nombre de su amiga, si ella lograra saber que José siente atracción justamente por esa particular amiga de Ana.

¿Hay alguna forma de *intercambiar* la información sin que ninguno de los dos haya tenido que divulgar algo que no debía? Puesto de otra forma, si la amiga de Ana en cuestión fuera la misma persona en ambos casos, ninguno de los dos tendría dificultades en avanzar. El problema es que si *no fuera así*, ambos se

24. En la literatura convencional aparecen dos letras para identificar a cada parte: P y V. La elección no es casual ya que P es quien quiere *probar* que sabe algo sin exhibirlo explícitamente mientras que V es quien quiere *verificar* que lo que dice P es cierto. De hecho, hay un interjuego entre uno que quiere *probar* y otro que necesita *verificar*.

sentirían incómodos y preferirían que la situación se mantuviera como está hasta ahí.

Todo este preámbulo fue para sugerirle que piense qué camino tomaría usted. ¿Qué hacer para *saber si es posible cooperar* con ambos sin que en el camino quede expuesta información que debería mantenerse privada?

La que sigue es una potencial forma de encarar el problema. Vea qué le parece a usted. Claramente no hay *una única forma* de resolverlo; ésta será en todo caso *una* de ellas.

Uno podría hacer lo siguiente. Tomemos diez amigas de Ana. Podrían ser más, pero en cualquier caso, elijamos una buena cantidad como para 'diluir' más la potencial información.

Consiga diez vasos iguales. En cada vaso ponga una etiqueta con el nombre de cada una de las amigas de Ana que hemos elegido.

Una vez hecho esto, José prepara diez 'papelitos', todos iguales. En nueve de ellos anota el número ***cero***. En el único distinto, pone un número ***uno***.

Por su parte Ana hace lo mismo: prepara diez papelitos, todos con el número ***cero***, salvo uno que llevará al número ***uno***.

Una vez que ambos están listos, José coloca todos los papelitos con el número cero en los vasos que llevan los nombres de las amigas de Ana que a él no le interesan. Como usted conjetura correctamente, José coloca el papel con el número *uno* en el vaso que contiene el nombre de la amiga que le gusta.

A su vez Ana hace lo mismo: pone los papelitos con el número *cero* en los vasos con los nombres de sus amigas que no reflejan ningún interés en José (según lo que ella está enterada). Solamente ubicará el papelito con el número *uno* dentro del vaso con el nombre de la amiga de ella que gusta de José.

De esta forma resulta que cuando los dos terminaron de ubicar sus respectivos papeles, en algún vaso tienen que estar los números *uno*. ¿Estarán en el mismo?

Hasta acá, todo perfecto. ¿Y después? ¿Cómo seguir?

Bien, lo que uno puede hacer es lo siguiente: *retira todas las etiquetas*. Ahora ya no hay más nombres involucrados. Cada vaso sigue teniendo dos papeles pero ahora ya no se sabe a qué amiga de Ana correspondían. Los intercambiamos de posición para evitar que ninguno de ellos pueda 'rastrear' los nombres y/o los vasos. De esa forma, se evita que quede ningún 'residuo' de la información que había originalmente. Y acá llega el final: tanto José como Ana van recorriendo los distintos vasos. Si en algún momento aparece uno de ellos que contiene dos papelitos con el número uno, eso quiere decir que existe la coincidencia que ambos buscaban: la amiga de Ana que gusta de José es la misma que le gusta a José.

En cambio, si no hay ningún vaso que contenga los dos papelitos con el número uno, todo sigue como antes. José no tuvo que divulgar cuál amiga de Ana le gusta y Ana no tuvo que decirle a José qué amiga de ella gusta de él.

Esta situación, que parece totalmente *infantil*, no lo es tanto cuando uno entiende que esto puede tener suma utilidad en situaciones un poco más interesantes.

Acompáñeme con la siguiente adaptación. Ana y José intercambiaban con este método nombres de personas que podrían sentirse atraídas mutuamente sin divulgar información. Ahora, suponga que Ana sabe que hay una acción en la bolsa argentina que va a subir fuertemente en una semana. Es información confidencial que ella posee y que no quiere comentar. Por su parte, José le dice que él tiene una información equivalente, pero lo que no sabe es si el nombre de la acción que tiene él es el mismo que el de Ana. ¿Cómo hacer para compararlos sin que ninguno de los dos tenga que develarle al otro algo que no supiera de antemano? Si fuera cierto que los dos tienen el mismo nombre podrían aliarse y hacer una compra mayor y, por lo tanto, una mayor diferencia económica.

Una propuesta es que hagan lo mismo que planteé en el caso anterior, sólo que en lugar de poner nombres de mujeres en las etiquetas, lo que pueden hacer es pegar el nombre de diez o veinte acciones en los vasos. Después, cada uno de ellos coloca un papel con el número *uno* solamente en el vaso que contiene el nombre de la acción que creen que va subir y, en el resto, ponen todos números 'cero'. A partir de acá alcanza con repetir el proceso anterior.

Si luego de haber retirado los nombres y haber mezclado convenientemente, hay algún vaso en donde aparecen los dos números 'uno' (el que escribió Ana y el que escribió José), eso quiere decir que ambos tienen la misma información. Si no, no hay problema: nadie divulgó nada que no quisiera y los dos salieron de la reunión sin haber aprendido nada que no supieran antes.

Obviamente, la lista de ejemplos podría ampliarse tanto como uno quisiera. El único límite es la creatividad.

No quiero terminar sin proponer otro ejemplo de los considerados 'clásicos' y que sirve —una vez más— para plantear el problema de la *prueba* con 'conocimiento cero' o 'sin exhibir o divulgar'.

Suponga que hay dos amigos discutiendo sobre 'daltonismo'. Uno de ellos (A) le dice al otro (B) que sospecha que él es daltónico. Ante la negativa de B a aceptarlo, A decide —por ejemplo— conseguir dos bolas de billar de dos colores diferentes (digamos roja y verde, que suelen ser dos colores que habitualmente presentan mayores dificultades para ser diferenciados entre las personas que sufren de este problema). Ambas bolas son totalmente indistinguibles si no fuera por el color.

¿Cómo hacer entonces? Lo que quiere A es 'convencer' a B de que tiene un problema y, al mismo tiempo, *no quiere que B* sepa cuál bola es de color roja y cuál de color verde.

Entonces le propone la siguiente estrategia: A le entrega a B las dos bolas y le pregunta si puede distinguirlas. B dice que no. A sostiene que *son diferentes*, sólo que B no se da cuenta. Para convencerlo de que es así, A le pide a B que tome cada una con una mano diferente y ponga ambas manos atrás, en su espalda. De esa forma ahora A perdió de vista a las dos bolas.

Ahora A le dice a B: "Si querés, cambiá las bolas de mano sin que yo te vea. Yo te voy a decir si lo hiciste… ¡o no!".

Si las dos bolas fueran del mismo color y no hubiera nada que las distinguiera, entonces la probabilidad de que A acierte sería ½. Pero en este caso no se trata de 'acertar' ni de 'probabilidad' sino de 'certeza': A está convencido de que puede determinar *en el 100% de los casos* si B intercambió las bolas o no. Si solamente se basaran en la probabilidad de que esto sucediera, sería ½ si lo hicieran *una vez*, pero si repitieran el proceso (por ejemplo) *diez veces*, la probabilidad de acertar sería (aproximadamente) *uno en mil*. Y si lo hicieran *veinte veces*, esa sería aún mucho más pequeña: *una en un millón*.

Como A es capaz de determinar si B *cambió* de mano o no ¡en todas las oportunidades!, eso permite suponer que B ahora se *tiene* que haber convencido. Pero lo importante, además, es que A no necesitó *descubrir ante B* cuál es el color de ninguna de las bolas.

Este ejemplo parece elemental, pero la *criptografía* está repleta de situaciones que requieren de matemática profunda y a la vez preciosa, especialmente la que proviene de la 'Teoría de

Números'. Estoy seguro de que los expertos en el tema tendrán muchas cosas para agregar/corregir/señalar, pero los legos, los que estamos de 'este lado del mostrador', nos contentamos con entender un poco más de qué se trata.

La pizza como prueba

Cuando uno ve un mago, cuando uno lo ve operar, tiene varias alternativas: o bien trata de descifrar cómo hace lo que hace (y en general, fracasa en el intento) o bien se deja engañar y acepta en forma racional que algún truco tiene que haber, pero no quiere invertir tiempo en tratar de descifrarlo. Estoy casi seguro de que se sienten más cómodas las personas que optan por la segunda alternativa, aunque más no sea porque uno se frustra menos. Pero es indiscutible que '*la magia seduce*'.

Lo interesante es que la matemática también, pero sólo que es un poco (o *mucho*) más invisible y no tan aparente. Hay momentos en los que nuestro sentido común apunta para un lado y la realidad —ayudada por la matemática— para otro. Son los momentos en donde la intuición no funciona. De todas formas, como todo músculo, cuando uno lo entrena, se hace cada vez más fuerte, más potente… y también más útil.

Quiero contar un ejemplo que siempre me fascinó. Contiene algunos elementos que no son usuales en nuestra vida cotidiana, pero estoy convencidísimo de que va a disfrutarlo y le permitirá agregar algunas herramientas (que a lo mejor ya tiene) a su arsenal intelectual. Ciertamente, no es poco.

Para graficar lo que quiero hacer voy a suponer que tenemos una pizza en forma de un cuadrado. Sí, ya sé: las pizzas no tienen esta forma habitualmente, pero concédame esa licencia. Ya verá que —al final— es algo de poca importancia.

Tengo entonces una pizza 'cuadrada' como se ve en la Figura 1. Voy a tratar de alimentar a varias personas, así que supongamos que la pizza tiene un metro de lado. Es decir, su superficie es ¡un metro cuadrado! Igualmente, como escribí antes, todos estos números terminarán siendo irrelevantes.

Eso sí: para fijar las ideas, todas las longitudes que aparezcan en este texto estarán expresadas en metros y las superficies en metros cuadrados.

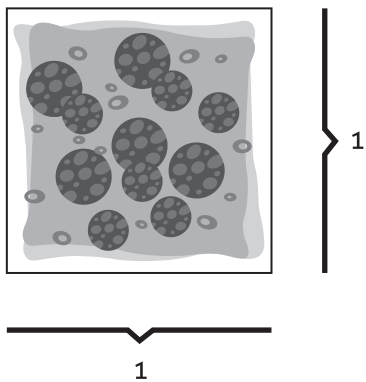


Figura 1

Sigo. Tomamos la pizza y la cortamos primero por la mitad y después, otra vez por la mitad en forma perpendicular, de manera tal que quede dividida en cuatro *cuadrados* iguales. La única diferencia es que ahora cada una de las porciones cuadradas tiene medio metro de longitud. ¿Me siguió? Fíjese en la Figura 2.

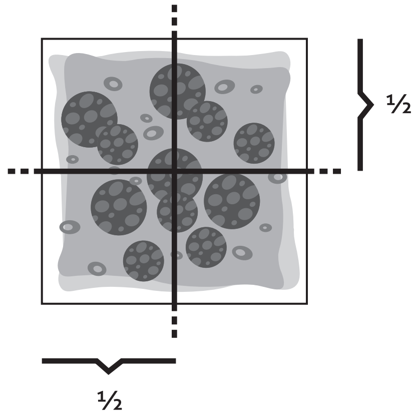


Figura 2

Ahora calculemos el área. Como cada pequeño cuadrado tiene ½ metro de lado, la superficie de cada porción es de ½ × ½ = ¼ (metros cuadrados).

Una pausa: no me abandone ahora que todavía falta lo mejor. En definitiva, todo lo que hice hasta acá fue cortar una pizza y calcular la superficie de cada porción.

De los cuatro cuadraditos que se forman, separe tres y póngalos en una columna como en la Figura 3. Como se ve, el cuadradito restante lo puse a un costado.

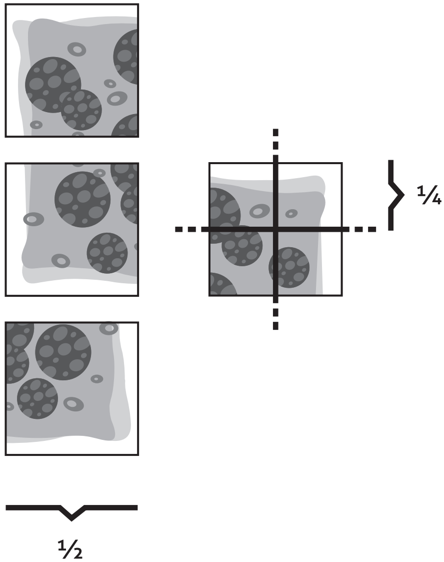


Figura 3

Ahora, justamente con este cuadradito que sobró, hago lo mismo que con la pizza original, es decir, con el cuadrado grande. Lo vuelvo a dividir en cuatro cuadraditos iguales. Claro, como ahora la porción tiene ½ metro de lado, al cortarlas por la mitad, cada lado del nuevo cuadradito medirá la mitad, o sea ¼, como se ve en la Figura 4.

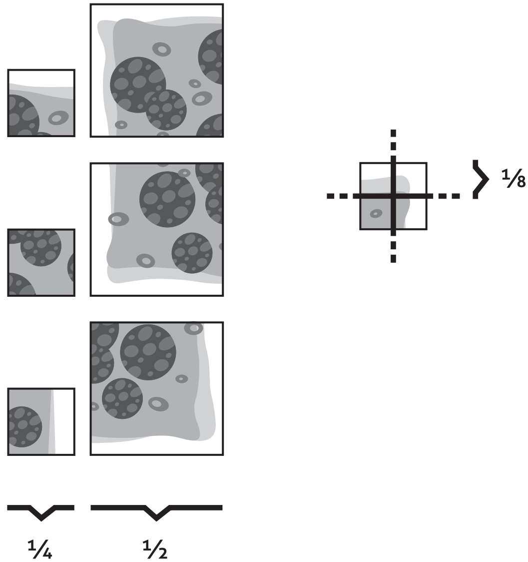


Figura 4

Ya que está mirando la Figura 4, fíjese que lo que hice fue tomar cada uno de esos cuadraditos de ¼ de lado y lo puse al lado de uno de los cuadrados originales (que tenían ½ de lado). Quedaron, como se ve, tres filas iguales. Cada una de ellas tiene una de las porciones originales (la de *un medio* de lado), otra *un cuarto* de lado y todavía me queda un cuadradito sin cortar, que lo puse a un costado. Acépteme la sugerencia y revise las figuras que acompañan el texto para convencerse de que estamos los dos hablando de lo mismo.

La idea ahora es *replicar* lo que hice antes y repetir la operación una y otra vez con los cuadraditos que van sobrando. Es decir: voy dividiendo cada uno de ellos como hice con la pizza original y, de esta forma, voy consiguiendo cuadraditos cada vez más chicos, pero que tienen la particularidad de que la longitud de cada lado es siempre la mitad del anterior.

Por otro lado, voy formando tres filas iguales. Cada una de ellas va teniendo un representante de cada una de las porciones que voy generando. La primera porción es un cuadrado que tiene medio metro de lado; la segunda mide la mitad, o sea ¼; la tercera, la mitad de la anterior, o sea 1/8; después 1/16, 1/32… y así sucesivamente. Para convencerse, siga el ejemplo en las figuras 5 y 6.

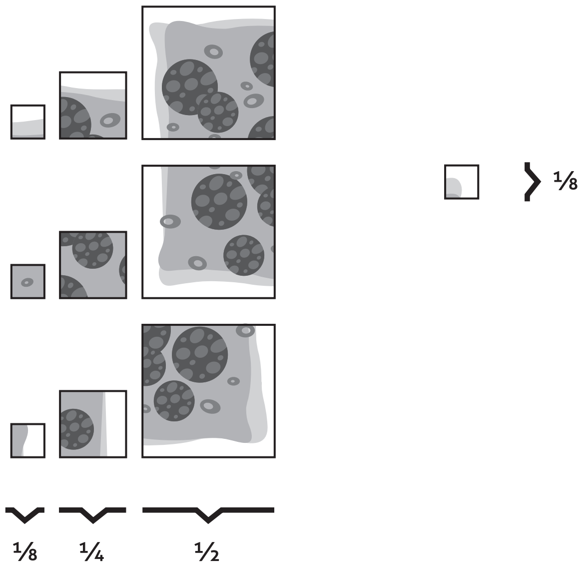


Figura 5

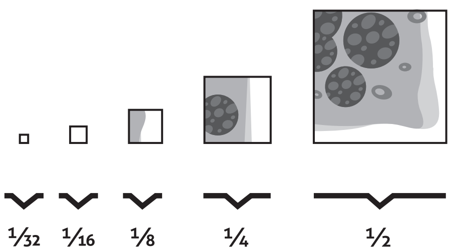


Figura 6

Ahora, acépteme la audacia de imaginarnos cortando la pizza *ad infinitum*… o sea, en forma indefinida, e ir construyendo las tres filas de la forma que expliqué anteriormente.

Quiero hacer un par de observaciones:

a) Es importante que usted se convenza de que quedan formadas tres filas iguales. Cada fila contiene un representante (o porción) de las que conseguí al ir cortando la pizza en forma sucesiva. El primer cuadradito tiene ½ metro de lado, el segundo ¼, el tercero 1/8, el cuarto 1/16, el quinto 1/32, y así infinitamente[25].
b) Ahora concentrémonos en las áreas o *superficies* de los cuadraditos que aparecen en cada fila. Piense usted cómo hacer para calcularlas. El primer cuadradito tiene como área ¼ (ya que cada lado mide ½). El área del segundo es 1/16, ya que este cuadrado tiene lado ¼. Si sigo en forma infinita, las áreas que aparecen van a ser: ¼, 1/16, 1/64, 1/256, 1/1024, 1/4096… O podríamos escribirlo así: $(1/4)$, $(1/4)^2$, $(1/4)^3$, $(1/4)^4$, $(1/4)^5$, $(1/4)^6$, $(1/4)^7$… Como usted advierte, aparecen las *potencias sucesivas del número (1/4)*.

No me abandone ahora porque estamos a punto de terminar.

Quiero hacerle la *pregunta clave*: ¿qué pasaría si yo sumara las áreas de todas las filas? ¿Cuánto dará?

Recuerde que la pizza original tenía una superficie de un metro cuadrado, ¿de acuerdo? Como lo único que hice fue cortar la pizza

25. Uno podría pensar que, como voy cortando por la mitad la longitud de cada cuadrado, las porciones van teniendo como lados: $(1/2)$, $(1/2)^2$, $(1/2)^3$, $(1/2)^4$, $(1/2)^5$, $(1/2)^6$, $(1/2)^7$…, o sea, las potencias sucesivas del número (1/2).

y distribuirla en tres filas iguales, la *suma* de todas las áreas tiene que seguir dando lo mismo, o sea, ¡tiene que seguir dando ***uno***!

Ahora le propongo que calculemos el área de otra forma. Las tres filas que construimos son iguales, por lo que las áreas también lo son. Consecuentemente, como sabemos que *la suma total de las áreas tiene que dar* **uno**, cada una de las filas debe sumar la tercera parte, o sea 1/3. ¿Está de acuerdo conmigo? No avance si no me cree.

Sigo. Es que si uno tiene dividida una superficie en tres partes iguales, y la suma da *uno*, entonces cada parte tiene que medir 1/3.

Ahora, el final a toda orquesta. Por un lado, sumemos las áreas de cada fila, teniendo en cuenta lo que sabemos que mide el área de cada cuadradito. Es decir:

$$(1/4) + (1/4)^2 + (1/4)^3 + (1/4)^4 + (1/4)^5 + (1/4)^6 + (1/4)^7\ldots$$

Por otro lado, también sabemos que la superficie de pizza que hay en cada fila es 1/3 de metro cuadrado.

Esta igualdad puedo escribirla así:

$$\boxed{\begin{array}{c}¼ + 1/16 + 1/64 + 1/256 + 1/1024\ldots = (1/4) + (1/4)^2 + (1/4)^3 \\ + (1/4)^4 + (1/4)^5 + (1/4)^6 + (1/4)^7\ldots = 1/3.\end{array}}$$

Quiero escribirlo de nuevo para enfatizar: hemos descubierto que —si uno acepta que puede *sumar infinitamente*—, la suma de las áreas de todos los cuadraditos que aparecen en cada fila es exactamente igual a ***un tercio***. Dicho de otra forma: si uno hace la suma de las potencias sucesivas del número (1/4), se obtiene… ¡1/3! ¿No es notable?[26]

---

26. Éste es un caso particular de algo mucho más general que tiene que

Muchas veces, las fórmulas impiden entender lo que está sucediendo por detrás, algo así como que el árbol tapa al bosque. Es por eso que el ejemplo de la pizza es muy útil no sólo para testear la intuición sino para imaginar lo que uno no ve. Y de paso, como suele suceder, cada vez que aparecen los *infinitos involucrados*, uno siente que entra en una suerte de *dimensión desconocida*, en donde todas las 'verdades' aparecen puestas en duda. ¿No es fascinante?

---

ver con lo que se llama 'suma de una serie geométrica'. En cualquier libro de cálculo diferencial es posible encontrar (y demostrar) que la suma de una serie geométrica de 'razón *q*' es igual a (1/(1-q)). En el caso que nos ocupa, la *razón* es ¼. Para que el resultado tenga validez, el número *q* tiene que ser mayor que (-1) y menor que 1. Hay que *omitir* al primer término de la suma para que el resultado no sea 4/3, pero ésas son cuestiones técnicas que en este contexto resultan irrelevantes.

Historia para un detective

Las historias que requieren de un detective suelen ser siempre muy intrigantes y atractivas. Esto sucede tan a menudo en nuestra vida cotidiana, que las películas o series llevan un nombre: 'policiales'. Es decir, muchísima gente ha mirado o mira series de televisión en donde la idea es tratar de descubrir 'al asesino' o su equivalente. Se trata en todo caso de juntar los 'datos' que son esparcidos por los guionistas a lo largo de la película para ver si uno tiene la capacidad de relacionarlos, combinarlos e inferir quién fue.

Por supuesto, hay buenas y malas películas, de eso no tengo dudas. Pero no me refiero sólo a las actuaciones de actores y actrices, sino a las tramas subyacentes. No voy a ser yo quien le advierta de la multiplicidad de *trampas* que pululan, de manera tal que cuando uno cree que tiene todo lo que le hace falta para deducir 'quién fue', súbitamente aparece algo escondido, algo no sabido, o algo totalmente retorcido. Pero aun cuando eso no suceda, aun contando con la buena fe de quien escribió los textos, muchas veces pasa que uno descubre que 'a mí esto no se me hubiera ocurrido nunca' porque hay algo 'que no pega'. En fin, me estoy extendiendo demasiado, se me ocurre que a esta altura usted comprendió de qué estoy hablando.

Pero *sí* quiero relacionar esto con un *policial* de la matemática. Muchas veces se trata de *inferir* qué sucede o qué sucedió sin que los datos sean *directos*. La idea es tratar de conectarlos, combinarlos, imaginar diferentes escenarios, elaborar alguna estrategia y fijarse si el producto final es lo que uno estaba buscando. Claro, una cosa es un 'policial' en el cine o en televisión y otra —aparentemente bien distinta— es un problema de matemática.

Lo que quiero hacer es proponerle entonces un *dilema* para dilucidar. Yo hago el planteo y usted busca descubrir quiénes son los 'asesinos'. En el camino, voy a tratar de mostrarle cómo se puede introducir lo que se llama 'grafo' (o una suerte de dibujo) para hacerle la vida más fácil, pero me estoy apurando. Avancemos con el problema y después hablamos de la solución o de la forma de pensarlo. Acá va.

Suponga que la policía detiene a seis personas. *Sabe* que dos de ellos fueron los autores de un robo. Las voy a llamar A, B, C, D, E y F. La presión va en aumento y comienza el interrogatorio en forma separada. Es decir, cada uno de ellos contesta en una habitación diferente sin que los otros sepan qué está confesando (o no).

Uno de los seis se niega a declarar. No le importa la pena que le den: no quiere 'delatar' a nadie. Los otros cinco *sí* contestan. Cada uno de los cinco restantes entrega dos nombres (o dos letras) que, se supone, incriminan a sus otros compañeros. De todas formas, los policías saben que:

a) Uno solo de ellos (de los cinco que contestan) da dos nombres falsos. Es decir, nombra dos compañeros que no fueron los autores.
b) Los otros cuatro también dan dos nombres, pero con la particularidad de que cada uno da un dato verdadero y otro falso.

Éstas fueron las respuestas, sin indicar quién las fue dando ni tampoco quién fue el que dio dos nombres falsos:

1) AB
2) AD
3) AE
4) CD
5) CF

Sólo para ratificar que usted entiende el planteo, fíjese que cuando digo que uno de ellos contestó AE, significa que él está acusando a A y a E. Lo mismo con los otros.

Dicho esto, ¿se anima a *deducir* quiénes fueron los autores del robo? Lo que yo puedo hacer desde acá es decirle que sí, que se puede descubrir, pero hace falta hilvanar algunos razonamientos. Esta parte entonces se la dejo a usted. Yo sigo a continuación con algunas reflexiones.

Idea para pensar cómo resolver el dilema

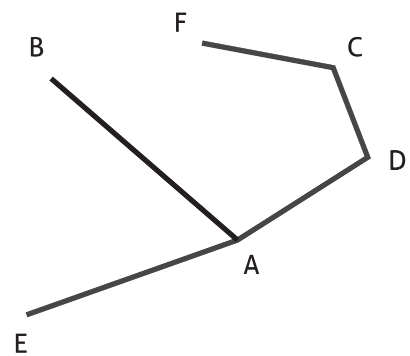


Figura 1

¿Qué es este dibujo? Lo único que hice fue escribir los 'nombres' (las letras) de cada uno de los presentes. Los segmentos que los unen son los que corresponden sus respuestas. Es decir, como uno de ellos contestó AB, entonces *tiene* que haber un segmento que los una (y lo 'hay'). De la misma forma, *cada* respuesta se corresponde con una línea que une a esas dos personas.

Dicho esto, ahora avancemos para ver si somos capaces de 'descubrir' quiénes fueron los dos autores del robo basados en las respuestas que dieron. Recuerde que uno de ellos indicó dos nombres que no eran, y los cuatro restantes dijeron uno que estaba bien y otro que estaba mal.

Quiero empezar por A, ya que A es el único de los seis que está tan conectado (con tres 'compañeros'), para ver qué se puede deducir.

Supongamos que A **no fue**. ¿Qué se puede inferir? Como A está ligado con B, D y E y sabemos que los autores fueron dos, esto significa que *uno* de estos tres (B, D o E) tampoco fue. Es que no pueden haber sido los tres porque autores hubo nada más que dos. Entonces, tiene que haber *por lo menos uno* de estos tres que no fue.

Fíjese en la Figura 1. Mire los tres segmentos que *salen* desde A. Uno de ellos une a *dos* que no fueron. Por otro lado, también en la Figura 1 se ve el segmento CF que *tampoco fue*. ¿Por qué? Porque los dos autores *tienen* que estar entre B, D y E. Esto es una contradicción: habríamos encontrado *dos* segmentos que contienen dos personas de manera tal que *ninguno* fue. ¿De dónde provino este problema? De haber supuesto que A no había sido uno de los autores. En consecuencia, *hemos deducido que* **A** fue uno de los que cometió el robo.

Ahora nos falta descubrir al segundo. Como A es uno de ellos, se deduce que ni B, ni D ni E fueron autores. ¿Por qué? Al estar conectados con A (ya sabemos que *a lo sumo* en cada segmento hay *un solo autor*), B, D y E quedan excluidos.

Nos queda por explorar qué sucede con C y con F.

Y acá viene algo interesante (y me permito sugerirle que piense usted en soledad para ver si podemos concluir juntos lo que sucede).

Quiero proponerle que pensemos juntos si C fuera el otro autor. ¿Qué pasaría? Fíjese en *todos* los segmentos de la Figura 1. Como ya sabemos que A es uno de ellos, si C fuera el otro, entonces se deduciría que *todos* los segmentos tienen al menos un autor… ¡y eso no puede pasar! ¿Por qué? Porque de acuerdo con lo establecido originalmente, *debe* haber un par que no contenga a ninguno. Luego, si A y C fueran los dos autores, no habría manera de encontrar a *tal* par. Moraleja: la única alternativa que queda es que además de A, el otro autor sea F.

Y justamente eso es lo que pasa. Le sugiero que corrobore que todo funciona bien ahora. Si A y F son los autores, entonces los tres segmentos que unen a A con B, D y E lo tienen como único autor. El segmento CD es el único que no contiene a ninguno mientras que el último que falta considerar, el CF, incluye a F como uno de los responsables.

De esta forma, con el análisis exhaustivo de todos los posibles casos, llegamos al final. El dibujo que me/nos ayudó a representar o *modelar* la situación es lo que se llama *grafo*. La matemática tiene una *rama*, nada menos, que se dedica a estudiar los distintos grafos y se denomina (¿de qué otra forma si no?) *'Teoría de Grafos'*[27].

---

27. La 'Teoría de Grafos' es *una* herramienta posible para abordar este tipo de problemas. No quiero dejar la impresión de que es la única (ni mucho menos). Si no, se podría inferir que quien no sabe lo que es la 'tal' teoría, no puede resolver el problema, y eso está muy lejos de ser cierto.

Policial o no, detectives o no, aquello que suele fascinar a muchísimas personas (descubrir al asesino) también tiene un correlato en la matemática, sólo que por razones que van quedando atrás, ahora aparecen y emergen más y más. De hecho, es algo para celebrar.

Fútbol 5

Una de las situaciones que más se repite en los potreros o en 'los campitos' es la siguiente: se juntan un número cualquiera de jugadores y se trata de ver cómo seleccionar dos equipos de manera tal que no haya marcadas diferencias entre los integrantes de cada uno. De esa forma se presume que el partido saldrá 'parejo'. Hay varios métodos para elegir pero supongo que el más popular (al menos en la época en la que yo jugaba) es determinar de antemano (supongo que por consenso) a los dos mejores jugadores y *separarlos* para jueguen para en equipos distintos.

Luego se los nombra *capitanes* de cada equipo. Después, se ponen a una cierta distancia (arbitraria) y van dando pasos en forma alternada avanzando cada uno en la dirección del otro. El primero que llega a *pisar* la zapatilla/zapato/botín del otro, *elige* primero. A partir de allí, se van alternando: una vez cada uno. Se supone que de esta forma cada capitán tratará de ir eligiendo los mejores que van quedando entre los que no fueron seleccionados en el momento que les toque.

Lo que puedo recordar es que llegábamos, nos juntábamos, elegíamos a los que iban a 'pisar' y el resto nos sometíamos a la humillación que significaba no ser seleccionados hasta el final.

O incluso más: aparecía cada tanto la invitación o sugerencia: "¡Vos andá al arco!".

¡Qué época! Bueno, pero más allá de eso quiero plantear algo para pensar, relacionado con 'la pisada' de aquellos tiempos.

Suponga que hay once jugadores. Cada uno de ellos tiene asignado (de antemano) un cierto puntaje de acuerdo con cuán bien juega. Son todos números naturales (es decir, elegidos entre 1, 2, 3, 4, 5…). A lo sumo, podría ser que alguno de ellos tuviera el valor *cero*, pero no hay ni números negativos ni *fracciones*.

Se trata de formar dos equipos de cinco jugadores. Por lo tanto, habrá siempre uno que se quedará afuera y será el árbitro. Ahora quiero plantearle una situación hipotética. Suponga que sucede lo siguiente:

> Se juntan los once jugadores en la cancha. Cuando se disponen a elegir, descubren una curiosidad que los sorprende: cada vez que uno excluye a un jugador cualquiera, los diez que quedan se pueden dividir *siempre* en dos equipos que sumen el mismo puntaje. Piense lo que acaba de leer: los chicos descubren que no importa a quién determinen como árbitro, los diez jugadores que vayan a participar se pueden dividir en dos grupos de cinco de tal manera que las sumas de los puntajes es la misma. El hecho de que suceda esto es muy bueno, porque permite siempre elegir dos equipos muy parejos.

Lo extraordinario de esta situación es que *la única manera de que eso suceda es que* ***¡todos los jugadores tengan el mismo puntaje!***

Piense si puede encontrar alguna forma de comprobar esto. Le toca a usted. Nos encontramos a continuación.

Una forma de pensar el problema

Le propongo un plan para tratar de demostrar que la única forma de que si cada vez que excluyo un jugador los diez restantes se pueden dividir en dos grupos de cinco que suman lo mismo, es si *todos los jugadores tienen el mismo puntaje*.

Sígame por acá. En primer lugar quiero que nos convenzamos de que si uno de los jugadores tiene un puntaje *par*, entonces los otros diez también. Y lo mismo con los impares: es decir, si algún jugador tiene puntaje *impar*, los diez restantes también. ¿Por qué?

Elija un jugador cualquiera, digamos A. Si yo excluyo a A, estoy eliminando los *puntos* que tiene asignados. Pero si sumo los puntajes de los diez que quedan, tiene que dar un número par, porque yo tengo que poder dividirlos en dos grupos de cinco que sumen lo mismo (y no puede haber decimales). Ahora si en lugar de sacar a A, yo excluyera a cualquier otro jugador, digamos B, entonces *también* tengo que poder dividir a los que quedan en dos grupos de cinco, lo que implica que *también* debe quedar un número par.

Es decir, saque a A o B, los restantes tienen que sumar un número par. ¿Qué quiere decir esto? Que si A es par, entonces B también, y si A es impar, B también. Por lo tanto, como A y B son cualesquiera, ***todos** los jugadores tienen puntajes pares o **todos** impares.*

Por otro lado, fíjese que si otra persona hubiera hecho las evaluaciones de los jugadores de otra forma y les hubiera quitado o entregado a todos una cantidad fija, la condición se sigue cumpliendo. ¿Qué condición?, preguntará usted. Bueno, la condición respecto a que si retiro a cualquiera de ellos, puedo seguir dividiendo a los diez que quedan en dos grupos de cinco que sumen la misma cantidad. ¿Y por qué sucede esto?

Fíjese en lo siguiente. Supongamos que excluyo a A. Quedan diez jugadores que puedo dividir en dos grupos de cinco que sumen lo mismo. Digamos que los divido en estos dos grupos de cinco:

Primer equipo: {B, C, D, E, F}
Segundo equipo: {G, H, I, J, K}

Por otro lado, sabemos que las sumas de los puntajes de cada equipo tienen que dar lo mismo. Es decir:

$$B + C + D + E + F = G + H + I + J + K$$

Luego, si le *quito a cada uno X puntos, se verifica*:

$$(B - X) + (C - X) + (D - X) + (E - X) + (F - X) = (G - X) + (H - X) + (I - X) + (J - X) + (K - X)$$
$$(B + C + D + E + F) - 5X = (G + H + I + J + K) - 5X$$

Y lo mismo sucedería si les hubiera *aumentado el puntaje a todos en la misma cantidad*. En lugar de terminar *restando* 5X, les *sumaría* 5X.

O sea, si alguien hiciera una evaluación diferente de los jugadores, pero sumándoles a todos o restándoles a todos el mismo número, la restricción se seguiría cumpliendo. Además, excluyendo a cualquiera de los jugadores y poniéndolo como árbitro, los diez que quedan se podrían dividir en dos grupos de cinco de manera tal que la suma de los puntajes de cada equipo resulte ser el mismo número.

Por último, una observación más. Si yo *dividiera* por dos a los puntajes que tienen todos los jugadores, la restricción seguiría siendo cierta. Es decir, si los puntajes de todos los jugadores se redujera a la mitad, si yo excluyera a cualquiera y lo pusiera como árbitro, podría seguir dividiendo a los otros diez en dos grupos de cinco de manera tal que los puntajes de los dos equipos sumen lo mismo (ya que antes de dividir por dos daban iguales y la división por dos no afecta la igualdad).

Dicho todo esto, ahora el paso final.

Tome a los once jugadores: entre los once *tiene* que haber uno (o más) que tenga el mínimo puntaje. Se los resto a todos. Como es el puntaje mínimo, *todos* los jugadores seguirán teniendo un puntaje que será *cero* en algún (o algunos) caso(s) pero ninguno dará negativo, en el peor de los casos dará cero. De todas formas, habrá por lo menos *uno* que pasará a tener **puntaje cero**.

Pero además, ahora *todos los jugadores quedarán con puntaje PAR*. ¿Por qué? Recuerde que comprobé anteriormente que *si uno de ellos tiene puntaje par entonces los diez restantes también (y lo mismo con los impares)*. Bueno, ahora *debe haber al menos uno con puntaje* CERO, y cero es un número par (revise este hecho para convencerse: $0 = 2 \times 0$, por lo que resulta *par*). Dicho esto, como hay uno de los jugadores que tiene puntaje cero —que es par—, entonces *todos* tienen puntaje par también.

Por último, si algunos jugadores tienen puntajes *no nulos* (o sea, diferentes de cero), empiezo a dividir por dos los puntajes de todos. Llegará un momento en que si había alguno que no era nulo al empezar este proceso, al dividirlos por dos una y otra vez, llegaremos a un punto en donde debería dar *un número impar*. Es que al dividir por *dos* les voy quitando todas las potencias de dos que tengan. Por ejemplo, si uno de los jugadores tenía puntaje 48, al dividirlo por dos sucesivamente voy a obtener: 48, 24, 12, 6, 3. Al llegar acá, le quité *todos* los factores *dos* que tenía. Es que $48 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3$. Al dividirlo cuatro veces por dos, *aparece el número* 3. ¡Y esto es una contradicción! ¿Por qué? Como uno de los jugadores tenía puntaje cero, al ir dividiéndolos a todos por dos, el que tenía cero seguirá teniendo cero. En el momento en que *uno* de ellos tenga puntaje impar, el que tenía cero seguirá teniendo cero, y habíamos dicho que si uno era par *todos* son pares.

Moraleja: no puede haber *ninguno* que termine en impar, y eso sucede porque no puede haber *ninguno* que sea diferente de cero. Y esto ocurrió porque, cuando resté el *mínimo* de uno de los jugadores, no quedó *ninguno* que no fuera cero (si no, al ir dividiéndolo por dos llegaría a un impar).

Si al haber restado el mínimo, *todos* quedaron con cero, *todos* tenían el mismo puntaje… ¡y eso es lo que quería demostrar! ¿No es bonito?[28]

---

28. Sobre este problema, Carlos D'Andrea me escribió: "¿Te diste cuenta de que si en lugar de 11 jugadores fueran 21 o cualquier número de la 'forma' (2n+1) se obtiene el mismo resultado? Más aún, se podrían admitir números negativos y nada cambiaría…".

Haga la siguiente cuenta: 259 * su edad * 39… ¿qué le da? (el ‘asterisco’ indica ‘producto’).

Por ejemplo, si usted tuviera 64 años, se obtendría

$$259 * 64 * 39 = 646464\ldots$$

¿Por qué? Estoy seguro de que a usted le dio SU edad… Eso pasó porque… ¿quiere pensar un instante?

Porque 259 * 39 = 10101

Por lo tanto, al multiplicar 259 * 39 * (su edad), lo que está pasando es que usted multiplica su edad por 10101, lo que permite que se ‘separen’ tres veces los dos dígitos que componen su edad.

Lo mismo que 13 * 11 *7 = 1001.

Tome cualquier numero de tres dígitos, digamos 123. Repítalo y póngalo al lado: 123123.

Ahora, divídalo por 7 (se obtiene 17.589). Al resultado, divídalo por 11. Se obtiene 1.599. Al resultado, divídalo por 13… y se obtiene 123. ¿Por qué? Justamente, porque 13 * 11 * 7 = 1001, y cuando usted agrega al final el numero de tres dígitos y luego lo va dividiendo, obtiene los resultados parciales hasta llegar nuevamente al número original con el que empezó.

Las dificultades con el azar

Hace unos días me hicieron una pregunta (que le voy a plantear a usted en un instante), pero me pidieron que contestara rápido, que no me tomara tiempo para pensar sino que respondiera en menos de un segundo, lo primero que se me ocurriera.

Yo le voy a pedir a usted lo mismo. Si puede, trate de contestar en voz alta. Sólo tendrá que decir un número. Eso sí, trate de contestar con honestidad para que la respuesta no pierda validez.

Ya verá que la idea es poder compararse uno (usted, yo) con el resto de los humanos y qué es lo que nos pasa cuando nos proponen este tipo de problemas.

Una cosa más: la pregunta será breve y la respuesta, muy fácil.

¿Está en condiciones de contestar ya? Acá voy:

> Elija ***al azar*** un número *cualquiera* entre 1 y 20.
> Al azar… cualquiera. El primero
> que se le ocurra… ¡Dígalo ya!

¿Qué número dijo? Recuérdelo porque voy a volver sobre él en un instante.

Ahora quiero contarle por qué hice la pregunta, su respuesta le permitirá compararse con otros. La idea es *exhibir* la dificultad que tenemos los humanos con el *azar*. Es decir, *dar una respuesta* ***al azar*** parece una trivialidad. En realidad, lo parece porque lo es. Sin embargo, las personas no nos llevamos bien con el azar. Nuestra percepción del *azar* no es buena.

Sígame por acá. Si yo le hubiera pedido que eligiera al azar entre dos números (digamos *uno* y *dos*), su respuesta debería ser equivalente a tirar una moneda y fijarse si salió 'cara' o 'ceca'. Cualquiera de los dos números (o cualquiera de los dos lados de la moneda) debería tener un 50% de posibilidades de 'salir'. En términos un poco más académicos[29], la probabilidad es ½.

De la misma forma, si yo le pidiera que eligiera ***al azar*** una letra cualquiera entre A, B o C, la probabilidad de que usted dijera cualquiera de las tres sería (1/3). Esto sucede porque hay tres casos posibles y *uno* solo para seleccionar.

Otro ejemplo: si yo le pidiera que eligiera en forma *aleatoria* un número cualquiera entre *uno* y *seis*, su respuesta debería sería equivalente al resultado de tirar un dado y fijarse cuál de las seis caras quedó arriba. Esa probabilidad es (1/6) ya que hay seis posibilidades y *uno solo* que va a salir. ¿Hacia dónde voy?

Quiero que nos convenzamos juntos de que cuando le pedí que usted eligiera —**al azar**— y después dijera en voz alta un número cualquiera entre 1 y 20, la probabilidad de que usted haya elegido uno de los veinte números debió ser (1/20). En términos de *porcentaje*, cada número debería tener un 5% de ser elegido.

29. Digo términos *más académicos*, porque la probabilidad de que un evento suceda se mide con números *reales* que van desde *cero* hasta *uno*. Si el evento es *imposible* que suceda, tiene probabilidad *cero*. Si es *seguro* que pase, entonces tiene probabilidad *uno*. En términos de porcentaje, es equivalente a que tenga *cero posibilidades de que ocurra* (si la probabilidad es cero) o un 100% de posibilidades que suceda (si tiene probabilidad *uno*).

Sin embargo, y aquí es donde todo se vuelve *mucho más interesante*, las respuestas de los humanos (nosotros) no refleja eso. La expectativa que deberíamos tener de que todos los números aparecieran con (1/20) de probabilidad, ¡no se cumple! Hay un número que aparece *muchísimas veces más… sorprendentemente más*.

El número que *solemos decir* con mayor frecuencia es… el *diecisiete*. Sí, el número 17. ¿Por qué será? ¿Usted *qué dijo*?

En febrero del año 2007, Dave Munger realizó en su blog sobre ciencia[30] algunos experimentos para ver si podía confirmar lo que sospechaba: que el 17 aparecía muchísimo más frecuentemente que cualquiera de los otros 19 números. Hizo la pregunta que yo le hice a usted al principio a 347 personas. Después repitió la experiencia con una computadora y allí los resultados que obtuvo estuvieron un poco más de acuerdo con *lo esperable*.

Fíjese en la Figura 1. Allí se puede ver la comparación entre lo que dijimos los humanos y lo que eligió la computadora. La 'gente' eligió el número 17 en casi ¡el 18% de los casos! Es decir, en lugar del 5%, apareció más del triple de lo que uno supondría.

Es interesante notar que *tampoco la computadora eligió los números con igual probabilidad*, pero no hubo una disparidad tan grande. El número 19 —que fue el que apareció más veces— llegó hasta el 8% que, si bien difiere del 5%, no es tan disparatado como saltar hasta el 18%.

30. http://scienceblogs.com/cognitivedaily/2007/02/05/is-17-the-most-random-number/

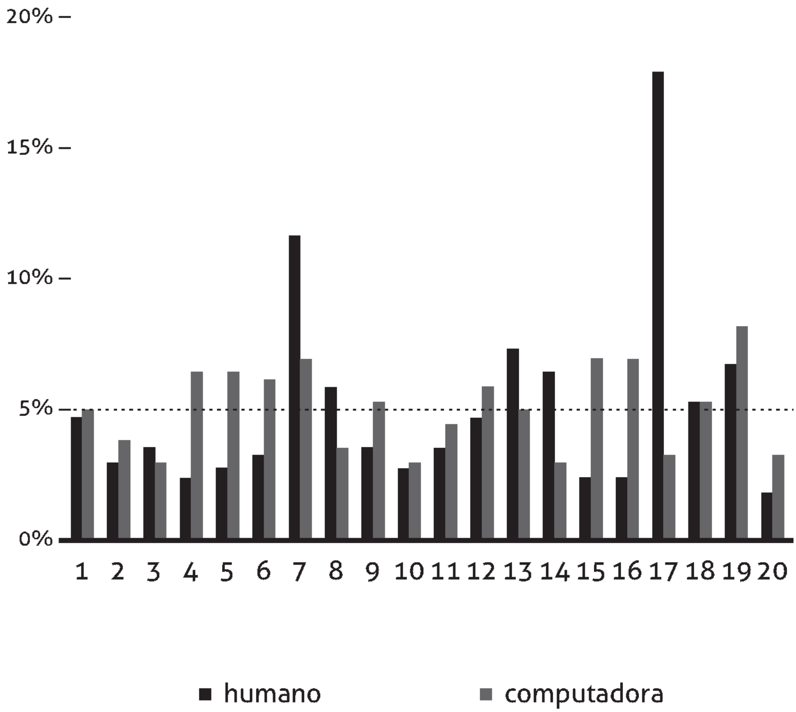


Figura 1

¿Qué otra cosa descubrió? Al hablar de azar, los humanos tenemos la tendencia de inclinarnos por los números *impares* antes que los pares. Los resultados aparecen en la Figura 2 (es la comparación entre las respuestas que él obtuvo y los de la computadora).

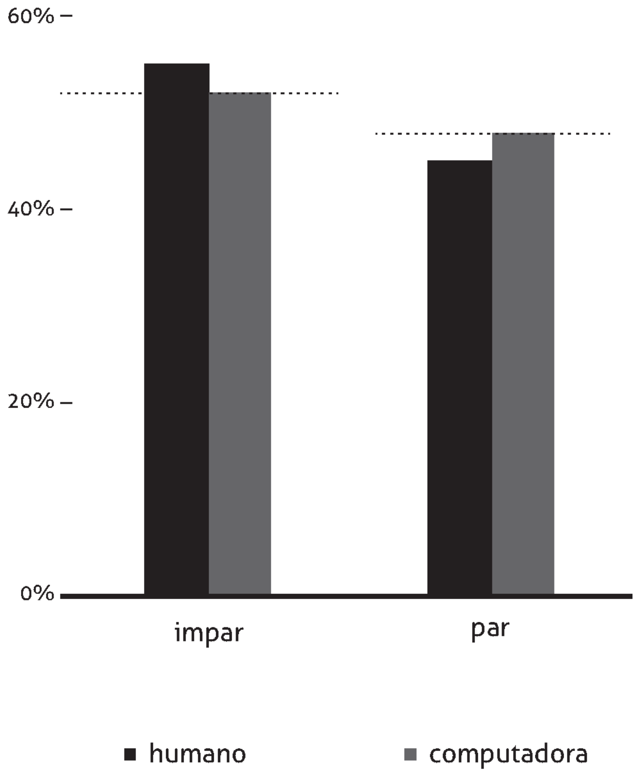


Figura 2

Por último, nosotros solemos elegir los números primos[31] más frecuentemente, como si *ser primo* diera una mayor garantía de *azar*. Entre los números 1 y 20 están estos números primos: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17 y 19. O sea, ocho de los 20 son primos. En la Fi-

31. Números que son solamente divisibles por sí mismos y el uno. Para ser más precisos, hay que hablar de primos positivos y excluir al *uno*, pero en este contexto creo que no es necesario ser tan exigentes con los aspectos técnicos.

gura 3 aparecen los resultados comparativos entre los humanos y la máquina.

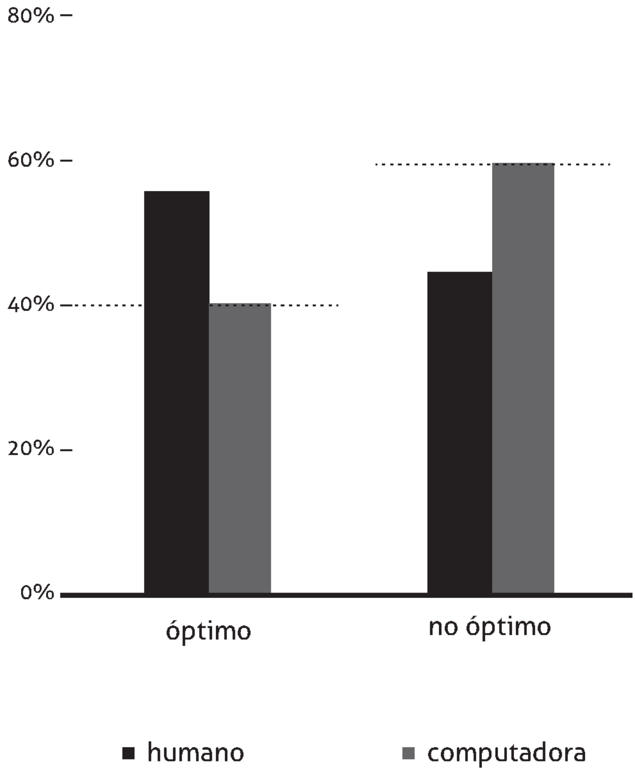


Figura 3

Las conclusiones de Munger son muy valiosas y creo que merecen más atención que la que yo le estoy dando en estas líneas (pero ya volveré sobre el tema). En todo caso, pongámoslo así: *Los humanos tenemos muchos problemas con el azar. No somos muy buenos para generar números al azar. Es posible* ***predecir*** *que elegimos algunos números más que otros. De hecho, la moraleja* *que uno podría sacar de este experimento es que el número 17 es el que* ***más veces*** *aparece al azar*, lo cual, como usted se imagina, carece de sentido. El azar es el azar, y no debería haber ninguna predilección por ningún número. En este caso, las experiencias demuestran lo contrario y nos exhiben como muy falibles cuando se trata de replicar lo que *no debería tener ni seguir ningún patrón*.

Continuará….

Los hijos del especialista en lógica

Éste es un problema breve pero no por eso menos atractivo. Fíjese qué le parece a usted. Dos amigos se encuentran por la calle luego de no verse durante mucho tiempo. Ambos son especialistas en lógica. Se graduaron juntos dos décadas atrás. En el medio, ambos se casaron y tuvieron hijos. Uno de ellos le dice al otro:

—Me casé ni bien me recibí y con Ana tuvimos cinco hijos. ¿Y vos?

—Yo también me casé y tengo tres hijos. Mirá, mis tres chicos tienen edades distintas y si hoy sumáramos las edades daría el número 13.

—Mmmm… —sigue el ex compañero—. Con esos datos no puedo deducir cuántos años tiene cada uno.

—Mirá hacia esa esquina. ¿Ves que hay algunas personas cruzando la calle? Bueno, mi hijo menor tiene justamente la edad del número de personas que vos estás viendo…

—Ahora sí… ahora ya sé.

Usted también, si se detiene a pensar un poco, tiene que ser capaz de poder descubrir las edades. Sólo se trata de analizar las posibilidades. La/lo dejo a usted solo. Yo sigo acá.

Solución

Como decía antes, sólo se trata de analizar todas las posibilidades. Si los tres hijos tienen edades distintas y la suma tiene que ser 13, eso reduce mucho las edades posibles. Fíjese si está de acuerdo conmigo. ¿Cuántos años pudieron tener cada uno?

1) 10, 2 y 1
2) 9, 3 y 1
3) 8, 4 y 1
4) 8, 3 y 2
5) 7, 5 y 1
6) 7, 4 y 2
7) 6, 5 y 2
8) 6 , 4 y 3

No hay más. Le sugeriría que con estos datos que acabo de escribir piense si *ahora* está en condiciones de deducir cuáles eran las edades de los tres hijos de este señor.

Si no, sigamos pensando juntos. Fíjese que si el número de personas que estuviera cruzando la calle fuera o bien *uno* o bien *dos*, no se podría deducir cuál es la edad del hijo menor. ¿Por qué? Porque hay varias posibilidades para cada uno de los otros dos.

En cambio, si el número de personas que cruzaban la calle fuera *tres*, entonces ***sí*** se podría deducir, porque hay una sola manera de sumar 13 con tres números distintos cuando uno de ellos es *tres*. A saber: esos tres números tienen que ser: 6, 4 y 3.

En consecuencia, ésas son las edades de los tres chicos.

¿Qué sistema de puntuación elegir?

El problema que quiero plantearle tiene resultado *abierto*. ¿Qué quiero decir con *abierto*? Me explico. La idea es proponer un problema para el cual no existe una solución *correcta* y otra (u otras) incorrecta(s). Hay que tomar una decisión basada en el sentido común. Naturalmente, con tanta libertad de elección, las respuestas serán ciertamente muy variadas y dependerán de la valoración de cada persona. Pero si la idea es tratar de ser justos, verá usted que no es tan fácil optar. La versión que elija como SU solución puede que lo deje satisfecho, pero encontrará (muchos) otros que no estarán de acuerdo. Suficiente introducción. Acá voy.

Suponga que hay que elegir un colegio de todos los que hay en el país, para que represente a la Argentina en una competencia internacional. Se hicieron ya torneos por barrio, por ciudad, por provincia, regionales y un gran torneo nacional. Llegaron a la final únicamente dos que voy a llamar A y B.

Se los separa por edades, que corresponden a los tres últimos grados de la escuela primaria y los cinco años del secundario. En total entonces se efectúan *ocho pruebas*, una por cada nivel. Además, cada colegio presenta dos alumnos por prueba.

Para resumir: dos colegios (A y B), ocho pruebas, dos alumnos por colegio para cada prueba, lo que significa que en total cada escuela presenta 16 alumnos.

Como en cada test participan cuatro estudiantes, se los ordena de acuerdo con el puntaje que obtienen. Por lo tanto, siempre tiene que haber uno que salió primero, otro segundo, tercero y cuarto.

Una vez terminadas todas las evaluaciones, estos son los resultados:

	1° puesto	2° puesto	3° puesto	4° puesto
A	6	0	4	6
B	2	8	4	2

Figura 1

Para verificar que se entiende esta 'tabla', el colegio A obtuvo *seis* primeros puestos, ningún segundo puesto, cuatro terceras posiciones y sus estudiantes terminaron cuartos en seis oportunidades. De la misma forma hay que interpretar lo que sucedió con el colegio B.

Hay que elegir *uno* de los dos colegios. No se puede mezclar alumnos de uno con alumnos del otro, ya que los que participan en la competencia son las escuelas y no los alumnos individualmente. Lo que el país necesita es elegir su mejor representante.

Ahora aparece *usted*. Sí, usted. Mirando los datos que aparecen en la Figura 1, ¿qué colegio elegiría usted?

Eso sí: cualquiera sea su respuesta, debería poder 'explicar' y/o 'justificar' su decisión.

La/lo quiero dejar en soledad sin abrumarlo con mis ideas, pero me permito incluir algo más: ¿no sería mejor determinar de antemano qué puntaje otorgarle a cada puesto independientemente de los resultados que se obtuvieron en las pruebas? Digo… porque, como usted se imagina, no sería aceptable que uno eligiera el método de puntuación *después* de conocer los resultados de las pruebas. Cualquiera de los dos colegios que sea declarado 'segundo' (detesto poner 'perdedor' porque acá *nadie pierde*) sentirá que la elección del sistema de puntuación lo perjudicó. ¿Quiere pensarlo?

Algunas reflexiones

Si usted le dedicó un rato a pensar el problema, se habrá dado cuenta de que la dificultad aparece cuando uno quiere adjudicarle un puntaje a cada puesto. Es decir, ¿cuántos puntos darle a quien salió primero? ¿Qué diferencia de puntaje tiene que haber entre quien salió primero y segundo? Y lo mismo en relación con las siguientes posiciones.

Usted, ¿a qué conclusión llegó?

Antes que se realizaran las pruebas, el comité organizador debatió sobre el sistema que habría de adoptar. Las distintas posturas que llevó cada integrante del comité se redujeron a estos tres sistemas:

PROPUESTAS	1° puesto	2° puesto	3° puesto	4° puesto
Sistema 1	5	3	2	1
Sistema 2	3	2	1	0
Sistema 3	6	3	2	1

Figura 2

¿El sistema que pensó usted difiere mucho de los tres que aparecen en la Figura 2? Le propongo que se fije si más allá de los puntos que usted decidió que corresponderían a cada posición, la diferencia relativa entre cada puesto se puede equiparar a alguno de los sistemas propuestos.

Según su opinión, ¿cuál de los tres sería el más justo? ¿Cuál serviría mejor para decidir el colegio que merece ir en representación del país?

La discusión se hizo cada vez más acalorada, porque si bien parece algo totalmente irrelevante, al tratar de aplicar el sistema con los resultados que se obtuvieron en las ocho pruebas, apareció un hecho decisivo.

Fíjese lo que pasó con cada sistema cuando uno los utiliza para evaluar los resultados que se obtuvieron en cada competencia.

Usando Sistema 1	A = 44	B = 44	EMPATE
Usando Sistema 2	A = 22	B = 26	Gana B
Usando Sistema 3	A = 50	B = 46	Gana A

Es decir, sucedió algo notable: ¡el colegio que habría de representar a la Argentina pasaría a depender *fuertemente* de qué sistema se decidiera utilizar!

Espero haber sido suficientemente claro, pero para quedarme más tranquilo, no estoy abogando ni por uno ni por otro. No. No estoy tratando de involucrarla/lo a usted para decidir cuál sistema es mejor y cuál es peor. Ninguno lo es. Lo que se trata es de ser justo o, en todo caso, de que no se produzcan injusticias y un colegio que debería *ganar* no termine ‘afuera’. O, si usted prefiere, que no *gane* quien no debería.

Moraleja

En general, es siempre *muy difícil* evitar anomalías en un problema de este tipo. Cuando uno ya conoce cuántos primeros puestos (o segundos o los siguientes) obtuvo cada colegio, es siempre más tentador decidir qué sistema utilizar. Y ni qué hablar si hay algún tipo de interés (manifiesto o encubierto) para que la ganadora sea una de las dos escuelas.

Repito: no espere acá que yo ofrezca una respuesta que se suponga *correcta*, más que nada porque… 'no existe una que esté bien y otra que esté mal'. Todas son aceptables si uno se pone de acuerdo en las reglas *antes* que se inicie la competencia. Conocer los resultados y elegir el sistema posteriormente sugiere que hay algún favoritismo, cosa que es obviamente inaceptable.

En definitiva, formar parte de un jurado es siempre un problema complicado, no sólo porque hay que evaluar 'pruebas' (lo que detesto abiertamente), sino porque aun la generación de un criterio que trate de evitar injusticias al momento de elegir, es muy difícil. A uno le gustaría que todo fuera claro, blanco o negro, correcto o incorrecto, uno o cero… pero no es así. La vida funciona de otra forma.

Es por eso que las apreciaciones personales y los gustos individuales se visibilizan. ¿Quién es uno (cualquiera) para creer que es 'el dueño de la verdad'?

¿Cuántas rutas hay?

El siguiente problema es interesantísimo. Parece ingenuo porque es sencillo, pero al mismo tiempo, se puede generar un modelo que permite resolver situaciones mucho más complejas basadas en la solución que usted encuentre.

Acá voy. Suponga que en una ciudad hay dos edificios, que voy a nombrar E1 y E2. Cada uno de ellos está ubicado en uno de los dos extremos de la 'grilla' de calles como se ve en la Figura 1.

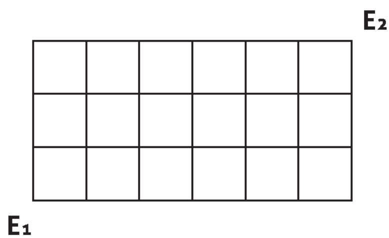


Figura 1

Cada lado del rectángulo representa (imaginariamente) una calle por la cual uno puede circular. Supongamos también que todas las calles tienen la misma longitud, lo que es lo mismo que decir que el rectángulo que contiene a E1 y a E2 en cada extremo está dividido en pequeños 'cuadraditos'. En total, hay 28 intersecciones. El número 28 lo conseguí advirtiendo que los dos extremos verticales del rectángulo están formados por calles y las dos 'caras horizontales' también son calles. Luego, como hay siete calles verticales y *cuatro* horizontales, en total hay ($4 \times 7 = 28$) intersecciones.

Preguntas:

1) ¿Cuántas formas hay de ir desde E1 hasta E2 usando el mínimo número de calles en el recorrido?
2) Si en lugar de ser un rectángulo de 3 filas por 6 columnas fuera de *n filas* por *m* columnas, ¿cómo *adaptar* el resultado? ¿Cómo contar todas las posibilidades en este caso?

Acá es donde yo le propongo que se quede en soledad y yo 'vuelvo' luego para 'contar' junto con usted.

Idea para la solución

Quiero proponerle una forma de *modelar* el problema. Parémonos en las Figuras 2 y 3 ahora, en donde yo elegí dos caminos cualesquiera. Quiero ponerme de acuerdo con usted: fíjese que 'marqué' el camino en cada uno de los dos casos. En la Figura 2, el camino empieza yendo hacia 'arriba' un paso, luego tres hacia la derecha, después dos hacia arriba y finalmente, tres hacia la derecha hasta llegar a E2. O sea, podría haber escrito así:

(A, D, D, D, A, A, D, D, D)

en donde la letra 'A' representa 'ir hacia arriba' y la letra 'D' significa 'ir hacia la derecha'.

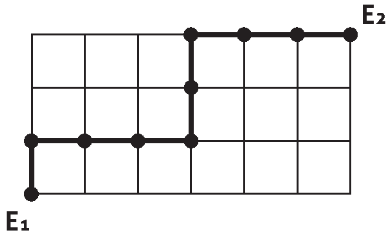


Figura 2

De la misma forma, en la Figura 3, el camino se puede representar así:

(D, A, D, D, D, D, A, D, A)

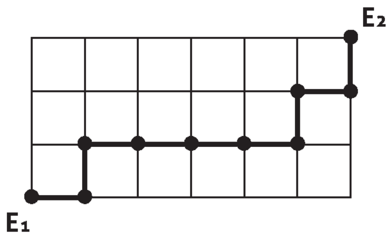


Figura 3

¿Qué se desprende de esta forma de presentar el problema? Como usted habrá advertido, *cada camino que uno puede dibujar para ir desde **E1** hasta **E2***, corresponde a distribuir ***tres*** letras A y ***seis*** letras D.

Por otro lado, la *ubicación* de cada una de estas letras dentro del paréntesis establece el orden en el que uno va generando el camino. Es decir, si la primera letra que aparece es una D, esto significa que el camino empieza yendo desde E1 hacia la derecha. En cambio, si la primera letra es una A, eso significa que uno empieza en E1 yendo hacia arriba.

¿Cómo hacer para contar cuántos caminos hay? Voy a escribir una potencial respuesta, pero me gustaría darle la alternativa de que usted pueda pensarlo sin mis ideas 'dando vuelta'.

Sigo. El objetivo es determinar '*en qué lugares ubicar las tres letras* A'. Es decir, el camino queda unívocamente determinado una vez que yo elijo en qué lugar van las 'A'. Por ejemplo, si usted decide que van a ocupar el primero, segundo y tercer lugar, entonces el camino quedará como se ve en la Figura 4.

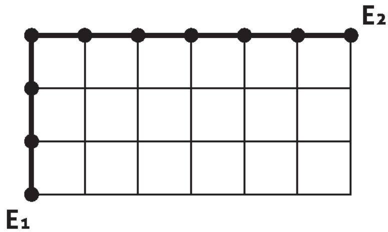


Figura 4

Por lo tanto, como hay nueve lugares para llenar y tres para elegir, el problema se reduce a contar cuántas formas hay de elegir *tres* lugares entre *nueve* posibles.

¿Cómo hacer entonces para *contar* la cantidad de rutas sin tener que hacer una lista de todas?

Se trata de determinar cuántas formas hay de ubicar las *tres letras* 'A' en los nueve espacios. Voy a numerar estos espacios usando dígitos del 1 al 9.

Si escribo 147 o 289, eso significa que las tres letras A están ubicadas en las posiciones 1, 4 y 7 en el primero caso, o en los lugares 2, 8 y 9 en el segundo. Creo que se entiende bien.

Ahora, contemos de cuántas formas pueden aparecer las tres A.

Fíjese que ‘empezando’ con 12 (o sea, donde hay dos A en los dos primeros lugares), tenemos ***siete*** maneras de ubicar la A que falta:

123, 124, 125, 126, 127, 128 y 129

Si ahora *muevo* la segunda A y la ubico en el *tercer* lugar, quiero contar cuántas distribuciones posibles hay empezando con: 13. En este caso, hay ***seis*** formas:

134, 135, 136, 137, 138 y 139

Un paso más antes de invitarla/invitarlo a sacar una conclusión. Si ahora queremos contar cuántas maneras hay de ubicar las tres A pero *moviendo* la segunda A al cuarto lugar, encontramos estas ***cinco*** formas:

145, 146, 147, 148 y 149

Es decir, si usted relee lo que escribí antes, verá que a medida que voy moviendo la segunda letra A (dejando fija una de ellas en el primer lugar) se obtienen: 7, 6, 5, 4, 3, 2 y 1 maneras distintas. Si las sumamos, obtenemos el número 28, justamente estas 28 posibilidades agotan *todas* las formas de ubicar las tres letras A *pero dejando una de ellas en el primer lugar*.

Ahora, dejamos fija una A en el **segundo** lugar. Hay que contar *todas las variantes* que empiezan con un 2. Usando la misma estrategia que escribí antes, uno establece que puede empezar así:

234, 235, 236, 237, 238 y 239

O sea, ***seis*** casos. Y al hacer recorrer la segunda A a las posiciones 4, 5, 6, 7 y 8, se obtienen ***cinco, cuatro, tres, dos y una*** variantes posibles. La suma ahora es 21.

Me imagino que usted ya advierte lo que está pasando: los números que aparecen son los que se van obteniendo al sumar los primeros números naturales:

1,
3 = (1+2),
6 = (1+2+3),
10 = (1+2+3+4),
15 = (1+2+3+4+5),
21 = (1+2+3+4+5+6) y
28 = (1+2+3+4+5+6+7)

Cuando uno suma *todos* estos números ahora, se tiene:

$$1 + 3 + 6 + 10 + 15 + 21 + 28 = 84$$

Y justamente 84 es el número total de rutas posibles.

Ahora bien, ¿no habrá un modo más *económico* de determinar cuántas formas hay? Y la respuesta es que sí, efectivamente hay una manera muchísimo más fácil, pero requiere de usar el número combinatorio (9,3) que se calcula así:

$$\binom{9}{3} = 9!/(3!x6!) = 84$$

Este número (9,3) indica la cantidad de formas de pueden seleccionar tres objetos entre nueve posibles. En este caso, se trata de decidir de cuántas maneras elegir tres 'lugares' entre los nueve disponibles para ubicar las letras 'A'.

Ahora bien: esto contesta la primera pregunta. Supongo que si me siguió hasta acá, la segunda parte debería ser más directa. Si uno tiene ahora *n filas* y *m columnas*, entonces lo que hay que hacer es elegir en dónde ubicar las *n* letras A. Esto se logra con el número combinatorio (m + n,n) que cuenta de cuántas formas se pueden seleccionar n lugares entre (m + n) posibles.

Reflexión final

¿No es interesante que uno pueda *modelar* un problema de este tipo de manera tal de reducir la dificultad a contar de cuántas formas se puede ubicar una determinada *letra* en una tira que contiene nada más que dos tipos diferentes (de letras)? Justamente, la matemática también provee de soluciones de este tipo y eso es lo que la hace fascinante, ¿no cree?

Mezclando cartas

Estábamos grabando un capítulo de *Alterados por Pi* en Santiago del Estero. El auditorio se llama Forum, un lugar fascinante, posiblemente de los mejores que hay en el país. En una vieja estación de tren, los santiagueños diseñaron y construyeron un lugar espectacular. Es posible adaptar el salón para albergar casi tres mil personas pero, al mismo tiempo, el lugar es tan dúctil, que se lo puede dividir en varias salas con capacidades mucho menores y sin por eso perder calidad acústica.

El interés que había en la ciudad capital fue tan grande que la propia ministra de Educación se acercó para tratar de resolver los problemas previstos para los programas que habríamos de grabar allí.

En ese marco, antes que yo subiera al escenario que estaba especialmente preparado, discutíamos con Cristian y María Marta[32] cómo empezar. No recuerdo quién de los dos me dijo:

32. María Marta García Scarano es (y ha sido) la productora general de todos los programas que hemos grabado de *Alterados por Pi*. Llevamos nueve temporadas y su participación y presencia han sido esenciales para lo que hacemos. Por su parte Cristian ha sido alumno mío en el año 1996 y hoy es uno de los 'contenidistas' del programa junto con el invalorable aporte de Juan Pablo Pinasco. A los tres les guardo un afecto muy especial. Es posible que

"¿Pensaste alguna vez cuánto tiempo llevaría mezclar un mazo de cartas si uno quisiera pasar por *todas las distintas posibilidades* en las que los naipes pueden ordenarse?".

Mi respuesta fue inmediata: "Sí, muchas veces. El factorial de un número crece muy rápido y, por lo tanto, ni siquiera vale la pena hacer las cuentas".

Allí fue donde Cristian saltó y me dijo: "Mirá, tomá las 12 cartas de un solo palo, digamos las doce cartas de oro. Suponé que las vamos a ordenar de *todas* las formas posibles y suponé además que vamos a tardar nada más que un segundo en cambiar de una forma a la otra. ¿Sabés cuánto tiempo nos llevaría?".

Esa breve charla disparó mi curiosidad. Puesto en los términos que me planteó Cristian, creo que sí vale la pena detenerse un instante y hacer las cuentas pertinentes. Sígame por acá y acompáñeme al final para que podamos sacar una conclusión que —creo— la/lo va a sorprender.

En principio, no voy a definir acá el 'factorial' de un número porque ya lo hice reiteradas veces. En todo caso, sólo para refrescar la idea, el 'factorial' de un número entero positivo cualquiera n se obtiene multiplicando todos los números que van 'desde n hasta 1' en forma decreciente. Es decir, el factorial de los primeros números resulta ser:

$2! = 2 \times 1 = 2$
$3! = 3 \times 2 \times 1 = 6$
$4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$
$5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$
$6! = 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 720$

---

sin ellos se hubieran podido hacer estos programas, pero sin ninguna duda la calidad no habría sido la misma. En sus funciones, son únicos.

En general,

$$n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times \ldots \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$$

¿Por qué hablo del *factorial* de un número? En todo caso, ¿qué es lo que *mide*? El factorial *cuenta* todas las formas en las que se pueden permutar los elementos de un conjunto. Es decir, si uno tiene tres cartas, el factorial de 3, que es igual a 6, dice que hay seis formas de poder ordenarlas, y se escribe: 3! = 6. Por ejemplo, si uno tiene el 4, 5 y 6 de oro, los puede ordenar de estas *seis* formas:

456
465
546
564
645
654

Justamente, el factorial de tres (se escribe 3!) sirve para contar todas las posibilidades sin tener que escribirlas.

Si uno tiene 10 cartas, entonces hay 10! = 3.628.800 permutaciones distintas. Es decir, este número, 3.628.800, indica que hay más de 3 millones y medio de maneras diferentes en las que uno puede mezclar un mazo de 10 cartas nada más.

Esto ya da una idea de lo rápido que crece el factorial a medida que uno va incrementando el número *n*.

En el caso que nos ocupa, si uno tiene 12 cartas, el factorial de 12 servirá para determinar cuántas formas posibles hay de mezclar esas doce cartas:

$$12! = 12 \times 11 \times 10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = \boxed{\mathbf{479.001.600}}$$

Es decir, hay casi 480 millones de formas de ordenar 12 cartas… ¡una barbaridad!

Y acá llega un punto muy interesante: si uno tardara un segundo en ir cambiando de un orden a otro y no hiciera ninguna otra cosa más en su vida hasta recorrerlos a todos, le llevaría… ¡más de 15 años!

Me quiero permitir hacer un par de observaciones más, siempre alrededor del 'factorial'. Si uno tuviera las 24 cartas de *dos* de los palos, el factorial del número 24 (y le sugiero que verifique usted las cuentas) es:

24! = 172.346.778.259.233.000.000

Luego, si usted quisiera ordenarlas de todas las formas posibles y tardara nada más que un segundo para cambiar de un orden a otro, le llevaría más de 196 *billones* (sí, *billones*) de SIGLOS en hacerlo. El número exacto de años es:

19.674.289.755.620.200.

Luego, si uno lo divide por cien para descubrir el número de siglos, ahora el número se *reduce (¿?)* a:

196.742.897.556.202

Ahora sí, lo prometido. Como usted advierte, en general uno juega a las cartas con más de 24 naipes. Los mazos suelen tener

40 cartas (si uno juega al truco o a la escoba de 15, por ejemplo) o 54 si uno juega al 'chinchón' (contando los comodines).

Supongo que si llegó hasta acá en el texto, se da cuenta de lo que habría de pasar si uno tiene, digamos, las 40 cartas con las que jugamos al tute o al truco.

Cuando uno le pide a una persona que participa del juego "Mezclá", no tiene idea de que esas 40 cartas pueden quedar ordenadas de

815.915.238.247.898.000.000.000.000.000.000.000.000.000.000.000

formas, lo que significa que si uno tardara —igual que antes— nada más que un segundo en pasar de una configuración a otra, tardaría:

¡¡¡¡25.872.503.908.165.200.000.000.000.000.000.000.000.000 AÑOS!!!!

Dicho esto, ¿no le parece que habiendo *tantas* posibilidades, es muy poco probable que ni usted ni yo hayamos jugado dos veces a cualquier juego con el mismo mazo de cartas? (me refiero a los órdenes posibles).

¿Cuál es la probabilidad de que, al mezclar un mazo de cartas, hayamos jugados dos veces con la misma distribución? Bajísima. Y me apuro a escribir también que es muy poco probable que aún juntando todos los partidos que jugó usted, yo y todas las personas que conocemos ambos, haya habido dos mazos que estuvieran ordenados de la misma forma. Más aún: en toda la historia de todos los posibles juegos de cartas, ¿se habrá repetido alguna vez alguno de los posibles órdenes?

Cuando uno juega a las cartas, no tiene noción (y creo que al final no tiene importancia) de la cantidad de permutaciones posibles en las que los naipes pueden terminar de ubicarse después que uno los mezcla. ¿O usted *sí* sabía?

Juego

Quiero plantear acá un juego. Lo juegan dos personas, digamos A y B. Eligen cuál de los dos empieza y van alternándose a partir de allí.

Hay un papel en donde cada uno de ellos va a escribir un número entero cualquiera entre 1 y 99, es decir, números menores que 100, sin repetir.

En el momento en que uno de los dos 'descubre' que puede separar algunos de los números escritos y dividirlos en dos grupos que sumen lo mismo, ese participante gana el juego.

Por ejemplo, supongamos que los números escritos en forma alternada fueron:

$$\{20, 2, 29, 40, 7, 11\}$$

Al llegar acá, como el que empezó fue A, ahora le volvería a tocar a ella (o a él), pero 'A' advierte que:

$$20 + 29 = 49$$

y por otro lado

$$2 + 40 + 7 = 49$$

Por lo tanto, antes de volver a jugar A encontró dos subgrupos de los números que habían sido escritos que tenían la misma suma… y ganó la partida.

Lo notable es que aunque uno sospeche que podría embarcarse en una larga sucesión de 'idas y vueltas', *a lo sumo en diez tiros* ***en total***, el juego tiene que terminar. Es decir, puede que antes, pero a lo sumo, luego de que cada uno de los dos participantes hubiera jugado cinco veces, el juego debe terminar. Raro, ¿no? Sin embargo, es posible comprobar que cuando uno tiene *diez* números distintos elegidos entre los primeros 99, *seguro que tiene que haber dos subgrupos* ***disjuntos***[33] que tengan la misma suma.

De eso se trata el problema: determinar por qué debe pasar esto. Ahora, como suelo escribir, le toca a usted.

Ideas previas a proponer una solución

Quiero que hagamos juntos algunas observaciones para llegar a la solución.

En principio, veamos si podemos aprender cómo se puede contar el número de subconjuntos (no vacíos) que se pueden crear dependiendo del número de elementos (o números) que uno tenga para elegir.

Si uno tiene nada más que un número, digamos el 1, ¿cuántos subconjuntos puede armar? Esta respuesta es fácil: ¡solamente ***uno***! El subconjunto formado por el mismo número *uno*.

33. ***Disjuntos*** quiere decir que los dos subgrupos no tengan ningún número en común.

Supongamos ahora que uno tuviera los dos primeros números, el 1 y el 2.

¿Cuántos subconjuntos distintos puede armar?

Le propongo que piense usted antes de leer cada respuesta para poder luego comparar si estamos de acuerdo.

Sigo: los subconjuntos que se pueden formar son:

a) El subconjunto formado por el número 1.
b) El subconjunto formado por el número 2.
c) El subconjunto formado por los dos números, el 1 y el 2.

Es decir, en total hay ***tres*** subconjuntos posibles.

Si ahora tuviéramos tres números en lugar de dos, digamos el 1, 2 y 3. ¿Cuántos subconjuntos podemos formar?

a) El subconjunto formado por el número 1.
b) El subconjunto formado por el número 2.
c) El subconjunto formado por el número 3.
d) El subconjunto formado por los números 1 y 2.
e) El subconjunto formado por los números 1 y 3.
f) El subconjunto formado por los números 2 y 3.
g) El subconjunto formado por los números 1, 2 y 3.

En total entonces, se pueden armar ***siete*** subconjuntos.

Le sugiero que siga con esta idea para poder descubrir que si uno tiene los primeros cuatro números (1, 2, 3, 4), entonces se pueden armar ***quince*** subconjuntos; y si tiene los primeros cinco números (1, 2, 3, 4, 5) se pueden armar ***treinta y un*** subconjuntos.

Antes de avanzar, ¿quiere que juntemos toda esta información?

Fíjese lo que aprendimos juntos.

Con *un* número, se puede armar *un* subconjunto.
Con *dos* números, se pueden armar *tres* subconjuntos.
Con *tres* números, se pueden armar *siete* subconjuntos.
Con *cuatro* números, se pueden armar *quince* subconjuntos.
Con *cinco* números, se pueden armar *treinta y un* subconjuntos.

¿Advierte que hay *algo* que está pasando? La cantidad de subconjuntos que uno puede armar son: 1, 3, 7, 15, 31… y si siguiera un paso más daría 63, y luego 127… o sea, son todos impares. Y si sumáramos uno a cada uno de ellos, tendríamos: 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128… ¡que son las potencias del número *dos*!

Es decir, si uno quiere contar cuántos subconjuntos se pueden armar con los primeros *diez* números, en total tiene $2^{10} - 1 = 1.023$.

¿Por qué aparecen las potencias de dos? Imagine lo siguiente: suponga que yo quiero armar un subconjunto con los primeros diez números. En el subconjunto que yo elija, puede que esté el número *uno* o no. Puede que esté el número *dos* o no. Puede que esté el número *tres* o no. Y así siguiendo. Es decir, si yo me fabricara una 'lista ordenada', tendría esta forma:

1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
1	0	0	1	1	0	0	1	0	0

¿Cómo interpretarla? Esta 'tira' indica que MI subconjunto contiene a los números {1, 4, 5 y 8}. Por eso puse un *uno* debajo de los números 1, 4, 5 y 8, y un *cero* debajo del 2, 3, 6, 7, 9 y 10. De esta manera, cuando pongo el número *uno* en la casilla que está debajo de uno de ellos, indica que *ese número en particular* ***está*** *en mi subconjunto*; y cuando pongo un *cero* en la casilla que está debajo de ese número en particular, sirve para indicar que ese número ***no está*** *en mi subconjunto*.

Esto que escribí es una forma de *modelar* el problema que tenemos: poder *contar* cuántos subconjuntos se pueden armar con los primeros diez números. Todo lo que tengo que hacer ahora es contar de cuántas formas puedo combinar *unos* y *ceros* en las listas como la que escribí antes.

¿Cuántas posibles listas habrá? ¿Quiere contar usted por su cuenta primero antes de leer la respuesta?

Sigo yo. Fíjese que para el primer lugar hay dos posibilidades: 0 y 1. Para el segundo, también hay dos posibilidades, otra vez 0 y 1. En total en los primeros dos lugares entonces hay cuatro posibilidades: 00, 01, 10 y 11.

Si agrego un lugar más, como todos tienen dos alternativas (0 y 1), cuando hay tres números se tienen $(2 \times 2 \times 2) = 8 = 2^3$ posibilidades. Éstas son: 000, 001, 010, 011, 100, 101, 110 y 111.

Cuando uno tiene cuatro números, hay $2 \times 2 \times 2 \times 2 = 16 = 2^4$.

De esta forma, con los primeros diez números, existen $2^{10} = 1.024$ posibilidades.

Hay algo que falta contestar (por ahora): ¿por qué la cantidad de subconjuntos iban dando *uno menos* que cada potencia de dos? Fíjese que la tira que falta es la que tiene ¡todos números ***cero***!

¿Qué querría decir esta 'tira'? Si uno tuviera *ceros* debajo de todos los números, querría decir que ¡no elegí ningún número para formar mi subconjunto! Es decir, es el subconjunto ***vacío***. Como dejé explícitamente afuera el subconjunto vacío, eso trajo como consecuencia que siempre tuve que restar *uno* a la cantidad de subconjuntos que podía armar. Pero ahora, ya está todo resuelto.

Hemos comprobado que si uno tiene *los diez primeros números* y quiere contar cuántos subconjuntos puede armar con ellos, el número es $2^{10} - 1 = 1.023$.

Ahora tengo una pregunta para usted. Cuando contamos el número de subconjuntos que se podían formar eligiendo *números* entre los primeros diez, ¿importó que fueran *esos diez números en particular*? Es decir, qué números fueran no tiene ***ninguna*** incidencia en la cantidad de subconjuntos que puedo formar. ¡Lo ÚNICO que importó es que fueran diez números distintos y NO CUÁLES fueran!

Ya estamos muy cerca de llegar a resolver el problema del 'juego' que planteé al principio.

Con el desarrollo que hice recién, estamos seguros de que cuando uno tiene diez números cualesquiera, la cantidad de subconjuntos que uno puede formar con ellos es 1.024 (si uno acepta el *vacío*) o si no, 1.023 (si uno EXCLUYE al subconjunto vacío).

Ahora bien. Supongamos que empezó el juego y llegamos hasta que el segundo participante hizo su *quinta* movida. Luego, como los dos hicieron cinco movimientos, *en total* hay *diez* números (entre los primeros cien) que están escritos en el papel.

Ya sabemos que entre esos diez números yo puedo formar 1.023 subconjuntos. Pero por otro lado, ¿cuál será el *número máximo* que pueden sumar los diez números que eligieron entre A y B? No se asuste con la pregunta ya que es algo fácil de contestar si uno, claro está, *entiende* lo que pregunté. Acá voy.

Como los números que ambos están anotando en el papel son todos menores que *cien*, ¿cuál sería la *máxima* suma que se podría obtener al haber jugado los dos cinco veces?

En el *mejor* (o peor) de los casos, la suma máxima se obtiene si los números escritos en el papel son:

90, 91, 92, 93, 94, 95, 96, 97, 98 y 99

Éstos son los diez números *más grandes* que uno podría elegir. Por lo tanto, *su suma* es la más grande que se puede obtener.

Sumemos estos diez números:

$$90 + 91 + 92 + 93 + 94 + 95 + 96 + 97 + 98 + 99$$

Fíjese que como son todos menores que 100, la suma ¡¡¡¡***tiene que ser menor que 1.000***!!!!

Luego, si uno sumara *los números que aparecen en* ***todos*** *los posibles subconjuntos que uno puede formar con esos diez números,* como en total son 1.023 y a lo sumo tienen que sumar un número *menor que mil, ¡tiene que haber sumas repetidas!*

Una observación importante. Si en los dos subconjuntos que tienen la misma suma hay números en común (es decir, que figuren en los dos), los 'excluyo' de ambos *sin alterar la suma, porque 'saco' los mismos números de cada lado*. ¿Qué es lo que consigo con esto? Que los dos subconjuntos tengan la misma suma pero, además, ¡*que no tengan ningún número en común*!

Y eso es *justamente* lo que queríamos comprobar: que entre los diez números que escribieron A y B, tiene que haber *por lo menos dos subconjuntos* ***disjuntos*** *que sumen lo mismo*. Luego, el juego tiene que terminar allí mismo.

Reflexión final

Yo no podría decir si el juego es interesante o no. Creo que a esta altura no tiene importancia.

Pero lo que *sí* me parece relevante es mostrar que el juego no puede avanzar y avanzar en forma alocada. Podría suceder que ni A ni B 'encontraran' los dos subconjuntos que sumen lo mismo, pero ése es *otro problema*. De lo que sí estamos seguros, *usted y yo*, es que al haber jugado cinco veces cada uno (si no antes), ¡esos dos subconjuntos existen!

Y una vez más, la matemática fue la proveedora de la solución.

Círculos

El que sigue es un problema precioso. Y digo precioso porque cuando lo vi por primera vez pensé que era una excelente oportunidad para mostrar la 'belleza' de la matemática aun en un lugar totalmente impensado. Sígame por acá.

Todo lo que hace falta saber es la fórmula para calcular el área de un círculo. La voy a escribir a manera de recordatorio, pero es el único dato que uno necesita usar. El resto está librado a su imaginación y creatividad. Por eso me gustó tanto.

Si uno tiene un círculo de radio R, entonces el área del círculo se calcula con la fórmula:

$$\text{Pi} \times R^2 = \pi \times R^2$$

Permítame sugerirle algo: me pongo en su lugar y quizás usted está pensando 'hace años que yo no tengo contacto con círculos, radios, superficies, áreas, fórmulas, etc.'. Créame que no importa. No permita que los tecnicismos entorpezcan su camino. Todo lo que 'necesita' para resolver el problema es usar esa fórmula… Y NADA MÁS. Créame que la satisfacción que va a obtener al pensar el problema y detectar usted qué es lo que está sucediendo, merece ese *mínimo* sacrificio: ¡usar una fórmula!

Ahora sí, el problema propiamente dicho. Suponga que uno tiene cinco círculos, como se ven en la Figura 1.

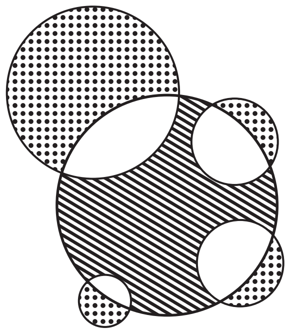


Figura 1

Éstos son los radios de cada círculo: el más grande tiene un radio que mide 50 centímetros. Es el que está ubicado en el centro. El que está ubicado arriba, a la izquierda, es el segundo más grande, con un radio de 40 centímetros. Después, hay dos círculos iguales, que tienen 20 centímetros de radio cada uno. El más pequeño tiene un radio de 10 centímetros.

Como se ve también en la Figura 1, hay algunas áreas que están 'sombreadas'. La 'rayada' está dentro del círculo grande. Las otras cuatro están en los círculos más chicos.

Ahora, fíjese en lo siguiente: el área 'rayada' dentro del círculo grande consiste en TODO LO QUE NO ESTÁ SIENDO 'TOCADO' por los círculos más chicos. Es decir, es el área que no ha sido invadida por los cuatro círculos.

De la misma forma, las áreas 'punteadas' que aparecen en cada uno de los cuatro círculos más chicos, son las partes que NO ESTÁN DENTRO DEL CÍRCULO GRANDE.

Le sugiero que se detenga un instante para tratar de *visualizar* lo que acabo de escribir. Es muy sencillo, pero requiere de un minuto de paciencia para entenderlo.

Una vez que usted comprendió qué significan las áreas 'rayadas' y 'punteadas', quiero invitarla/lo a pensar conmigo la siguiente idea. Suponga que el círculo 'grande', el de 50 centímetros de radio, está fijo.

En cambio, imaginemos que puede mover los otros cuatro, desde una posición en donde están totalmente desconectados del círculo grande hasta una en donde podría incluirlos totalmente en el mismo.

Dicho esto, quiero hacerle un par de preguntas:

¿Habrá alguna forma de ubicar los cuatro círculos más pequeños de manera tal que la suma de las áreas 'punteadas' coincida con el área rayada del círculo grande? Y si fuera posible *encontrar alguna, ¿será única?*

Fíjese que como uno puede mover los círculos más pequeños hacia adentro o hacia afuera, las áreas punteadas y rayadas van cambiando. Justamente por eso es que cabe preguntarse si será posible movilizar los círculos chicos de tal forma que esas áreas coincidan.

Acá es donde quiero darle la oportunidad de pensar. No hay apuro, no hay ninguna presión y, nuevamente, le sugiero que no se prive del placer de pensar. En el momento que usted descubra qué sucede, sentirá que algo interno hizo 'click' y le producirá una cierta satisfacción.

Es por eso que no importa la respuesta que yo pueda escribir acá. Piense usted y verá que habrá valido la pena. Mientras tanto, yo sigo a continuación con una idea para la solución.

Quiero empezar proponiéndole que calculemos las áreas de los cinco círculos en forma separada, como si no estuvieran incluidos en la Figura 1. Para eso, voy a usar reiteradamente la fórmula que escribí al comienzo y que sirve para evaluar la superficie de un círculo de radio R: P × R^2.

El círculo de 50 centímetros tiene área igual a:

$$\pi \times R^2 = \pi \times 50^2 = \pi \times 2.500$$

Advierta que estoy excluyendo adrede escribir las unidades (los centímetros al cuadrado) porque no tiene relevancia a los efectos del razonamiento que quiero hacer con usted.

El círculo de 40 centímetros de radio tiene área de:

$$\pi \times 40^2 = \pi \times 1.600$$

Cada uno de los dos círculos de radio 20 centímetros posee un área de:

$$\pi \times 20^2 = \pi \times 400$$

Por último, el círculo más chico, de 10 centímetros de radio, tiene área igual a:

$$\pi \times 10^2 = \pi \times 100$$

Ahora bien. ¿Qué pasa si sumamos las áreas de los cuatro círculos más chicos? La suma resulta:

$$\boxed{\pi \times 1.600 + \pi \times 400 + \pi \times 400 + \pi \times 100 = \pi \times 2.500}$$

¿Qué quiere decir esto? Fíjese que el área del círculo más grande también es $\pi \times 2.500$. Por lo tanto, el área del círculo más grande coincide con la suma de las áreas de los otros cuatro.

Éste es un dato muy interesante. ¿Por qué? ¿Quiere pensar ahora en soledad si el problema planteado tiene solución?

Fíjese en lo siguiente: supongamos que los cuatro círculos más pequeños estuvieran FUERA del círculo grande y sin tocarlo. En ese momento, el área rayada sería *toda* la superficie del círculo grande (no habría ninguno tocándolo) y, por lo tanto, no habría ningún círculo restándole ninguna porción.

Resumiendo, si no hubiera ningún círculo intersecándolo[34], el área rayada sería de $\pi \times 2.500$.

Por otro lado, el área 'punteada' sería también de la misma medida.

Ahora viene la parte *sustancial y preciosa a la vez*.

Suponga que usted tiene los cuatro círculos afuera, elige uno cualquiera y empieza a empujarlo hacia adentro del más grande. En algún momento, empezará a tocarlo y, por lo tanto, el círculo grande 'entregará alguna porción de su área'. Es decir, el área rayada comenzará a hacerse cada vez más pequeña. Pero… pero… simultáneamente, el área 'punteada' TAMBIÉN se haría más pequeña: al penetrar en el círculo grande, esa porción de su área se cancela con la del círculo mayor.

¿Qué quiere decir esto? Que la parte rayada del círculo gran-

34. Sí, así se escribe. El verbo 'intersecar' indica la acción en donde dos (o más) objetos se *cruzan*. Uno tiene la sospecha que debería ser 'intersectar', de hecho, este verbo también se usa y es correcto. Pero 'intersecar' es el que se utiliza en matemática para designar esa acción.

de que se pierde es ***exactamente igual*** a la parte 'punteada' del círculo chico que ***también se pierde.***

Moraleja: las dos áreas se compensan. ¿Y entonces? Fíjese que ponga donde usted ponga los círculos más pequeños, las áreas rayadas y 'punteadas' se irán cancelando. Por lo tanto, puede ubicarlos donde quiera, las áreas rayadas y 'punteadas' **¡seguirán siendo iguales!**

Esto es un hecho notable: no importa cómo decida usted distribuir los círculos chicos dentro del más grande, las áreas serán *siempre iguales*.

Es una respuesta *totalmente inesperada* (creo) y preciosa al mismo tiempo. De hecho, cuando uno ve el problema por primera vez, siente que habrá que hacer muchos cálculos, muchos dibujos y ni siquiera sabe si podrá lograr el objetivo.

Sin embargo, al analizar la 'continuidad' de lo que se 'gana' y se 'pierde' entre las áreas 'rayadas' y 'punteadas' en cada caso, se descubre que la ubicación de los círculos más pequeños no tiene importancia.

Las respuestas a las preguntas que planteaba el problema son éstas: ***sí, se pueden distribuir los círculos más pequeños de manera tal de que las áreas 'rayadas' y 'punteadas' sean iguales. Más aún: ¡cualquier distribución que uno haga de esos círculos servirá como solución porque las áreas son* SIEMPRE *iguales!***

Por supuesto, mi visión del problema es ciertamente tendenciosa, pero estoy seguro de que se nota que este tipo de deducciones me fascinan. No sólo por la calidad de la respuesta, sino por la *plasticidad de los objetos en movimiento, que otorgan una noción de continuidad que permite inferir que no importará la ubicación final sino que, a lo largo del camino, cualquier distribución sirve para probar que las áreas coinciden y, por lo tanto, el número de ubicaciones posibles es ¡infinito!*

Un crucigrama distinto

Cuando llegan las vacaciones, las opciones de entretenimiento son múltiples. Una vez leí que lo mejor que se le puede regalar a un adulto es un día libre. Eso. Libre. Sin ningún compromiso, obligación. Libertad para elegir lo que uno quiera. No es fácil lograrlo y ni siquiera es fácil permitírselo, aun cuando uno tenga la oportunidad de ejercitar ese derecho.

Ahora quiero volver al tema del 'entretenimiento'. ¿Qué elegir? Históricamente, los medios escritos traen diversas alternativas que permanecen constantes a pesar del paso del tiempo. Por ejemplo, los crucigramas. Hay múltiples variantes, pero algo no se modifica: aparece la definición breve de una palabra y habrá que ubicarla en forma horizontal, vertical o lo que fuere; sin embargo, uno no siempre detecta que hace falta 'saber' algo, hay que tener un 'conocimiento' previo para poder jugar. En definitiva: hay que conocer las palabras.

Otros juegos que aparecieron hace no mucho tiempo no necesitan de ese prerrequisito. Por ejemplo, el Sudoku. Muchas veces me comentan que hay gente que se siente intimidada al ver 'tantos números': les preocupa no entender qué es lo que hay que hacer, sienten que es demasiado para ellos. Es preferible buscar el entretenimiento en otro lugar. ¿Para qué hacer un esfuerzo extra en tratar de entender algo cuando lo que uno busca es nada más que 'quemar' algunas horas o conseguir un 'chicle para el cerebro'?

Tengo buenas noticias: ¡para jugar al Sudoku no hace falta saber nada! No se requiere que una persona conozca 'ni siquiera' el significado de algunas palabras (¡y muchísimo menos saber que el 'sol egipcio es (o fue) RA'!). Sólo se trata de colocar los nueve dígitos no nulos (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 y 9) de cierta forma, siguiendo ciertos parámetros: hay que ubicarlos a todos sin repetir, una vez por fila, una vez por columna y también en cuadraditos de 3×3 que están marcados a tal efecto. Ah, eso sí: el entretenimiento consiste en 'pensar' y descubrir la satisfacción que eso genera. Es una satisfacción distinta de la que uno se procura cuando ve un amanecer o un glaciar o cuando escucha la quinta sinfonía de Beethoven o alguna sonata de Chopin; sin embargo, uno necesita estar expuesto a ese tipo de belleza para poder disfrutarla también.

Pero estas líneas no están dedicadas a describir y/o promocionar el Sudoku o buscar definiciones de belleza. Tengo en mente algo mucho más *pedestre*: proponer *otro tipo* de crucigrama que *tampoco necesita* de un conocimiento previo. Bueno, me corrijo: sí, hace falta saber *multiplicar*. Ayuda si uno sabe las tablas de multiplicar, aunque tampoco es imprescindible. Es una variante de los crucigramas tradicionales. Me explico.

Fíjese en esta grilla de tres filas por tres columnas.

…	…	…	54
…	…	…	120
…	…	…	56
45	56	144	

Figura 1

El objetivo es ubicar los nueve dígitos no nulos, es decir: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, y 9, sin repetir, de manera tal que si uno multiplica los números que aparecen en cada fila, se obtengan los números que figuran a la 'derecha', y si uno multiplica los que aparecen en cada columna, se obtengan los números que figuran 'abajo'. ¿Tiene ganas de pensar usted? Verá que es sencillo y entretenido.

Ah, un dato más: la solución es única. Es decir, 'hay una única manera de distribuir estos dígitos tal que los resultados sean los que se indican a la derecha y abajo'. Ahora le toca a usted. Yo sigo.

Idea para pensar la solución

Hay muchas maneras de abordar el problema… muchas. Yo voy a proponer solamente una de ellas, la que me resultó más cómoda a mí, pero esto no significa que sea ni *mejor*, ni la *más efectiva*. Es solo *una* de las posibles.

Empiezo invitándola/lo a pensar en el número 5. De los seis números que figuran escritos antes de empezar a llenar los espacios vacíos, hay solamente *dos* que son múltiplos de 5: el 45 y el 120. ¿Qué indica esto? Como hay que ubicar al número 5 en alguna parte, cuando multiplique los números que lo acompañen en la fila y columna en las que yo lo coloque, tendremos que obtener un múltiplo de 5. Luego, esto determina que el número 5 tiene que ir en la segunda fila (ya que 120 es el producto de todos los que figuran allí) y en la primera columna (ya que 45 es también múltiplo de 5). Y no hay otros múltiplos de cinco salvo el 120 y el 45.

No hemos avanzado mucho, pero ya sabemos que el 5 tiene que ir en donde se cortan la primera columna y la segunda fila, como aparece en la Figura 2.

…	…	…	54
5	…	…	120
…	…	…	56
45	56	144	

Figura 2

Ahora ponga su atención en la primera columna de la Figura 2. Como el producto de los tres números que aparecen allí (uno de ellos ya sabemos que es el 5) tiene que resultar 45, el producto de los otros dos debe ser 9. ¿Cuántas formas hay de conseguir *nueve* al multiplicar dos números enteros positivos? En principio, dos: (3 × 3) o (1 × 9).

Seguro que no puede ser (3 × 3), porque los números no se pueden repetir, entonces forzosamente será el par (1 × 9). Bien, pero ¿dónde va el 1 y dónde va el 9?

Si ubicara al 9 en la tercera fila, el número 56 tendría que ser múltiplo de 9… ¡y no lo es! Por lo tanto, el número 9 tiene que ir en la primera fila (y eso es bueno, porque 54 *sí* es múltiplo de 9) y ubico el 1 en la tercera. En consecuencia, tenemos ya los números en la primera columna, tal como aparecen en la Figura 3.

9	…	…	54
5	…	…	120
1	…	…	56
45	56	144	

Figura 3

Con el mismo tipo de idea, en la última fila necesito ubicar al 7 y al 8, ya que ésa es la única forma de obtener 56 cuando multiplico dos números enteros positivos. Otra vez, ¿dónde va el 7 y dónde va el 8? (¿Quiere pensar usted en soledad?)

Si ubicáramos el 7 en la tercera columna, el número 144 tendría que ser múltiplo de 7, pero no lo es. Luego, esto determina que el 7 va en la segunda columna y el 8 en la tercera. Los resultados aparecen en la Figura 4.

9	…	…	54
5	…	…	120
1	7	8	56
45	56	144	

Figura 4

Ahora el camino es mucho más sencillo. En la segunda columna, sabemos que tienen que ir el 2 y el 4, ya que al multiplicar $2 \times 4 \times 7 = 56$. No sabemos todavía cómo ubicarlos, pero seguro que van allí. Sin embargo, si colocáramos el 2 en la segunda fila de la segunda columna, el producto de los números que figurarían en la segunda fila tendría tendrían que ser 5×2, lo que da 10. Pero el resultado final debe ser 120. Eso obligaría a que el dígito de la tercera columna fuera el número 12, y eso *no puede ser*. Luego, en la segunda fila tiene que ir el número 4 y en la primera, el 2 (ver Figura 5).

9	**2**	…	54
5	**4**	…	120
1	7	8	56
45	56	144	

Figura 5

Ahora falta ubicar el 3 en la primera fila (tercera columna) y el 6 en la segunda fila (también tercera columna) y el problema queda resuelto.

9	**2**	**3**	54
5	**4**	**6**	120
1	7	8	56
45	56	144	

Figura 6

Final

El problema resulta sencillo. Por supuesto que este tipo de 'crucigramas' ofrece múltiples variantes y otro tipo de alternativas, pero queda claro que *no hace falta tener ningún tipo de conocimiento previo*. Sólo hace falta pensar, proponerse distintos tipos de escenarios, prueba y error, conjeturar… de hecho, es una réplica numérica de lo que uno hace al vivir… ¿No es así?

Entrando por un ángulo diferente

Si un problema sirve para *enseñar* algo, para *pensar* algo que uno no pensó antes, ya valió la pena invertir algún tiempo en estudiarlo. Sacando la salud, supongo que el valor más preciado que tenemos es nuestro *tiempo*. Por eso que cada vez que escribo o hablo sobre algún problema en particular, me pregunto: "¿Será merecedor de dedicarle un rato de nuestra vida?".

No crea que la respuesta es siempre que *sí*. De hecho, cada vez más seguido decido descartar muchos de los que se me ocurren, o que veo y/o leo. No quiere decir que mi criterio sea válido, pero es el único que tengo.

Ahora quiero pasar al problema propiamente dicho. Verá usted (si es que le dedica justamente *su* tiempo) que, si bien uno tiene varias maneras de abordarlo, la que termine resolviéndolo habrá requerido 'entrarle por un costado distinto', algo así como 'entrar por la puerta de atrás'. Y si logro que eso le suceda, voy a sentir que la 'misión está cumplida'.

No sé si hace falta que agregue que es muy poco probable que uno se enfrente con un problema de este tipo en la vida cotidiana. Más aún: creo que es *casi* imposible. Sin embargo, el atractivo no reside en resolver *este* problema en particular. Lo que exhibe es la capacidad que tenemos los humanos de *pensar* *distinto*, usando herramientas que no sabíamos que teníamos. Ése *sí* que es un mensaje que vale la pena aprovechar. Bueno, suficiente introducción. Acá voy.

Suponga que usted se encuentra con una caja cuyas caras son rectangulares, como si fuera una caja de zapatos. Imagine además que le digo que las *caras* de la caja tienen estas dimensiones: una cara mide 165 milímetros cuadrados, otra mide 176 milímetros cuadrados y la última, 540 milímetros cuadrados. Atención: fíjese que escribí las áreas de cada cara y ***no*** las longitudes de largo, ancho y alto. Es muy importante que se detenga un instante a revisar lo que acaba de leer. Habitualmente, cuando a uno le dan las *medidas* de una caja (o de un objeto en tres dimensiones), suelen ser largo, ancho y alto, pero no estamos acostumbrados a que nos den las áreas. Dicho esto, fíjese en la Figura 1 y no se preocupe al leer 'milímetros cuadrados'. De hecho, no se deje mortificar por las cuestiones técnicas o logísticas. Lo único que importa es que uno conozca las áreas de cada cara de la caja.

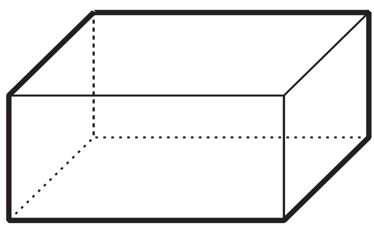


Figura 1

Ahora sí, repito la pregunta: con estos datos, ¿se puede deducir el **volumen** de la caja?

Dicho esto me voy a retirar. Yo sigo con el texto a continuación. Eso sí: si estuviera al lado suyo en este momento, le sugeriría que no *abandone* antes de dedicarle un rato. Es un problema interesante porque lo que uno está —creo— tentado de hacer inmediatamente agrega muchos inconvenientes al cálculo. En cambio, si uno se permite pensar 'de otra forma', la solución ciertamente *no* es complicada.

Una idea de solución

Como *anunciaba* antes, la tentación natural es tratar de encontrar cuáles son los valores de 'a', 'b' y 'c' que generan estos datos:

1) $a \times b = 165$
2) $a \times c = 176$
3) $b \times c = 540$

Dicho esto, no sé qué le pasó a usted, pero yo me tropecé de inmediato con este *problema*: para poder 'calcular' esos números necesitaba escribir un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas y después tratar de *despejar* los valores que serían las soluciones.

Luego de pensar un rato se me ocurrió una pregunta que quiero compartir con usted: ¿será *necesario* calcular los valores de *a*, *b* y *c* para determinar el volumen? Por supuesto, está claro que si uno ya los tiene, el volumen se obtiene inmediatamente multiplicando los tres números.

Pero ¿no habrá alguna otra forma de calcular el volumen de la caja sin que necesite conocer los valores de largo, ancho y alto? Aquí yo le propondría —otra vez— que piense en soledad por un rato.

Sigo yo. ¿Cómo hacer?

Le sugiero lo siguiente: multipliquemos los tres números que figuran en las igualdades (1), (2) y (3).

Se obtiene:

$$(a \times b) \times (a \times c) \times (b \times c) = 165 \times 176 \times 540 = 15.681.600$$

Si uno cambia el orden de los factores que aparecen en el lado izquierdo de la igualdad, ahora resulta:

$$(a \times a) \times (b \times b) \times (c \times c) = 15.681.600$$

Por lo tanto,

$$a^2 \times b^2 \times c^2 = 15.681.600$$

Y esto es un resultado 'muy bueno'. ¿Por qué? Si bien *no es el volumen que buscamos calcular*, estamos muy 'cerca'.

Fíjese que

$$a^2 \times b^2 \times c^2 = (a \times b \times c)^2 = 15.681.600$$

resulta ser ¡el cuadrado del volumen! Por lo tanto, bastará con extraer la *raíz cuadrada* de este número y listo.

Acá, o bien uno emplea una calculadora que permita obtener raíces cuadradas, o bien puede 'descomponer' el número 15.681.600 en sus factores primos hasta obtener:

$$\boxed{(a \times b \times c)^2 = 2^6 \times 3^4 \times 5^2 \times 11^2 \qquad (*)}$$

Curiosamente, en la descomposición que figura en (*), *todos* los factores aparecen un número *par* de veces. Por lo tanto, la raíz cuadrada se calcula muy fácil. ¿Cómo? Dividiendo por *dos todos los* ***exponentes*** que figuran en (*).

Como final entonces, descubrimos que el volumen que estábamos buscando es:

$$\boxed{(a \times b \times c) = 2^3 \times 3^2 \times 5 \times 11 = 3.960}$$

Lo interesante es que *no fue necesario calcular cada uno de los lados de la caja*, que hubiera sido la forma **natural** de intentar resolver el problema.

Pensándolo desde un lugar diferente pudimos encontrar la solución. Justamente por todo lo que escribí antes es que este problema merecía —creo— un 'lugarcito' en este rincón. Ojalá que usted lo haya disfrutado tanto como yo.

Curiosidad en *cualquier* torneo de básquet

Hace unos días, mientras preparábamos una nueva temporada de *Alterados por Pi*, la versión que se va a conocer recién en el año 2016, Juan Pablo Pinasco volvió a sorprenderme con una observación. Esta vez tiene que ver con los torneos de básquet. No hace falta saber nada de básquet, no se asuste. En todo caso, lo único que diferencia un torneo de básquet con uno de fútbol es que en el fútbol puede haber empates mientras que en básquet, no. Es decir, los equipos juegan todos contra todos pero los partidos *siempre* ofrecen un ganador. Si no alcanzó el tiempo reglamentario para decidirlo, se van agregando tiempos suplementarios de cinco minutos cada uno hasta que se defina un ganador. En todo caso, *esa sí* que es una diferencia con el fútbol. Pero de todas maneras, no es lo que me importa acá.

La observación de Juan Pablo vino por otro lado. Éste fue el diálogo:

—Adrián, ¿advertiste que en cualquier torneo de básquet se puede establecer una 'cadena'?

—¿Cadena? —pregunté yo—. No entiendo a qué te referís.

—Sí. Mirá. Suponé que hubieran jugado nada más que cuatro equipos, que voy a llamar A, B, C y D. Si jugaron todos contra todos, tiene que haberse formado una cadena así: A le tuvo que haber

> ganado a B, B a C y C a D. O alguna otra. Es decir, pudo haber sido C le ganó a A, A le ganó a B y B le ganó a D. O sea, tiene que ser posible detectar una manera de ordenar los equipos de forma tal que cada uno le fue ganando al siguiente. Y esto sucede no sólo para cuatro equipos sino para *cualquier número de participantes*.

Por supuesto que me pareció sorprendente y además, desafiante. ¿Cómo puede ser que esto sea posible y que uno nunca lo hubiera advertido? ¿Cómo se podrá demostrar que este planteo es cierto?

Y acá es donde quisiera dejarla/dejarlo pensando a usted. Me gustaría ofrecerle tiempo como para que haga lo mismo que me dediqué a hacer yo: pensar por qué eso habría de ser cierto, pero me apuro a escribir: ¡es cierto!

Eso sí: me pareció inesperado, más que nada porque uno cree que podría 'manipular' los resultados para que eso no sea cierto… y sin embargo, por más que intenté al principio, después empecé a sospechar que Juan Pablo tenía razón. A partir de allí, puse todo mi esfuerzo en tratar de probar que era cierto… hasta que lo logré. ¿Quiere intentar usted? Si no, yo sigo a continuación.

Una manera de pensar el problema

La idea que quiero proponerle seguramente será novedosa si usted nunca atendió a ningún curso de matemática con un poco de 'estructura'. ¿Qué quiero decir con esto? En general, en los colegios secundarios no se enseña a utilizar una herramienta poderosísima que la matemática ofrece. Pero en lugar de poner nombres que sólo van a venir a complicar y confundir, voy a presentar una forma de pensar el problema y luego resolverlo. Acá voy.

Voy a empezar con casos pequeños. Si en el torneo participaran nada más que dos equipos, digamos 1 y 2, el resultado es cierto obviamente, ya que o bien 1 le ganó a 2 o 2 le ganó a 1 y entonces la 'cadena' se forma así: 1-2 o 2-1. Este caso entonces es bien fácil.

Supongamos ahora que uno tiene tres equipos. Los voy a llamar 1, 2 y 3 para simplificar los nombres. ¿Cómo hacemos para comprobar que *seguro* hay una cadena al terminar al torneo?

Fíjese en lo siguiente. Voy a separar los casos:

1) Hay un equipo que le ganó a los otros dos.
2) Hay un equipo que perdió con los otros dos.
3) No se da ninguna de las dos situaciones anteriores.

Verá que estos tres casos abarcan *todos* los posibles. ¿Por qué?

Si no hay ningún equipo que ganó sus dos partidos ni ninguno que perdió sus dos partidos, eso significa que todo equipo tuvo que haber ganado uno y perdido otro. No quedan otras alternativas.

Voy a mostrar cómo se encuentra la cadena si hay un equipo que ganó sus dos partidos. Supongamos que fue el equipo 1. El equipo 1 le ganó a 2 y a 3.

En este caso, como 2 y 3 tuvieron que jugar entre sí, entonces o bien 2 le ganó a 3 o bien 3 le ganó a 2. Si 2 le ganó a 3, entonces la cadena queda armada así: 1-2-3.

Si 3 le ganó a 2, entonces la cadena queda: 1-3-2. En cualquiera de los dos casos el problema está resuelto.

Supongamos ahora que hay un equipo (digamos el 1) que *perdió* sus dos partidos. O sea, 1 perdió con 2 y con 3. Pero entre 2 y 3 tuvo que haber un ganador. Digamos que fue 2 (pero lo mismo sería en el otro caso). Entonces como 3 perdió sus dos partidos terminó último y tuvo que haber perdido con 3, pero como 2 le ganó a 3, entonces la cadena es: 2-3-1. Y listo. O sea, este caso está resuelto también.

La última alternativa que hace falta considerar es cuando no hay ninguno que haya ganado dos partidos ni perdido dos partidos. O sea, cada equipo tuvo que haber ganado uno y perdido otro. Supongamos entonces que 1 le ganó a 2 y perdió con 3. Pero como 3 no pudo haber ganado sus dos partidos, debió haber *perdido* con 2. Entonces, la cadena se forma así: 1-2-3. Y listo.

Luego, cuando hay tres equipos, *siempre* se puede encontrar una cadena.

Ahora bien. Hemos llegado a un punto en donde me gustaría hacer una observación junto a usted, y ésta es una de las *claves* de este tipo de demostración. Sígame y si se llegara a perderse en el razonamiento, deténgase y vuelva hacia atrás. Créame que vale la pena porque una vez que entienda lo que estoy haciendo, sentirá que usted mismo habrá agregado una herramienta a su arsenal para pensar situaciones que se le pueden plantear y, por supuesto, resolverlas.

En el ejemplo del torneo de básquet, nos convencimos de que si hay un torneo de *tres equipos* seguro que podemos encontrar una cadena. Ahora quiero mostrarle como, *sabiendo que uno puede resolver el problema para un torneo de tres equipos, puede usar esa información para encontrar una cadena en el caso de* ***cuatro*** *equipos.*

Una vez que nos hayamos convencido de eso, el ***mismo tipo de argumento*** servirá para encontrar una cadena en el caso de 5 equipos. Y luego de 6. Y así siguiendo. O sea, sabiendo *que es posible encontrar una cadena en el caso de 20 equipos, usted* *estará en condiciones de encontrar una cadena en el caso de que haya 21 equipos* (y usé 20 y 21 sólo como ejemplos). En realidad, sabiendo que uno puede encontrar una cadena en el caso de *n* equipos, uno está en condiciones de encontrar una cadena en el caso de *(n+1)* equipos.

Por eso es que es clave entender cómo encontrar la cadena en el caso de cuatro equipos ***sabiendo que uno la puede encontrar en uno de tres***.

Estos últimos párrafos son esenciales para lo que estoy tratando de hacer con usted. Entenderlos le servirá para lo que escribí anteriormente.

Ahora acompáñeme por acá y le voy a mostrar cómo se hace para 'encontrar' la cadena en el caso de cuatro equipos ***sabiendo*** que hay una para el caso de tres equipos.

Supongamos que los equipos se llaman 1, 2, 3 y 4. Separe uno de ellos, digamos el 1. Entonces quedan 2, 3 y 4. En el torneo que jugaron los cuatro, uno puede separar los partidos que jugaron entre estos tres (2, 3 y 4) excluyendo al 1. Eso sería como una suerte de *minitorneo* entre ellos tres. En este minitorneo de tres equipos, ***tiene*** que haber una cadena (seguro, porque son nada más que tres y ya sabemos que tiene que haber alguna). Digamos que fue así: 2-3-4 (cualquier otro orden en el que se hubiera dado resulta irrelevante para el argumento que estoy haciendo). Aceptemos entonces que la cadena entre estos tres equipos es 2-3-4.

Ahora analicemos juntos las posibilidades sobre *cómo* se puede insertar al 1 en esta cadena que ya existió. ¿Qué pudo haber pasado con el 1? Varios casos.

1. El 1 le pudo haber ganado al 2. Si eso es así, entonces construyo la cadena usando los cuatro equipos así: 1-2-3-4. O

sea, resuelvo el problema *agregando* el número 1 al principio de la cadena que ya existía entre 2, 3 y 4.

2. El 1 pudo haber perdido con el 4. En ese caso, lo agrego al final, y la cadena queda ahora 2-3-4-1.
3. Pero puede que no haya sucedido ninguna de las dos cosas: ni que el 1 le hubiera ganado al 2 ni que hubiera perdido con el 4. ¿Entonces? Tenemos la cadena 2-3-4. No puedo agregar el 1 al principio, pero puede que el 1 hubiera perdido con el 2. Yo estaría tentado de agregar el 1 después del 2, pero para poder hacerlo necesitaría saber *también* que el 1 le ganó al 3. Si el 1 le ganó al 3, listo. La cadena queda así: 2-1-3-4. Pero si el 1 *perdió* con el 3, entonces no lo puedo poner allí. ¿Dónde lo podría ubicar? Si el 1 le ganó al 4, entonces lo podría poner así: 2-3-1-4 y se termina el problema. ¡Y esto es lo que tuvo que pasar! ¿Por qué? Porque si el 1 hubiera perdido con el 4, entonces estaríamos en el caso (2) anterior. O sea, el 1 tuvo que haberle ganado al 4. Entonces, la cadena queda así: 2-3-1-4.

Moraleja: cuando uno tiene cuatro equipos *también* puede encontrar la cadena.

¿Y si tuviéramos 5 equipos? ¿Qué se hace entonces? Se usa la misma idea que recién para pasar de tres a cuatro. ¿Cómo?

Supongamos que los equipos se llaman 1, 2, 3, 4 y 5. Tomemos cuatro equipos cualesquiera y separémoslos. Digamos 2, 3, 4, 5. Éstos forman un minigrupo que estarían jugando un minitorneo de cuatro equipos. **Ya sabemos** que entre estos cuatro equipos *tiene que haber una cadena*. Digamos que fue así: 2-3-4-5.

Como antes, la idea es ver *cómo incorporar al número 1 en esta cadena*. Es muy fácil si el 1 le ganó al 2 (porque lo pongo adelante), o si el 1 perdió con el 5 (porque lo pongo al final de todo).

Pero si no fuera así, entonces empiezo desde adelante y me fijo cuáles son las posibilidades. Si el 1 no le ganó al 2, entonces —obviamente— perdió con el 2. Pero para poder intercalarlo en la cadena después del 2, necesito que el 1 le haya ganado al 3. Si le ganó al 3, listo. Sería así: 2-1-3-4-5.

En cambio, si *perdió* con el 3, querría ponerlo después del 3, pero para eso necesito que le haya ganado al 4. Si le ganó al 4, la cadena queda así: 2-3-1-4-5. Pero si el 1 *perdió* con el 4, entonces para poder intercalarlo después del 4, necesito que le haya ganado al 5. Si le ganó al 5, lo pongo así: 2-3-4-1-5.

Y el último caso sería que el 1 haya perdido también con el 5. La cadena queda así: 2-3-4-5-1.

Como se ve, la idea es ir analizando qué fue lo que pasó con el equipo que *no consideré* en un principio e ir viendo dónde lo puedo intercalar. Es *seguro* que en algún lugar voy a poder hacerlo y voy a aprovechar la cadena que *yo sé que existe* entre los cuatro restantes para poder encontrar un lugar en donde intercalarlo.

En definitiva, *ésa* es la demostración que estaba buscando. La idea entonces se basa en dos cosas:

1. uno aprende a encontrar una cadena en el caso de tres equipos. Eso hicimos al principio;
2. uno aprende cómo pasar de una cadena que involucra a n equipos a encontrar una cadena cuando el torneo tiene ahora $(n+1)$ equipos. Eso fue lo que hice al pasar de tres equipos a cuatro, luego de cuatro a cinco… y así siguiendo.

Esta herramienta *tan poderosa* es lo que se conoce con el nombre de *inducción completa*. Por supuesto que la/lo invito a que busque en la literatura que abunda sobre el tema, si es que está interesado en avanzar un poco más, pero a los efectos de este problema en particular —creo— es suficiente con la idea que presenté.

Como final, cuando escuché a Juan Pablo hablar del problema no sólo me interesó desde el punto de vista matemático, sino que me sorprendió que nunca se me hubiera presentado siquiera la duda sobre si eso era posible. Nunca escuché siquiera hablar sobre la posibilidad. Ahora, no sólo sí escuché, sino que además *sorprendentemente* ¡es cierto!

Apéndice

Quiero agregar un ejemplo más que puede servir para aclarar las ideas. Supongamos que uno sabe encontrar 'cadenas' cuando el número de participantes es *menor o igual que* 30. ¿Cómo hace para encontrar una cadena cuando el torneo tiene 31?

Proceda así. Primero, separe uno cualquiera de los 31 equipos y llámelo 'equipo 31'. Entre los 30 restantes, estarán los que 'le ganaron a 31' y los que 'perdieron con 31'. Es decir, quedan conformados dos grupos, de manera tal que cada uno *tiene* ***a lo sumo*** *30 equipos*.

1. Si los que 'perdieron con 31' son los treinta restantes, entonces ponga al 31 primero y use la cadena que *seguro tiene que existir* entre los otros 30. Ésa es la cadena de 31 equipos que estamos buscando.
2. Si los que 'le ganaron a 31' son los otros 30 equipos, entonces encuentre la cadena que tiene que existir entre esos 30 y agregue al 31 al final de todo. De esa forma encuentra la cadena con los 31 que buscábamos.

3. Ahora, suponga que hay algunos que 'le ganaron a 31' y otros que 'perdieron con 31'. Para fijar las ideas, supongamos que son 10 los que le ganaron y 20 los que perdieron. Recuerde que ya sabemos cómo construir cadenas si tenemos *estrictamente menos que 31 equipos*. Usemos esa herramienta. Por un lado, construimos la cadena de los 10 que le ganaron a 31 y por otro, encontramos una *segunda cadena* de los que *perdieron con 31*. ¿Cómo armar la cadena con los 31 equipos ahora? Escriba primero la cadena de los 10 que le ganaron al 31. Agregue ahora al 31 al ***final*** de esa cadena. Después del 31, siga con la cadena completa de los 20 que perdieron con 31, y de esa forma acaba de construir la cadena que buscábamos.

Como se advierte, es importante usar que uno ya sabe *construir cadenas* cuando el torneo tiene *cualquier número de equipos* ***estrictamente*** *menor que 31*, pero ahora, usando este proceso, encuentra cómo armarlas cuando en total son exactamente 31[35].

35. Para aquellos que tengan algún conocimiento sobre Teoría de Grafos, quiero agregar acá un aporte de Juan Sabia: "Puesto en términos de Teoría de Grafos, lo que vos demostraste con el problema del básquet es que *en todo grafo completo orientado se puede encontrar un camino que pasa por todos los vértices una sola vez. Es lo que se llama un 'camino hamiltoniano'. En el caso que vos describís, el torneo es el grafo, los equipos son los vértices y la flecha que los une (a los vértices) sale del que gana hacia el que pierde. El grafo se llama* ***completo*** *porque todo par de equipos juega entre sí y es por eso que siempre hay una flecha que los une*".

Bolas de billar[36]

El que sigue es un problema que parece ingenuo pero que, en su versión más general, presenta algunas dificultades técnicas que lo hacen muy interesante. Voy a empezar por el lugar más sencillo.

Suponga que usted tiene seis bolas de billar pero de las que se usan para jugar al pool. Por lo tanto, cada bola tiene un número. En este caso digamos que están numeradas del 1 al 6. Deténgase un instante en la Figura 1.

36. Aquí quiero agregar un breve texto que me escribió Carlitos Sarraute después de leer el artículo. Lo transcribo tal como me lo envió. Vale la pena: "Me gustó mucho el artículo 'Bolas de billar'. Te confieso que me lo tomé como un ejercicio de programación (como la mayoría de los problemas que implican probar muchas combinaciones). Hice un programa que prueba todas las combinaciones de números para la primera fila, y luego valida las filas siguientes (valida que los números que surgen de las diferencias no hayan sido usados). Tal vez podés hacer una pequeña incitación, para los lectores que sepan programar, que agarren la compu y hagan un programita". Espero que si a usted le interesa la programación, aproveche el problema entonces para escribir un programa como el que propone Carlos.

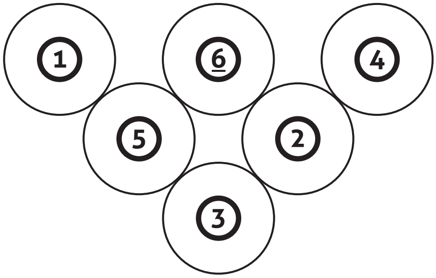


Figura 1

Fíjese que sacando las que aparecen en la primera fila (que no siguen ningún patrón en particular), las restantes bolas están numeradas de tal forma que las dos que tienen arriba difieren en el número de esta bola. Por ejemplo, la número 5 está por debajo (y tocando) a las que llevan los números 1 y 6 (y (6 – 1) = 5). De la misma forma, la número 2 está ubicada debajo (y tocando) a las bolas 6 y 4, ya que justamente (6 – 4) = 2.

Por supuesto, con esta configuración uno podría conseguir inmediatamente otra como si la miráramos en un espejo. Se obtendría lo que aparece en la Figura 2.

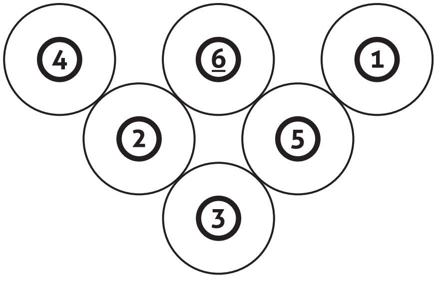


Figura 2

En este caso, me gustaría decir que las dos configuraciones que aparecen en las figuras 1 y 2 están 'relacionadas' o que son 'dependientes'. Cualquiera de ellas podría ser considerada 'primitiva' u 'original'. La otra es simplemente una imagen especular, o bien, la que se obtiene al enfrentarla a un espejo.

Ahora, uno puede hacerse la siguiente pregunta: ¿habrá otras configuraciones primitivas además de ésta? (o sea, que no se puedan *obtener* por imágenes especulares de las que aparecen en las figuras 1 y 2).

Ahora voy a hacer lo mismo en el caso que tuviera bolas numeradas del 1 al 10. En este caso, el esquema que uno puede producir es el que aparece en la Figura 3.

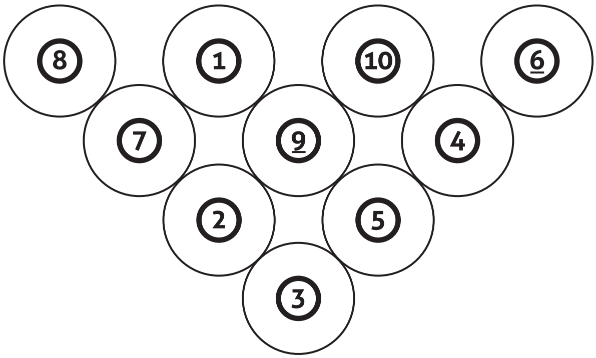


Figura 3

Por supuesto, igual que en el caso de seis bolas, uno podría reflejarla en un espejo y en ese caso obtendría su 'gemela':

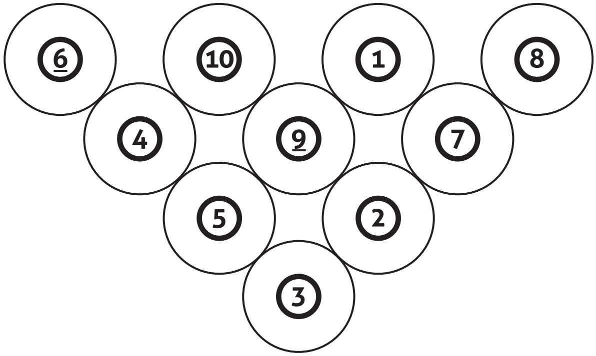


Figura 4

Igual que en el caso anterior cuando, las figuras 3 y 4 son 'especulares'. Otra vez la misma pregunta: ¿habrá algunas otras configuraciones?

Ahora bien: luego de haber fijado las ideas, le propongo lo siguiente:

1. Trate de encontrar otras tres configuraciones 'primitivas' o 'independientes' para el caso de seis bolas.
2. Lo mismo para el caso de diez bolas: intente encontrar otras tres configuraciones primitivas.
3. Ahora, piense lo mismo en el caso de 15 bolas numeradas del 1 al 15. En esta situación, se tienen cinco en la primera fila, cuatro en la segunda, tres en la tercera, dos en la cuarta y una en la quinta. Se sigue el mismo proceso que cuando uno tenía seis y diez bolas respectivamente. ¿Se podrá encontrar al menos *una* configuración posible? La respuesta es que sí, que hay una. Técnicamente es un poco más complicado de ubicarla, porque hay muchas más variantes a considerar, pero los razonamientos son similares.

Eso sí, y esto es muy importante y le pido que lo lea: se *sabe* (y es muy difícil de probar) que hay **solamente una forma de ubicar las 15 bolas cumpliendo con las restricciones que pedí antes**.

Más aún: también hay una demostración de que ¡no se puede conseguir con triángulos que contengan más bolas que 15![37] Estas demostraciones son muy interesantes y le sugiero al lector interesado que no deje de revisar la bibliografía sugerida. Lamentablemente me gustaría poder aportar algo más, pero en todo caso, lo único que puedo hacer es *ayudarla/ayudarlo* a apuntar en la dirección correcta.

Soluciones

No creo que pueda aportar mucho más que lo que uno logra cuando intenta con 'prueba y error'. No sabría cómo ofrecerle algo que pueda cooperar con su búsqueda más que escribir las soluciones propiamente dichas. Pero en ese caso, ¿qué gracia tendría para usted si las leyera directamente? ¿Qué se habría agregado a usted mismo? Me parece que lo mejor que puedo hacer es mostrarle las soluciones que le dije que existían. El resto de los argumentos se los dejo a usted.

---

37. La bibliografía se puede encontrar en el artículo de Charles W. Trigg ("Absolute Difference Triangles") que apareció en *The Journal of Recreational Mathematics*, vol. 9 (4), 1976-1977; y también en un libro que publicó Martin Gardner: *From Penrose Tiles to Trapdoor Ciphers*. En este libro, Gardner dice (la traducción corre por mi cuenta): "La única demostración que conozco de que esta conjetura es cierta aparece en un artículo llamado 'Exact Difference Triangles' ['Triángulos con diferencias exactas'], que apareció en el *Bulletin of the Institute of Mathematics*, Academia Sinica, Taipéi, Taiwán (vol. 5, junio de 1977, pp.191-197)".

Acá van las soluciones.
En el caso de seis bolas:

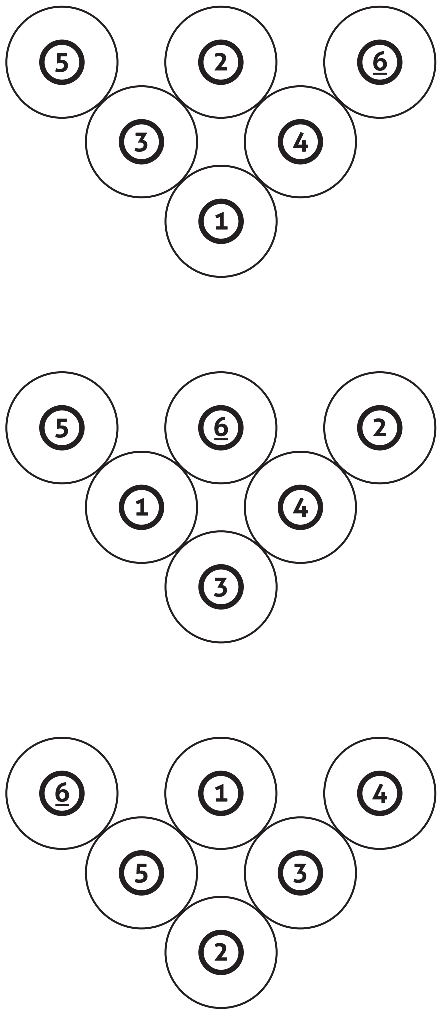


Figura 5

Fíjese que estas tres configuraciones son primitivas en el sentido que escribí anteriormente: no se pueden obtener unas de otras mirándolas en un espejo.

A continuación escribo ahora otras tres configuraciones primitivas en el caso de diez bolas. Fíjese si puede extraer *algún patrón* que le permita ir *deduciendo* lo que tiene que pasar en cada caso. De hecho, tanto en el caso de seis bolas como en el de diez, el número mayor *tiene* que ir en la primera fila (porque no se podría obtener como diferencia de ninguna otra manera). Por otro lado, también en la primera fila tiene que ir o bien el segundo mayor (el *cinco* y el *nueve* respectivamente) o si no, *tiene* que ir el *uno* al lado del mayor. No me parece que sea de gran ayuda que yo aporte estos datos. Lo único que puedo sugerirle es intentar e intentar, probar y probar. Solamente el error sirve para descubrir por dónde encarar cada posibilidad.

Éstas son las otras tres configuraciones en el caso de diez bolas.

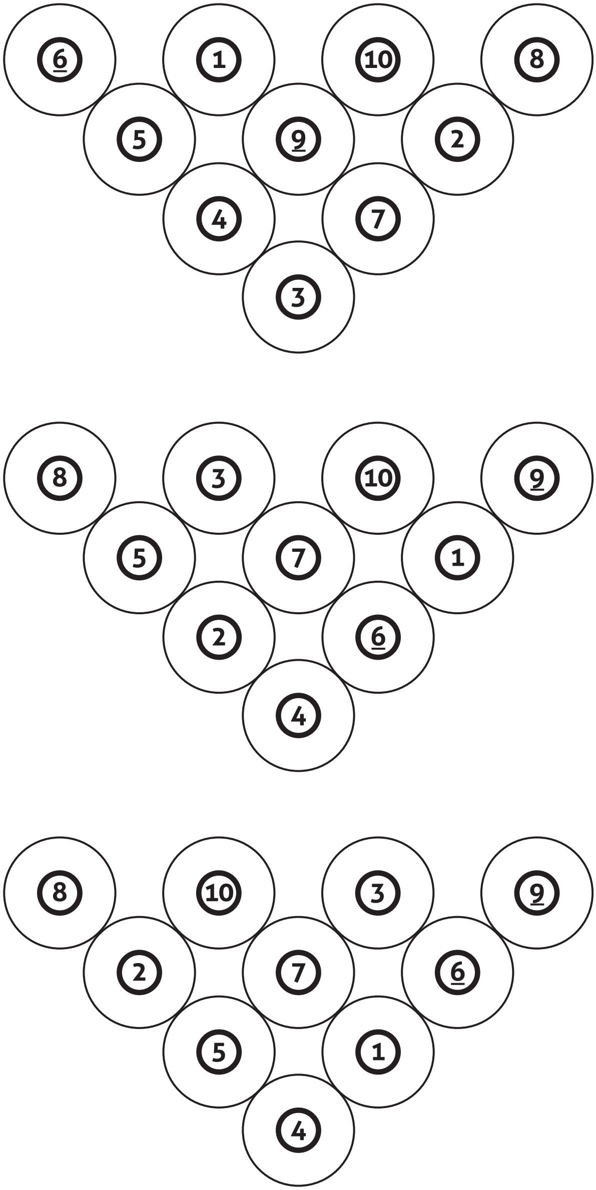


Figura 6

Por último, acá va la única forma posible para el caso de 15 bolas:

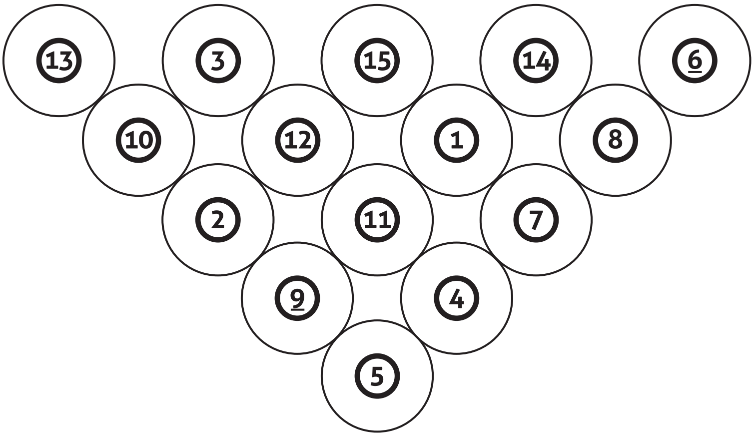


Figura 7

Huevos de Pascua

Este problema pretende invitarla (o invitarlo) a pensar en algo que podría estar haciendo un mago.

Suponga que tiene dos sombreros iguales. En cada uno de los sombreros hay 12 huevos de Pascua. Los huevos de cada sombrero están pintados de tres colores distintos en igual número: cuatro amarillos, cuatro rojos y cuatro verdes. Es decir, en total hay 24 huevos.

Lo invito a que se acerque a los dos sombreros y le tapo los ojos con un pañuelo de manera tal que no pueda ver nada de lo que va a hacer.

Ahora le pido que elija cinco huevos cualesquiera del sombrero 1 y los pase al sombrero 2.

Una vez que lo terminó de hacer, yo cambio de lugar los huevos dentro del sombrero 2 para que usted no pueda seguir el rastro de lo que hizo anteriormente.

Le pido después que vuelva a poner su mano en el sombrero 2 (en donde ahora hay 17 huevos) y que extraiga de él la ***menor*** cantidad de huevos que necesita pasar del sombrero 2 al sombrero 1 de manera tal de tener la garantía que en el sombrero 1 ahora hay *por lo menos* ***tres*** *huevos de cada color*.

¿Cuántos le parece que habría que pasar?

Si no hubiera ninguna restricción, usted pasaría todos y se terminó el problema, pero la pregunta es ¿cuál es el número ***mínimo*** que uno tiene que pasar para garantizar que por lo menos en el sombrero 1 habrán quedado tres huevos de cada color?

¿Quiere pensar la solución?

Solución

Por supuesto hay muchos posibles escenarios en donde el número de huevos que usted tendría que elegir del sombrero 2 sería bastante chico, pero como usted *no puede ver* lo que transfirió, necesita imaginar qué sería lo peor que le podría haber pasado y en ese caso, cómo resolverlo.

Pensemos juntos. ¿Cuál será?

El peor[38] caso sería si usted hubiera sacado *todos* los amarillos (por elegir un color) y uno rojo. Ahora ¿cuántos necesitaría pasar del sombrero 2 al sombrero 1? Antes de contestar, fíjese que en este caso quedaron distribuidos así:

En el sombrero 1:
Cero huevos amarillos
Tres huevos rojos
Cuatro huevos verdes

Del otro lado, en el sombrero 2, quedarían:
Ocho huevos amarillos
Cinco huevos rojos
Cuatro verdes

38. Escribo 'peor' para indicar la situación de mayor dificultad para resolver. O sea: 'si somos capaces de resolver *este* caso, todos los demás que pudieran presentarse deberían ser más sencillos'.

Si usted metiera la mano en el sombrero 2 y sacara nada más que *nueve* huevos y los pasa al sombrero 1, usted podría tener tanta *mala suerte* de sacar los cinco rojos y los cuatro verdes. Cuando los ponga en el sombrero 1, ¡no tendría ningún huevo amarillo!

Por lo tanto, necesita llevarse *exactamente* tres huevos más. Con *doce* huevos usted se garantiza que aunque haya elegido todos los rojos y todos los verdes que hay en el sombrero 2 (y que suman nueve), los restantes tres *tienen* que ser amarillos y, por lo tanto, resuelve el problema.

Es decir, haya elegido lo que haya elegido en el primer pase (del sombrero 1 al 2), el número mínimo que tiene que pasar del sombrero 2 al sombrero 1 para garantizarse tener por lo menos tres huevos de cada color es ***doce***[39].

---

39. Fíjese que si usted retira dos amarillos, cinco rojos y cuatro verdes (que suman 11 huevos) y los pasa del sombrero 2 al sombrero 1, en ese caso, no quedan tres del mismo color como pedía el problema. Este caso sirve para convencerse que *doce **es*** el mínimo.

Araña

Suponga que uno tiene una caja que es un cubo perfecto que mide 1 metro de lado. Usted sabe que una araña recorrió ‘la base’ de esta caja (los cuatro lados) y tardó 4 minutos.

Pregunta: si la araña recorriera la caja eligiendo *el camino más corto posible* y a la misma velocidad que había recorrido la base, ¿cuánto tardaría en ir desde A hasta B?

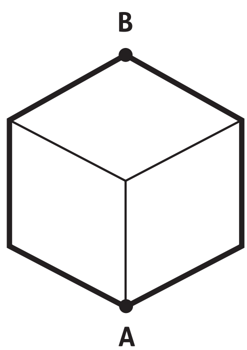


Figura 1

Respuesta

Fíjese en la Figura 2.

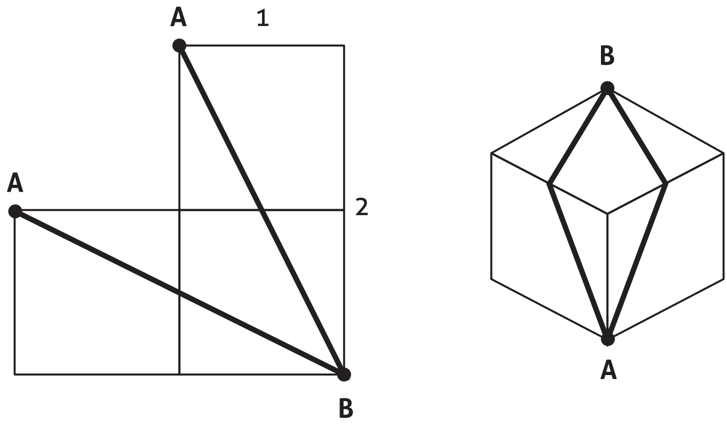


Figura 2

La araña tiene dos rutas alternativas dependiendo de cuál de las caras verticales va a utilizar.

Para 'visualizar' mejor la situación, le propongo que 'aplanemos' las caras que resultan relevantes, digamos la cara superior y las dos posibles verticales.

La ruta más corta es elegir el segmento que une A con B (que corta la arista en el punto medio pero eso no tiene importancia para la solución del problema) recorriendo una de las dos verticales y la cara superior.

Por el teorema de Pitágoras uno deduce que desde A hasta B la longitud es:

$$\sqrt{(1^2 + 2^2)} = \sqrt{(5)} \text{ (aprox.)} = 2{,}236\ldots \ (^*)$$

De acuerdo con lo que sabíamos al comienzo del problema, la araña tarda cuatro minutos en dar una vuelta alrededor de la caja si va recorriendo las aristas de la base. Por lo tanto, tarda un minuto por lado. Si la araña tratara de llegar desde A hasta B yendo *nada más que por las aristas*, tardaría *tres minutos*.

Fíjese en la Figura 2: parte desde A, recorre la arista que sale hacia su derecha hasta llegar a la primera esquina (y tardó un minuto para hacerlo). Después, sube por esa arista hasta ubicarse justo enfrente de B. Lleva dos minutos. Por último, camina hasta B por la tapa de arriba usando esa arista. En total tarda **tres minutos**.

En cambio, usando el camino que aparece en la Figura 2 y el cálculo que aparece en (*), el tiempo ahora se reduce a 'un poco menos' de 2 minutos y 15 segundos[40].

Apéndice

Si prefiere generalizar el problema y pensar que en lugar de que el cubo mida un metro de lado, cada arista mide *d* metros, entonces todo lo que hay que hacer es cambiar la igualdad que aparece en (*). Quedaría así:

$$\text{(raíz cuadrada)}\ (d^2 + 4d^2) = d \times \text{(raíz cuadrada)}\ (5)$$

Como sabríamos que a la araña le lleva *un minuto* recorrer la distancia *d*, eso significa que ir desde A hasta B le llevaría (raíz cuadrada) (5) minutos, o sea, una vez más, menos de 2 minutos y 15 segundos.

40. ¿Por qué 15 segundos? Porque la raíz cuadrada de cinco es (aproximadamente) igual a 2,236... o sea, no llega a ser 2,25, que sería *exactamente 2 minutos y 15 segundos*. Piense que 2,50 es equivalente a 2 minutos y medio mientras que 2,75 es 2 minutos y 45 segundos.

No hay empates en este juego

Le voy a proponer un juego en el que participan dos personas. Fíjese en la Figura 1.

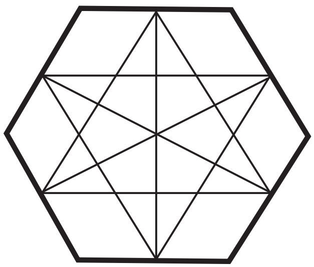


Figura 1

Usted juega con un color y yo con otro. Decidimos quién empieza y nos vamos turnando. Al jugador que le toque el turno tiene que *colorear* alguno de los 15 segmentos que allí figuran[41].

Seguimos avanzando hasta que en algún momento, sea cuando le toca a usted o a mí pintar alguno de los segmentos, inexorablemente quedará formado un triángulo (dentro de la Figura 1) cuyos

41. Los segmentos tienen que tener sus dos extremos en los vértices del hexágono.

lados serán del mismo color. Cuando esto sucede, el jugador que tenía ese color… ¡pierde!

Por ejemplo, supongamos que usted juega con el color rojo y yo con el verde. No importa quién de los dos empieza, pero vamos coloreando un segmento cada uno. Si en algún momento yo descubro que cuando me toque mi turno y tenga que pintar alguno de los segmentos de color verde, *todos los que quedan aún sin pintar me obligarán a dejar un triángulo con los tres lados de color verde*, entonces… ¡yo pierdo!

Al revés, si en alguno de sus turnos, cuando le toca pintar un segmento que queda libre, usted detecta que haga lo que haga va a quedar pintado un triángulo con las tres aristas de color rojo, entonces el que pierde es usted.

La idea del juego entonces es que cada participante 'trate' de evitar que quede un triángulo con *su* color.

Ahora tengo algo para proponerle que me parece interesantísimo: no importa cómo hayamos jugado usted y yo (o cualquier otro par de participantes), *siempre tiene que haber un ganador*. ¡No puede haber empates! No importa cómo hayamos jugado, inexorablemente uno de los dos ganó o bien antes que termináramos de colorear todos los segmentos o cuando lleguemos al final y ya no quede ninguno sin pintar.

¿No es notable este desafío? ¿Quiere dedicarle un rato a pensar por qué? Créame que vale la pena.

Idea para resolver el problema

Quiero proponerle *una* forma de abordar el problema que usa alguna de las herramientas de la matemática que no son visiblemente exploradas durante los primeros años de nuestras vidas. Se trata de una herramienta tan poderosa que es una lástima que no esté al alcance de todos desde que somos bien pequeños. Sígame por acá.

Lo que voy a hacer es mostrar que si el juego terminó, es decir, si llegamos hasta el final es porque en algún momento *tiene que haber habido un triángulo con los tres lados rojos o los tres lados verdes*. Verá por qué.

Tome un vértice cualquiera de la Figura 1. Lo voy a llamar A pero el argumento que voy a hacer sirve para cualquiera.

El *tablero* en el que vamos a desarrollar el juego es un hexágono. Por lo tanto, cualquiera sea el vértice que elijamos de allí tienen que *salir* (o *llegar*) cinco segmentos.

Ahora bien: como son cinco segmentos y tenemos dos colores (rojo y verde) para pintar, tienen que haber por lo menos tres de un color. Podrían ser más, pero *seguro* que tiene que haber tres verdes o tres rojos[42].

Supongamos que hay tres verdes. Les voy a poner nombres a los vértices a los cuales llegan los segmentos que se originan en A. Los voy a llamar B, C y D. Sabemos entonces que los segmentos AB, AC y AD están pintados de verde. Fíjese en la Figura 2 para que pueda seguirme en el argumento.

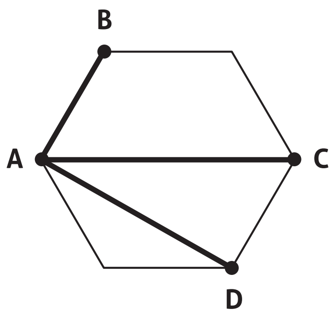


Figura 2

42. Es que si hubiera dos pintados de rojo y dos pintados de verde, el segmento que falta *tiene* que ser o bien verde o bien rojo. Luego, *seguro* que hay tres de un mismo color (por lo menos).

Le propongo ahora que pensemos algo juntos. Fíjese en la Figura 3. He marcado con una línea punteada tres segmentos más: BC, CD y BD.

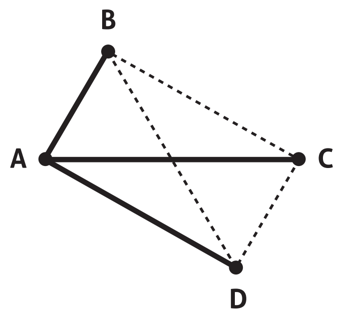


Figura 3

Si *alguno* de estos tres segmentos fuera de color verde, ¡listo! ¿Por qué? Porque si BC fuera verde, entonces junto con AB y AC tendríamos un triángulo con todos los lados 'verdes'. Si el segmento CD fuera verde, entonces el triángulo con lados AC, AD y CD sería 'verde' también. Y por último, si el segmento BD fuera verde, entonces el triángulo con lados AB, AD y BD sería 'verde' y habríamos encontrado un triángulo de lados del mismo color.

Pero… si ninguno de los tres segmentos fuera verde, entonces habríamos descubierto que BC, CD y BD son los tres segmentos rojos. Como además *forman un triángulo*, entonces, mientras estábamos en la búsqueda de un triángulo verde y fracasamos en este intento, descubrimos en el camino un triángulo *rojo*. ¡Y eso también sirve! ¿Por qué? Porque el objetivo *no era encontrar un triángulo de color verde, sino ¡un triángulo con los tres lados del mismo color!* No importa que fuera de color rojo o de color verde, todo lo que necesitábamos era corroborar que si no hay uno verde, entonces tiene que haber uno rojo. Esto termina por demostrar que el juego **no pudo haber terminado en un empate**, ya que el juego debió tener un triángulo de alguno de los dos colores.

Y eso es todo. Luego, seguro que no hubo empate.

Moraleja final

La solución que acabamos de recorrer juntos me resulta fascinante porque es una aplicación de la matemática muy sutil. Lo que hicimos fue 'modelar' el problema de manera tal de convencernos de que tenía que haber un triángulo de algún color sí o sí. Haber separado un vértice, advertir que como hay dos colores y salen cinco segmentos tiene que haber tres del mismo color y avanzar desde allí parece un camino sencillo. No es que no sea simple: lo es una vez que uno conoce qué es lo que se podía hacer. Con todos los datos arriba de la mesa, *todo siempre parece más fácil*.

Éste es el tipo de entrenamiento que —me parece— sirve para educarse. No creo que nunca nadie tenga que pensar este problema en la vida cotidiana o, en todo caso, es muy poco probable que suceda. Pero haber recorrido este tipo de caminos permite que, en algún momento, cuando uno menos lo espera pueda apelar a una caja de 'herramientas intelectuales' y extraer *justo* lo que le hacía falta.

Por eso la importancia que quiero darle. Y por eso también le sugiero que no pierda de vista lo que usted fue capaz de hacer… sí, usted. Le aseguro que tiene mucho más valor del que somos capaces de detectar ahora.

Un aporte a la *matemagia*

Ahora uno de ‘magia’. Es decir, de *matemagia*. Le sugiero que lea lo que hay que hacer con una lapicera y un papel de manera de ir *practicando* lo que voy a proponerle. Como no estoy junto a usted, no la/lo voy a poder sorprender, pero estoy seguro de que podrá ponerse el ‘traje de mago’ por unos minutos y convencer a sus amigos de que ahora tiene *poderes que antes no tenía*.

Primero, fíjese en esta lista de números. Están ordenados en tres filas:

3651	5208	2832	6081	9114
8416	5932	7084	5176	2908
2965	9832	7618	8095	3649

Usted elegirá cuatro amigos para que participen. Por supuesto, pueden ser menos, pero la idea es que cuantos más se involucren, más se sorprenderán con el resultado. Llamemos A, B, C y D a las personas.

Les va a pedir que A, B y C vayan eligiendo números de la manera que usted les irá indicando. D será quien escriba en un papel las elecciones que hagan los otros tres.

Mientras tanto usted anotará en un papel el número (que no develará pero yo le digo cuál será) y se lo dará a una quinta persona. El número que usted anotó es 1.712. Como decía antes, ese número no lo podrá ver nadie hasta que termine el ‘juego’.

Ahora, A, B y C eligen cada uno un número de cada fila. Es decir, A elegirá uno de la primera fila (cualquiera de los cinco números), B elegirá uno de la segunda fila (también, uno cualquiera de los cinco) y C elegirá uno de la tercera fila.

A los efectos de poder *seguir* el juego, yo voy a hacer una selección como si estuviera con ustedes, pero es nada más que un ejemplo. El ‘truco’ funciona con cualquier decisión sobre los números que tomen, siempre y cuando cada uno elija un número de cada fila.

Supongamos entonces que los tres números elegidos por A, B y C son éstos:

A eligió 3651
B eligió 8416
C eligió 2965

Usted le pide a D que ubique los tres en una misma línea. Se verá lo siguiente:

3651 8416 2965

Ahora se pone un poco más interesante.

Usted le pide a A que elija un dígito cualquiera de cada uno de los tres números y se los diga a D, quien los va a anotar a un costado. Por ejemplo, supongamos que A elige el *seis* del primer número, el *cuatro* del segundo número y el *cinco* del tercer número. Es decir, estos tres números conforman el número 645. D los anota a un costado y ‘tacha’ esos dígitos de cada uno de los números. Es decir, ahora, en el papel que tiene D se puede leer lo siguiente:

3_51   8_16   296_   **645**

El número 645 es el que queda formado con los tres dígitos que eligió A.

Ahora, usted le pide a B que haga lo mismo que A con los dígitos que quedaron. O sea, tiene que elegir *un* dígito cualquiera de cada uno de los números. Supongamos (a los efectos de seguir el ejemplo) que B elige el *cinco* del primer número, el *ocho* del segundo y el *nueve* del tercero. Mientras tanto D, anota los tres números (en orden) que fue seleccionando B. Luego, en el papel de D queda esta situación:

3__1   __16   2_6_   **645**
589

Ahora le toca el turno a C, que hace lo mismo: selecciona un dígito de cada uno de los tres primeros números. Quedará conformado un nuevo número de tres dígitos que D va a anotar *debajo* de 645 y 589. Supongamos que C elige el *tres* del primer número, el *uno* del segundo y el *seis* del tercero. Queda formado el número 316 que D va a anotar donde indiqué antes. El papel de D queda así:

___1   ___6   2___   **645**
589
316

Entonces D, junta los tres dígitos que quedaron de cada uno de los números (el *uno*, el *seis* y el *dos*), forma el número 162 y lo ubica debajo de 645, 589 y 316. Queda así:

645
589
316
<u>162</u>

Ahora, le pide a alguien que *sume* los cuatro números (hágalo usted también ahora). Al mismo tiempo, le sugiere a la persona que tenía el sobre con el papel en el que usted había anotado el número 1.712 que lo haga visible para todos.

No hace falta (o sí) que diga que la suma de los cuatro números efectivamente es 1.712.

Ahora, lo que hace falta es *determinar por qué funciona*. Es decir, lo sorprendente es que con tanta *libertad* para elegir los dígitos, ordenarlos, con tanta gente que en principio no tiene ninguna conexión haciendo elecciones tan independientes, ¿por qué usted pudo determinar el resultado (1.712) mucho antes que ellos mismos supieran qué números iban a elegir?

Yo voy a escribir la respuesta a continuación pero querría hacer un acuerdo con usted: ¿no le interesa recorrer el procedimiento y fijarse por qué funcionó?

Plan de acción

Para ayudarla/lo, le propondría que haga una suerte de *plan* de acción.

Primero, trate de seguir los pasos que fuimos dando juntos.

Después, fíjese qué hubiera pasado si había algunos cambios en la elección de los dígitos.

Trate de determinar cuáles son los *invariantes* en el proceso. Es decir, de los dígitos y/o números que fueron eligiendo cada uno, ¿cuáles estaban determinados y cuáles no? Por ejemplo, cuando A eligió un número para empezar, ese número tenía que ser seleccionado de la primera fila. Aunque parezca un detalle menor, no lo es. Le sugeriría que busque si hay alguna constante entre los cinco números que aparecen allí. ¿Y qué será constante entre los números que hay en la segunda y/o la tercera?

Creo que este plan le puede dar una idea de las razones por las que todo va a converger en el número 1.712.

Con la misma idea, fíjese si es posible establecer algunas determinaciones que A, B y C fueron tomando, y que si bien ellos pudieron pensar que elegían libremente, en realidad estaban inducidos por la forma en la que usted les presentó el problema para que hicieran lo que *usted quería que hicieran*.

Ahora voy a ahondar un poco más. Usted decide dónde se detiene en la lectura para luego reanudar, o si prefiere no detenerse y leer directamente la solución.

Solución

Primera observación:

Tome los números que figuran en la primera fila: 3651, 5208, 2832, 6081 y 9114. Sume los dígitos de cada uno de ellos. El resultado *en* ***todos*** *los casos* es el mismo: 15

Ahora, haga lo mismo con los números que figuran en la segunda fila. La suma en *todos* los casos *también* es la misma: 19.

En el caso de la tercera fila, los dígitos de cada número suman lo mismo, sólo que ahora el resultado es 22.

Fíjese que no es un dato menor, porque finalmente, una vez que lleguemos al final, se tratará de hacer una suma (que es la que terminará dando 1.712).

Segunda observación:

Los números que eligieron A, B y C para empezar el juego fueron:

A eligió el 3651
B eligió el 8416
C eligió el 2965

Ahora concentre su atención en los números que quedaron luego de que cada uno de ellos (A, B y C) hizo sus selecciones:

645
589
316
<u>162</u>

Fíjese en los números que forman cada una de las tres columnas.

La primera columna la forma el número 6531, la segunda, 4816 y la tercera, 5962.

Dos observaciones:

1. Cada una de las columnas es una *permutación* de los números que eligieron A, B y C. La primera columna (6531) es una permutación de los dígitos del número que había elegido A: 3651. La segunda columna (4816) es una permutación de los dígitos del número que había elegido B: 8416. Y la tercera columna (5962) es una permutación de

los dígitos del número que había elegido C: 2965. Es decir, ¡aparecen los tres números *que había elegido cada uno, sólo que los dígitos están en distinto orden*!

2. ¿Recuerda lo que sucedía con las sumas de los dígitos de *todos* los números que aparecían en la primera fila? Sí, *todos* sumaban 15. Los de la segunda, sumaban 19 y los de la tercera, 22.

Luego de leer estas dos observaciones, fíjese entonces que usted los fue conduciendo para que eligieran un número de cada fila (que suman 15), luego de la segunda (que suman 19) y los de la tercera (que suman 22).

Después, usted les dijo que fueran eligiendo dígitos de manera tal que formaran números de tres dígitos, pero como usted sabía que al final los pondrían uno debajo de otro, terminarían formando *los mismos números originales* pero con los dígitos permutados. Aunque lo *más importante* es que las *sumas permanecieron constantes*.

Luego, cuando uno *tiene que hacer la suma* termina eligiendo los dígitos del primer número (y a los efectos de sumarlo, no importa el orden). Por eso, cuando usted suma 5, 9, 6 y 2, el resultado da 22. Allí tendrá que ubicar el número *dos* y se 'lleva' dos para seguir sumando. Como los números de la siguiente columna suman 19, cuando usted les agregue *dos* totalizarán 21. Usted ubicará el *uno* y se 'llevará' dos otra vez. Este 'dos' tendrá que agregarlo a la suma que efectuará con los dígitos de la primera columna… que como ya sumaban 15, con los dos que usted agrega, resultará en el 17.

Juntando todo esto, inexorablemente la *suma de los cuatro números* termina dando lo que usted sabía de entrada: 1.712.

Esto termina la explicación. Aspiro a que me haya seguido y, mucho más allá de poder replicarlo con sus amigos, lo interesante sería que *usted pueda proveerse sus propios ejemplos*. Es decir, siguiendo la idea anterior, estoy seguro de que usted podrá fabricar otras listas, con otras sumas, con otros dígitos… pero en esencia, la idea será la misma. ¿No le dan ganas de probar? Aunque lo haga sin amigos, inténtelo en soledad. Verá que si puede idear alguna nueva propuesta, no sólo tendrá un nuevo 'truco', sino que habrá incorporado algunas herramientas intelectuales más a las que ya tenía. Aunque sea solo por eso, ¿no valió la pena prestar atención y fabricarse uno mismo *su* propio ejemplo?

Respuesta: Sí, yo creo que vale la pena. Usted tiene la palabra.

Test para uno mismo

Muchas veces uno lee que para ser aceptado en un trabajo es necesario superar con éxito cierto número de preguntas.

Para correrme de lo que sería el mundo 'latino', busqué en una compañía que tiene su base en Nueva Delhi (capital de la India). Los candidatos reciben un papel con las preguntas que figuran a continuación. Se les permite usar *calculadoras*, pero no pueden tener acceso ni a internet ni ayuda externa. Son 30 minutos.

Si yo estuviera a cargo de la selección para cualquier empresa, *no testearía a nadie usando este método*, pero lo que yo piense es irrelevante, porque las reglas del 'mercado' no las pongo yo sino otras personas que evidentemente no estarían de acuerdo conmigo.

Igualmente, no deja de ser interesante reflexionar sobre las respuestas que uno daría y, sobre todo, cuál es la forma que le permitió llegar a ellas. Eso sí: en cada uno de los tests que encontré en el camino, *inexorablemente* aparece una pregunta (o más) relacionada(s) con el uso de 'fracciones'. ¿Cuál será la fascinación que eso provoca en *todas partes del mundo*? ¿Quién entra en una pizzería y dice: "Quiero llevarme tres séptimos de pizza"? O va a una estación de servicio y le pide al asistente: "Póngame

13 cincuentavos de tanque". En fin… como decía antes, no soy yo quien pone las reglas.

Son pocas preguntas y los resultados figuran luego, en forma separada.

Decida usted si le interesa atravesar por este callejón de cuestionamientos. De hecho, nadie mira, nadie controla, nadie juzga. Está usted con usted misma/mismo. En ese sentido, no le puedo ofrecer mejores condiciones. Acá van.

1. Un niño multiplica cierto número por 10 y obtiene 100 como respuesta. Si lo hubiera dividido por 10, ¿cuál habría sido el resultado?
2. En una zapatería hay un estante de 6 metros en donde se exhiben 12 tipos de zapatos. ¿Qué longitud debería tener el estante si quisieran exhibir 30?
3. El salario promedio de tres empleados es de $9.500 por mes. Si uno de los empleados gana $11.500 y el otro $6.500, ¿cuánto gana el tercero?
4. Un edificio de 16 pisos tiene 1.200 metros cuadrados por planta. La compañía A alquila *siete* pisos y la compañía B solamente *cuatro*. ¿Cuántos metros cuadrados quedan libres?
5. *(Prepárese: acá llegan las 'fracciones'.)* Un profesor de colegio secundario le dedica 48 horas por semana a su actividad. Una cuarta parte del tiempo la invierte en preparar el contenido de sus clases. Por otro lado, se pasa 3/8 del tiempo corrigiendo exámenes. El resto lo dedica a *dar las clases propiamente dichas*. ¿Cuánto tiempo se pasa frente a los alumnos?
6. Una impresora imprime 176.400 renglones por día. Si funciona exactamente siete horas por día (en donde

imprime sin pausas), ¿cuántos renglones imprime por minuto?

7. La empresa A está por decidir qué hacer con las ganancias del año. Por un lado, decide invertir $200.000 en publicidad. La mitad de lo que le quede, lo distribuirá entre sus empleados. Aun así, le sobrarán $60.000. ¿Cuál fue la ganancia anual?
8. En una empresa se hace un picnic anual en el día de la primavera al que son invitados todos los empleados. Este último año el 20% de los hombres y el 40% de las mujeres se hicieron presentes. Si se sabe que el 35% de los empleados son hombres, ¿qué porcentaje del personal participó del picnic?
9. Un empleado bancario procesa 80 tarjetas cada media hora. ¿Cuántas tarjetas procesa en 7 horas y 30 minutos?
10. *(¡Uno más con fracciones!)* En una compañía los empleados necesitan utilizar herramientas que están distribuidas en dos bandejas. En cada una de ellas hay 40 herramientas iguales. El gerente, atento al uso que se les da, descubre que se usan —en promedio— 30 por día. ¿Qué fracción del total queda sin usar por día?

Respuestas

1. 1.
2. 15. Si para exhibir 12 zapatos se usa un estante de 6 metros, para 30 hacen falta $(6 \times 30)/12 = 15$.
3. 10.500.
4. 6.000. En total quedan libres 5 plantas. Como cada una tiene 1.200 metros cuadrados, de ahí los 6.000 metros cuadrados libres.

5. 18 horas. Una cuarta parte del tiempo es (1/4) de 48, o sea, 12 horas. Como se pasa 3/8 corrigiendo exámenes, (3/8) de 48 = 18. Entre estas dos actividades suma 30 horas. Le quedan entonces 18 horas para dar clase.
6. 420.
7. El presupuesto total es 320.000. *(Para convencerse, llamemos G a la ganancia que hay que averiguar.)* Por un lado (G – 200.000) es lo que queda después de pagar la publicidad. La mitad de lo que queda entonces es ((1/2)G – 100.000). Este dinero se distribuye entre los empleados. Juntando todo lo que se gastó/invirtió, la cuenta que hay que hacer es: G – 200.000 – ((1/2)G – 100.000) = *(preste atención que hay dos signos 'menos' involucrados)* (1/2) G – 100.000 = 60.000. De aquí se deduce que (1/2)G = 160.000 y por lo tanto G = 320.000.
8. Fue el 33% de los empleados. Para hacer las cuentas más fáciles y respetando los porcentajes, suponga que la empresa tiene 100 empleados en total. De ellos 35 son hombres y 65 son mujeres. Si fueron 20% de hombres, es porque fueron *siete*. Si el 40% fueron mujeres, es porque fueron 26. Luego, en total fueron 33 empleados.
9. 1.200.
10. 5/8. Es que como se usan 30 de las 80 diariamente, *no se utilizan* 50 de esas 80. Luego, ese número está representado por 5/8 del total.

Teorema de la galería de arte de Chvátal

El que sigue es un problema *precioso*. Es uno de los *clásicos* pero tiene una belleza intrínseca que lo convierte en hiperatractivo. Es además una invitación a la reflexión y a la capacidad para utilizar y entrenar la percepción espacial.

Suponga que usted entra en un museo o en una galería de arte. Como es obvio esperar, hay muchísimos objetos valiosos y la idea es tratar de protegerlos, no sólo de los potenciales 'robos' sino también de evitar que la gente se acerque mucho a ellos. Entonces surge un primer problema: ¿cuánta gente hace falta distribuir para vigilar o controlar lo que sucede en cada sala de exhibición?

Segundo problema: ¿dónde ubicar a estas personas?

Naturalmente, hay una respuesta muy sencilla: "Ponga un *custodio* por obra y tiene resuelto el problema". Muy cierto, pero claramente ineficiente e impráctico. ¿Cuánto saldría contratar tantas personas como objetos de exhibición? Por supuesto, en los casos extremos donde el valor propiamente dicho lo amerite (pienso en "La Mona Lisa" de Leonardo da Vinci o el "Guernica" de Pablo Picasso, por poner dos ejemplos), allí sí tendría sentido. Pero creo que está claro a esta altura que mi intención es buscar minimizar el número de personas necesarias para controlar y también optimizar la distribución para que cada uno de ellos tenga en su campo de visión la mayor cantidad posible de objetos.

Es inmediato detectar que el número de personas necesarias dependerá *fuertemente* del diseño del lugar de exhibición. No es lo mismo una habitación clásica (como si fuera un *estudio* en un departamento o en un cuarto de hotel, como aparece en la Figura 1) que en un sitio que tiene una distribución de sus paredes y lugares de acceso como la planta que se ve en la Figura 2.

Figura 1

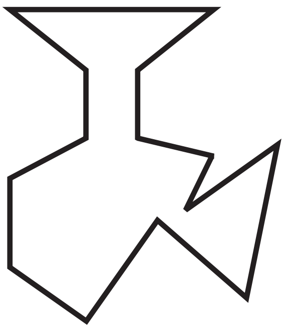


Figura 2

Ahora bien. A esta altura creo que se entiende cuál es el problema a resolver, pero quiero contar una breve historia.

En el año 1973, Victor Klee, un matemático norteamericano especialista en el estudio de "Conjuntos Convexos" y profesor en la

Universidad de Washington, en Seattle, estaba en un congreso en la Universidad de Stanford, California. En la audiencia había muchos colegas interesados en encontrar problemas para pensar y resolver. Uno de ellos, Vasek Chvátal, nacido en Praga cuando era la capital de Checoslovaquia, pero ya asentado en los Estados Unidos, le preguntó a Klee si tenía "algún problema interesante para pensar". Klee le dijo que sí y propuso contestar la siguiente pregunta: "¿Cuál es el mínimo número de guardianes necesarios para garantizar que puedan monitorear lo que suceda dentro de una galería de arte? Más aún: ¿se puede determinar dónde deberían estar ubicados?".

Chvátal se interesó tanto en el problema que pasó casi tres años en resolverlo[43]. Su respuesta fue: "Si la planta de la galería está representada por un polígono[44] de ***n*** lados, entonces alcanzan *(n/3)* guardianes para garantizar que pueda estar monitoreada"[45].

---

43. Si hiciéramos un *plano* que represente la galería, deberíamos tener un *polígono* de *n* lados. Por ejemplo, el plano de la habitación de un hotel suele ser un polígono de cuatro lados. Por otro lado, si pensamos en el edificio donde funciona el Departamento de Defensa de los Estados Unidos, dibujaríamos mentalmente un *pentágono*, o sea, un polígono de *cinco* lados. En general, para tener *libertad* en el número de paredes que conforman la galería, es suficiente en pensar en un polígono de *n* lados, en donde *cada lado representa una pared*.

44. Es muy posible que usted, después de haber leído la palabra *polígono*, habrá pensado en un triángulo, un cuadrado, un pentágono, un hexágono, etc. Sin ninguna duda, ésos *son* polígonos. Pero también son polígonos los que aparecen en las figuras 2, 3, 4, 5, 6, 7 y 8.

45. Usted debe estar pensando: ¿n/3? ¿Y si n = 7? ¿O si n = 17? En ese caso, el teorema que probó Chvátal dice que uno se queda con el cociente y desprecia los *decimales*. Es decir, al hacer 7/3 = 2,3333… En este caso, nos quedamos con el número *dos*. Si fueran 17 paredes, 17/3 = 5,6666… Aquí alcanzarían *cinco* guardianes. Como dato complementario, el número *(n/3)* está *encerrado* entre dos números enteros; es decir, tiene que existir un número *entero* N, tal que N <= (n/3) < (N+1). A este número N se lo llama 'la parte

Es decir, si uno tiene una galería de arte en donde hay 51 paredes, entonces, con —a lo sumo— 17 guardianes se podrá custodiar toda obra u objeto que está exhibido allí adentro.

Un hecho histórico muy interesante es que Chvátal se quedó con el crédito de haber encontrado la solución al problema planteado por Klee, pero en 1978, Steve Fisk, en ese momento profesor en el Bowdoin College, una de las universidades más importantes en Maine, Estados Unidos, encontró una demostración que reúne todas las condiciones para formar parte del libro llamado *Proofs from THE BOOK*[46].

Algunas ideas sobre la demostración de Fisk

Antes de empezar, debo pedirle que me haga algunas concesiones en el camino. Necesito que acepte que en este modelo los guardianes estarán representados por *puntos*. Más aún: estos puntos podrán estar ubicados en cualquier parte del polígono, incluso en las aristas o en los vértices. Por otro lado, estos puntos pueden *ver* cualquier punto de la galería siempre y cuando el segmento que une al guardián con este punto *esté totalmente contenido* dentro del polígono.

Si bien no pretendo escribir acá la demostración *completa, sí*

---

entera de (n/3)'. Para ser precisos entonces, la respuesta de Chvátal fue que el número necesario es 'la parte entera de (n/3)'.

46. En esta obra figuran las demostraciones más bellas que la matemática puede ofrecer. La idea de escribir este libro fue del matemático húngaro, Paul Erdos, quien indicó que "dios guarda allí las pruebas *perfectas* de los teoremas matemáticos". Se trata no sólo de acumular demostraciones, sino que únicamente unas pocas merecen estar allí por la *belleza*, *simplicidad* y *armonía* que presentan. Es por eso que la prueba que hizo Chvátal no está en el libro, pero la de Fisk, sí.

quiero contar las ideas centrales de Fisk, que se pueden resumir en tres pasos. Cuando los lea, quizá no entienda algún término: no desespere, voy a tratar de explicarlos luego y verá que son muy sencillos. No se prive de la oportunidad de entenderla porque —créame— vale la pena. Acá voy con estos tres pasos:

1. Cualquiera sea el polígono[47], siempre se lo puede *triangular*.
2. Por otro lado, cualquiera sea la triangulación, *siempre* hay una manera de *colorearla* “adecuadamente”[48].
3. Una vez que se tiene la coloración, se busca cuál es el color que aparece *menos* veces entre los vértices del polígono y en esos vértices es donde se ubican los guardianes. Eso termina por resolver el problema.

¿Le parece complicado? No crea… sígame y verá que usted podrá entender todo. Más aún: se va a sentir bien por lo que habrá aprendido; al menos, eso fue lo que me pasó a mí.

Eso sí: no pretendo dar una demostración rigurosa y autocontenida, sino tratar de convencerla/convencerlo de que los resultados son ciertos en forma intuitiva. Hay mucho escrito en la literatura y bastará con que *googlee* en internet ‘Teorema de Chvátal de la galería de arte’ y se encontrará con abundante material. De hecho, yo tomé muchísimas de las ideas de varias demostracio-

47. Aunque no lo escriba explícitamente, pienso en un *polígono simple*, es decir, cuyos lados no se cortan.

48. Cuando digo ‘colorear adecuadamente’ me refiero a *pintar* los vértices de cada triángulo con exactamente tres colores. Estos tres colores tienen que aparecer en *todos* los triángulos de la triangulación. Es decir, cada uno de los triángulos (de la triangulación) tiene sus vértices pintados de tres colores distintos y esos mismos tres colores se usan para todos los triángulos.

nes que leí en el trayecto. Si bien no voy a usar el Principio de Inducción Completa (porque justamente sería *caer en la tentación de 'probar' cada paso*) si usted está interesada/o en todos los detalles creo que necesitaría usarlo. Pero lo que va a encontrar en este texto son algunas de las ideas centrales que utilizó Fisk para su demostración.

Ahora sí, me pongo en marcha. En el camino, voy a tratar de contestar algunas preguntas que me fueron surgiendo mientras leía varios textos y que supongo que se le ocurrieron u ocurrirán a usted también.

En principio, ¿qué quiere decir *triangular* un polígono?

'Triangular' un polígono es descomponerlo en un conjunto de triángulos que no se corten (o sea, que no tengan puntos en común salvo los lados) y de manera tal que uniendo todos esos triángulos uno pueda rearmar el polígono.

Lo que también tiene que quedar claro es que la *triangulación* **no agrega ningún vértice que el polígono no tuviera de antemano**. Esto es muy importante, porque existe *otro tipo de triangulaciones* en donde está *permitido* agregar vértices, pero *no* en esta situación.

Fíjese por ejemplo en la Figura 3a. Allí dibujé una posible triangulación. Si uno tuviera los triángulos por separado, podría armar el polígono como quien arma un rompecabezas.

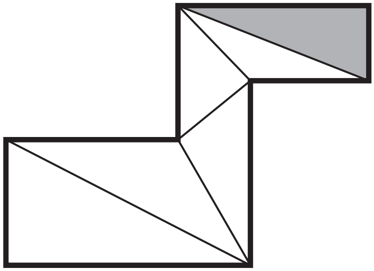


Figura 3a

¿Cómo hacer para comprobar que uno *siempre* puede encontrar una *triangulación de este tipo*?

Téngame un poco de paciencia y verá por qué.

Quiero definir primero lo que se llama una 'oreja' de un polígono. Una *oreja de un polígono* es un **triángulo** formado por tres vértices **consecutivos** dentro del cual no hay ningún otro vértice. La definición *rigurosa* dice:

Un polígono tiene una ***oreja*** *en un vértice V, si uno puede encontrar en el polígono tres vértices consecutivos (A, V, C) de manera tal que si uno traza el segmento (o la cuerda) que une A con C, el triángulo que queda formado (AVC) queda* ***totalmente incluido*** *dentro del polígono.*

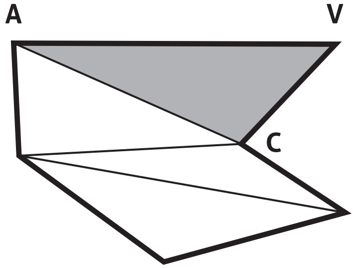


Figura 3b

Por ejemplo, fíjese en la Figura 4.

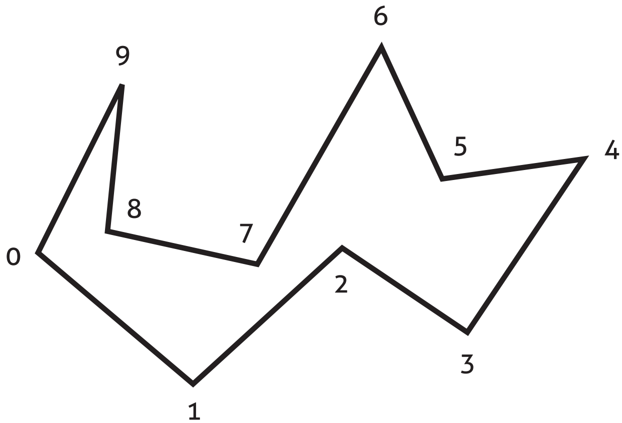


Figura 4

En este caso, las *orejas* están en los vértices que llevan los números 3, 4, 6 y 9.

Ahora bien: *¿siempre* hay *orejas* en un polígono? La respuesta la dio en el año 1975 G. H. Meisters[49] con su teorema:

Salvo en el caso de los triángulos, todo polígono simple tiene ***por lo menos dos*** *orejas que no se 'intersectan'.*

La demostración es sencilla y muy bonita. No la incluyo acá porque es técnica y tendría que extenderme más de lo necesario, pero si a usted le interesa se puede encontrar en www.cgeo.ulg.ac.be/CG/polygons_have_ears.pdf

Por otro lado, el segmento que une los vértices 2 y 4, se llama

---

49. La demostración está en el *American Mathematical Monthly*, vol. 82, No. 6 (junio-julio de 1975), pp. 648-651.

una *diagonal*. De la misma forma, también son *diagonales* los segmentos que unen los vértices (3 y 5), (5 y 7) y (0 y 8).

La idea que voy a usar se basa en que uno puede *siempre* trazar una *diagonal que una dos vértices del polígono*, pero con una propiedad importante: 'Toda la diagonal cae *adentro* del polígono'.

Ahora quiero *mostrar* cómo se hace para comprobar que siempre existe una triangulación de cualquier polígono simple.

Empiezo por el caso más sencillo: usted advierte que si el polígono original fuera un triángulo, entonces ya '*viene triangulado*' y no hace falta hacer nada.

Suponga ahora que tenemos un polígono de cuatro lados. Por el resultado de Meisters, tiene que haber por lo menos *dos orejas*. Elijamos una cualquiera. Supongamos que llamo A, B y C a los vértices que la forman, siendo B el que está 'en el medio'. Trazamos la *diagonal* que une A con C y *corto este triángulo y lo **separo*** del polígono original. Ahora quedan marcados dos triángulos y, por lo tanto, ya tenemos la triangulación. Es decir, si uno tiene cualquier polígono de cuatro lados, ya sabemos que uno lo puede triangular.

Si ahora tuviéramos un polígono de *cinco* lados, ¿cómo proceder para obtener una posible triangulación? (¿quiere pensar usted en soledad?).

Sigo: uno busca alguna *oreja*, traza la diagonal como hicimos antes y tiene generado un triángulo. Lo corto y lo *retiro*. Lo que queda ahora es un polígono de *un lado menos*, o sea, de cuatro lados. Ya sabemos que éstos se pueden triangular. Lo hacemos y después le agregamos el triángulo que habíamos separado. De esta forma, obtenemos una triangulación del polígono de cinco lados.

Como usted intuye, el resultado de Meisters es clave, ya que sabiendo que uno *siempre* puede encontrar al menos *una oreja*, traza la diagonal que corresponde, forma un triángulo que luego corta y retira, y de esa forma ahora uno tiene un polígono con un lado menos y también un *vértice* menos.

Después, construye la triangulación que existe para ese polígono *más chico* y una vez más, agrega el triángulo que había separado y tiene una triangulación para el polígono original.

De esta forma es posible concluir que cualquiera sea el número de lados del polígono, *siempre* hay una triangulación.

Coloración

Tomemos el polígono original de n lados que representa la galería de arte. Ya sabemos que lo podemos triangular. Ahora, quiero demostrar que puedo encontrar una coloración de todos los vértices, de manera tal que en cada triángulo (de la triangulación), los tres vértices estén pintados de tres colores distintos. ¿Cómo hacer?

Una vez más, voy a usar la idea de las *orejas* de Meisters. Primero, como hicimos antes, fíjese que si el polígono original (la *galería de arte*) fuera un triángulo, entonces le pongo un color a cada vértice y listo. O sea, pintar los vértices de un triángulo es trivial.

¿Qué haría usted si tiene un polígono de cuatro lados?

A esta altura, creo que la idea está más clara: busca una oreja, traza la diagonal, separa el triángulo que queda conformado y queda un polígono de un lado menos (o sea un triángulo). Como uno *sabe* pintar los vértices de un triángulo, al *pegarle* el otro triángulo, cambia eventualmente la coloración del segundo triángulo para que todo 'cierre' bien. Cuando termine, le va a quedar un vértice *sin pintar*, pero todo lo que hay que hacer es adjudicarle el color que le falta, determinado por los dos colores que ya usó. De esa forma, ahora tiene una coloración del polígono de cuatro lados.

O sea, uno puede pasar de saber colorear polígonos de tres lados a colorear adecuadamente polígonos de cuatro.

Si ahora uno tuviera uno de cinco, repite el proceso: busca una de las orejas, traza la diagonal —que sirve para generar un triángulo— y luego, como hicimos antes, separamos este triángulo.

Queda entonces un polígono de cuatro lados por un lado y un triángulo por el otro. Ya sabe que el polígono de cuatro lados lo puede colorear y, por lo tanto, lo colorea. Después, hay *pegar* el triángulo que falta: para eso hay suficiente libertad porque uno ajusta los colores de los dos vértices del triángulo para que coincida con el de cuatro lados, y usa el color que falta para pintar el tercer vértice (el que no usó).

De esta forma, se concluye que *siempre es posible no sólo encontrar una triangulación de cualquier polígono de* ***n*** *lados, sino que también se la puede colorear en forma adecuada.*

Fijémonos en este ejemplo. Volvamos sobre la Figura 4. Allí los vértices 3, 4, 6 y 9 son 'orejas' del polígono.

Consideremos juntos la *oreja* que aparece en el vértice 3. Luego, *unimos* los vértices 2 y 4 para formar una *diagonal* que cae completamente dentro del polígono.

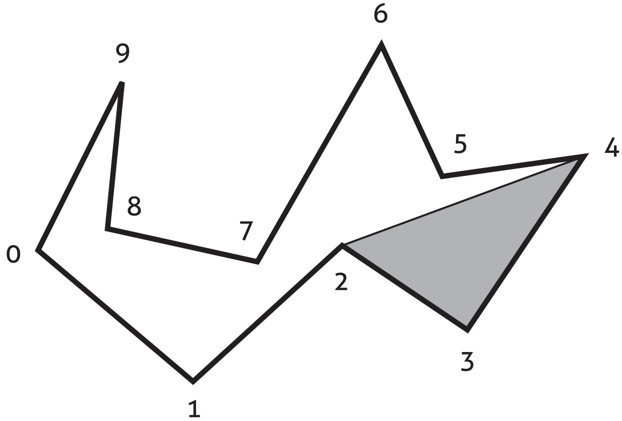


Figura 5

Si ahora *cortamos el polígono* por esa diagonal (como aparece en la Figura 5), tenemos ahora un polígono que tiene *un vértice menos y un lado menos* (Figura 6).

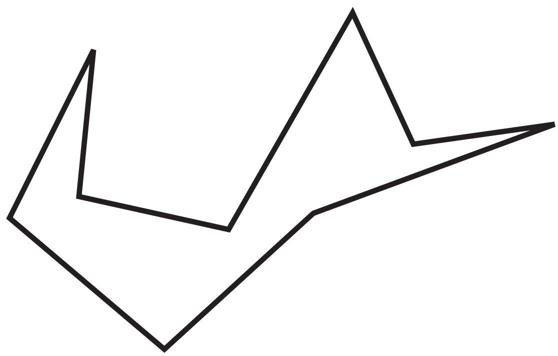


Figura 6

Si siguiéramos de esta forma, usando las *distintas orejas que se forman en los polígonos cada vez más chicos*, obtendríamos *todos* *los triángulos de la triangulación*. Una vez hecho esto, podríamos comenzar a *colorear los vértices de los triángulos y pegándolos por cada una de las diagonales*.

Al finalizar, tendríamos no sólo una triangulación del polígono original (la galería de arte) sino también la coloración adecuada que buscábamos.

Por supuesto, ésta no constituye una demostración rigurosa, pero sí —creo— da una idea de lo que se puede hacer[50].

Final de la historia

¿Dónde poner los guardianes?[51] Fíjese que si uno se para en *cualquiera* de los vértices de cada triángulo, la visión que tiene desde allí no ofrece ningún tipo de obstrucción por lo que uno puede decir que desde ese lugar se puede ver *todo lo que sucede en ese triángulo*. Como todos los triángulos tienen sus vértices coloreados por los tres colores, para *minimizar* el número de guardianes, lo que tendría que hacer es fijarme cuál de los tres colores *aparece menos veces en la coloración* y ubicar un guardián en los vértices de ese color.

Supongamos que fuera el color verde (V) o el número '2' el que aparece menos veces, digamos *K* veces.

---

50. En realidad, si uno quisiera ser *riguroso* con este procedimiento debería usar lo que en matemática se llama 'Principio de Inducción Completa'. En este caso, uno podría '*hacer inducción*' en el número de triángulos de la triangulación o en el número de lados del polígono.

51. Carlos D'Andrea me hizo una observación *extraordinaria*. La copio tal como me la envió el 1° de febrero de 2015: "Adrián, con la evolución de la tecnología, en la mayoría de los museos hoy hay sensores de movimiento o calor que se activan cuando uno se acerca mucho a las obras de arte. No debería sorprenderte que alguna persona, después de leer tu planteo, te diga y/o piense que es totalmente *obsoleto*". ¡Cuánta razón que tendrían esas personas!

Como en total el polígono posee *n* vértices, tiene que pasar que

$$K <= n/3$$

Pero lo interesante es que como *K* es un número entero, entonces *K* tiene que ser menor o igual que la parte entera de (n/3)[52].

Luego, como todo triángulo tiene un vértice pintado de Verde o con el número '2', si ubicamos un guardián allí podrá ver todo lo que sucede en *su* triángulo y, por lo tanto, todo punto de la galería está siendo observado por *al menos* un guardián.

Preguntas

1. ¿Siempre hacen falta como mínimo (n/3) guardianes?
2. ¿Existe algún ejemplo en donde hagan falta los (n/3)?

En realidad, debería escribir (la parte entera de (n/3)), pero acépteme que no lo haga. Veamos las respuestas.

1. No. Elija un hexágono o un octógono regular (por poner algunos ejemplos). Claramente con un solo guardián (y además ubicado en cualquier parte) alcanza para cubrir visualmente todo el polígono. O sea, *hay infinitos ejemplos en donde* ***no hacen falta los (n/3) guardianes***.
2. Sí. Fíjese en la Figura 7. Éste es un polígono que tiene 12 lados (parece un *peine* de cuatro 'dientes') y creo que está claro que hacen falta *cuatro* guardianes para vigilar todas las salas. Cada uno de ellos tiene que estar ubicado con 'vista a' cada uno de los 'dientes' y, por lo tanto, son necesa-

52. Es decir, el *mayor número entero* menor o igual que (n/3).

rios los cuatro que indica el Teorema de Chvátal. La Figura 8 sirve para mostrar que si el *peine* es más grande y tiene más dientes, entonces aumenta la necesidad de guardianes hasta llevarlo a (n/3).

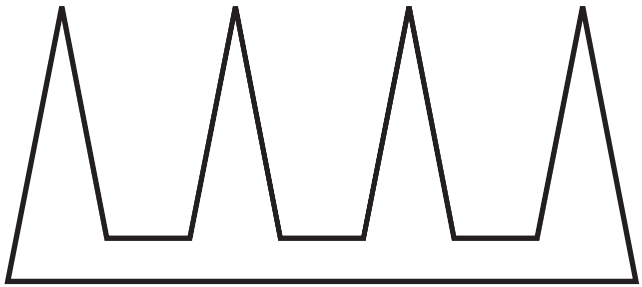


Figura 7

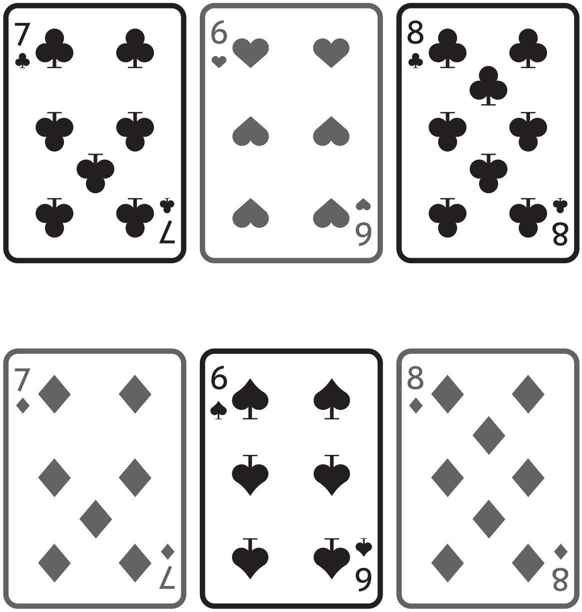
Figura 8

Las cartas y el mago

El siguiente es un problema fascinante. Lo escribo de nuevo: fascinante. Necesito su complicidad y ya va a entender por qué. En principio, como usted ve, hay *muchas* cartas en el texto. Por ahora, le pido que se concentre en las seis primeras, las que figuran en las dos filas.

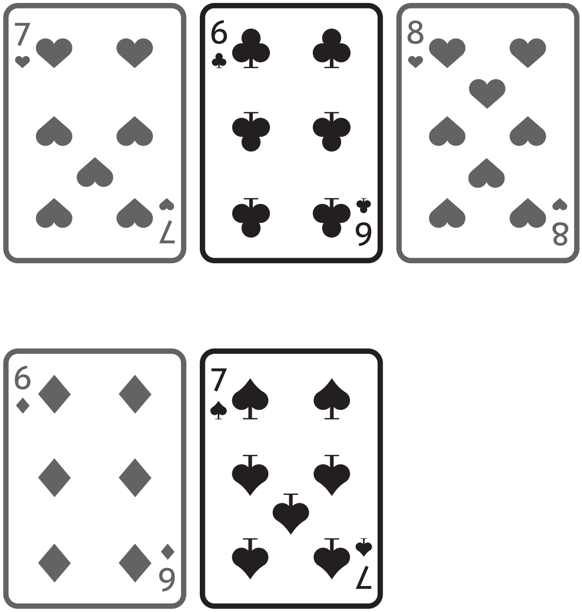
Por el momento, olvídese de las otras. Más aún: si esto no fuera el texto para un libro o para un diario, yo no exhibiría esas cartas en *este momento* del problema, pero como no estoy ahí con usted, no me queda más remedio que apelar a su generosidad y verá que al final usted terminará haciendo lo mismo cuando proponga el problema a otras personas. Pero me desvié de lo que quería hacer.

Una vez más, fíjese en las seis cartas que figuran a continuación. Luego le digo qué instrucciones seguir.



Ahora que le dedicó un *ratito* a mirarlas, *elija una cualquiera*. No la diga, no la anote, no haga nada. Simplemente retenga en su memoria la carta que eligió. Cuando haya cumplido 20 segundos y ya tenga claro cuál es la que seleccionó, yo —desde acá— voy a leerle la mente y voy a decirle qué carta eligió.

Más aún: voy a volver a mostrar las dos filas, pero ahora, ¡la carta que usted eligió no está más! Fíjese en las cinco cartas que quedaron:



¿No es extraordinario? Creo que tengo que darle un tiempo para que usted pueda reflexionar sobre lo que acaba de pasar. ¿Quiere intentarlo nuevamente ahora con otra carta? ¿O le fue suficiente para *entender* cómo hice?

Reflexión final

Me gustaría *no tener que escribir la solución* por varias razones. Por supuesto, si descubrió cómo hice, entonces ¿para qué ser redundante? Usted ya entendió lo que pasó.

Por otro lado, si usted todavía no alcanzó a *descubrir* lo que pasa… (como me pasó a mí durante muchísimas veces que miré y miré las primeras dos filas de cartas y fui cambiando la que seleccionaba una y otra vez), decía, si todavía no se tomó el tiempo suficiente y yo le cuento el argumento que explica todo, ¡estoy arruinando su capacidad de sorpresa!

En fin, no me queda más remedio, pero lo que voy a hacer es escribirlo 'hacia atrás', es decir, voy a escribir dos líneas en donde figura la razón por la que yo pude hacer lo que hice. De esta forma, si usted, inadvertidamente lee las líneas que siguen, le llevará más tiempo decodificar el mensaje que le quiero mandar. Acá va.

Sal ocnic satrac euq noradeuq nos sadot setnerefid ed sal selanigiro. Rop ose atlaf al euq detsu óigile. Ne dadilaer, natlaf sadot

¿Cómo interpretar esto que nos pasa? ¿Por qué nos pasa? Aquí sí que me declaro incompetente. No sé. No entiendo yo tampoco. Ojalá que usted haya podido disfrutarlo tanto como yo, pero no estoy en condiciones de elaborar más que lo que escribí. No sé por qué nos pasa.

Un árbol… ¿de qué altura?

Toby Buckland nació en Inglaterra en 1969. Es *jardinero*. Sí, jardinero, pero es muy famoso en la sociedad inglesa porque además de cuidar jardines es el conductor de algunos programas de televisión. De hecho, durante dos años (2008-2010) Buckland fue el presentador de uno de los programas más famosos de la televisión inglesa, que produce y emite la BBC: *Gardener's World* ("El mundo del jardinero"). Lo interesante es que en uno de los segmentos planteó el siguiente problema: "¿Cómo se puede hacer para determinar (aproximadamente, claro está) la altura de un árbol sin tener que treparse ni utilizar ninguna herramienta sofisticada?".

Por supuesto, hay múltiples (posibles) respuestas al problema y no pretendo de ninguna manera que al comentar la que propuso Buckland la transforme en la *mejor*. No. Lo que quiero es exhibir una forma ingeniosa de encontrar la respuesta.

Lo que propuso Buckland en su programa fue lo siguiente: "Párese a una distancia razonable del árbol, no muy lejos pero tampoco muy cerca". Ahora viene la parte que me parece muy ingeniosa y que, si bien yo no lo comprobé, la invitación está hecha para que lo haga usted. Sigo con lo que dijo Buckland: "Póngase de *espaldas al árbol*. Abra las piernas como si —por ejemplo— un niño fuera a pasar en el hueco que queda formado. Ahora, agáchese como para tratar de ver el árbol que quedó atrás suyo. Si no puede ver la punta del árbol, aléjese tanto como haga falta para que, al repetir el proceso, le cueste ver la punta con claridad. En cambio, si le resultó muy fácil ver la copa, entonces acérquese hasta que no le sea tan sencillo. Cuando alcanzó esa posición en donde no le es ni tan fácil ni tan difícil de divisar la punta del árbol, la altura del árbol que usted está tratando de medir es —aproximadamente— igual a la distancia que hay entre la base del árbol y usted".

Ahora bien: ¿por qué funciona esta técnica que propuso Buckland? ¿Quiere pensar usted?

Acá es donde uno tiene que apelar a creer que lo que dice Buckland es cierto: él sostiene que cuando una persona *mira* hacia arriba a través de sus piernas, el ángulo de visión es de 45 grados. El grado de veracidad de esta afirmación es determinante para que la técnica que él propone sea cierta.

Supongamos que lo es. Entonces, si el ángulo formado como se ve en la Figura 1 es de 45 grados, el *alto* y el *largo* son iguales. Esto se debe a que la *tangente* de un ángulo de 45 grados es igual a *uno*, por lo que tanto el *seno* como el *coseno* del ángulo tienen que ser iguales y justamente, estos dos valores sirven para medir los *catetos* del triángulo rectángulo que queda formado en la base del árbol. En este caso, el segmento que va desde los ojos hasta la copa del árbol es la hipotenusa de este triángulo rectángulo que resulta ser *isósceles* y, por lo tanto, tiene los dos catetos iguales[53].

53. Otra explicación (que me sugirió Carlos D'Andrea y, como él dice, evita usar la tan *odiada trigonometría*): "Como un ángulo mide 45 grados y el otro es de 90, eso obliga a que el triángulo sea isósceles. Luego, tiene que tener los dos catetos iguales".

Basta entonces medir la distancia que hay entre usted y la base del árbol, y ésa será, al mismo tiempo, la altura del árbol.

Como final: no me puedo doblar de esa forma sin *romperme* la columna. Es por eso que no lo intenté, pero si usted tiene la flexibilidad para poder hacerlo, hágalo y compruebe empíricamente que lo que propuso Buckland es cierto.

No puedo terminar sin escribir una frase de Buckland (quien nació en 1969):

Inténtelo. Es más barato que hacer yoga
y ofrece una visión del mundo que…
¡uno no tenía desde que era un niño!

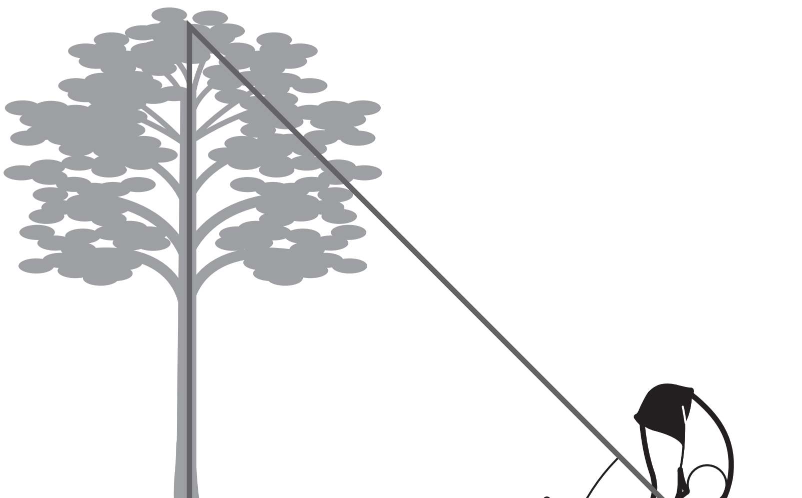


Figura 1

Larry Lorenzoni dijo…

No sé quién es o quién fue, sólo puedo decir que en un libro de Ian Stewart encontré esta frase que me pareció muy ingeniosa. Stewart se la adjudica a Larry Lorenzoni, así que yo solamente reproduzco lo que leí. Acá va.

Estadísticas recientes demuestran que cumplir
años es bueno para una persona.
Aquellos que cumplen muchos son los que logran vivir más tiempo.

Agujeros en los aviones

La historia que quiero contar empieza, como tantas otras que usted ha leído, pero la repetición no la hace menos angustiosa. Es que así como en el ajedrez las primeras jugadas son (o parecen) iguales a las de otras partidas, después la variedad de posibilidades le va dibujando un nuevo destino. Créame que ésta lo tiene. Acompáñeme por acá.

Abraham Wald nació en 1902 en lo que en su momento fue Klausenburg en el imperio austro-húngaro. Sin embargo, al finalizar la Primera Guerra Mundial, Klausenburg ya no se llamaba así, le pusieron Cluj y, al igual que otras ciudades de aquella época, ya no era ni austríaca ni húngara: formaba parte de Rumania.

Wald era judío, nieto de un rabino. Como en tantos otros casos, su afición por la matemática lo llevó a estudiar a Viena (que todavía sigue siendo austríaca). El problema se generó después: cuando Wald se doctoró, en 1931, no podía conseguir un puesto como profesor en Austria justamente por su condición de judío. Desesperado porque se le negaba la oportunidad de progresar (y de trabajar) fue rescatado por Oskar Morgenstern[54] que se lo llevó a Estados Unidos, primero a Chicago, a la Comisión

54. Economista alemán cofundador junto a John von Neumann (entre otras cosas) de lo que hoy se conoce como 'Teoría de Juegos'.

Cowles para Investigaciones en Economía, y después a Colorado Springs, para que trabajara en *econometría*. La aspiración de Wald era capacitarse, pero no quería quedarse a vivir en América del Norte: deseaba volver a su país. El problema es que como los nazis arrasaban con todo, a Wald no le quedó otra alternativa que quedarse donde no quería. Como producto de sus trabajos y sus méritos terminó recibiendo una oferta que no quiso rechazar: un puesto en la Universidad de Columbia, Nueva York. Ahora bien, ¿por qué toda esta historia? Téngame un poquito más de paciencia.

Wald empezó a distinguirse por su capacidad de análisis, su agudeza y creatividad. Seguramente esas cualidades fueron las que se requerían para formar parte de un grupo conocido con las siglas SRG en inglés: Statistical Research Group (Grupo de Investigaciones en Estadística). Lo invitaron a participar y aceptó también. Europa quedaba cada vez más lejos para Wald.

La guerra se daba en diferentes frentes y en distintos lugares del mundo más allá de los campos de batalla propiamente dichos. Mientras en el laboratorio de Los Álamos, a unos 150 kilómetros de Albuquerque, la capital de Nuevo México, en Estados Unidos, se trabajaba en la fabricación de la bomba atómica en el famoso Proyecto Manhattan, en la costa este había también una gran concentración de científicos teóricos, dedicados en particular a encontrar y resolver ecuaciones. Y vea lo que sucedió: tal era la potencia de lo que producía el grupo SRG que integraba Wald, que comenzaron a tener injerencia en lo que sucedía con los aviones que bombardeaban las posiciones nazis.

El grupo de matemáticos del SRG, especializados en estadística, comenzó a detectar que los militares contaban con ellos cada vez más. De hecho, el área militar recogía los datos y los trasladaba inmediatamente al departamento donde operaba el grupo, en un edificio ubicado exactamente a una cuadra de lo que hoy es la Universidad de Columbia, en el 401 oeste de la calle 118, lo que conocemos como el Upper West Manhattan.

Los militares esperaban las *recomendaciones y sugerencias* de los teóricos, los matemáticos. Por su parte, los ingenieros aeronáuticos convergían también en el mismo departamento con la idea de analizar cómo implementar las modificaciones que sugirieran los matemáticos, siempre y cuando éstos pudieran mostrar que dichos cambios podían mejorar la performance de las misiones aéreas.

La situación era (más o menos) así: cuando los bombarderos retornaban de sus misiones, no todos volvían intactos, sino que al llegar a sus respectivas bases se realizaba un análisis del impacto que habían producido los proyectiles alemanes. Hacían un recuento de los diferentes lugares en donde se encontraban los 'agujeros'. La idea era no sólo repararlos (obviamente) para que pudieran seguir en actividad, sino aprovechar la experiencia para *proteger* a los otros. A tal efecto, se buscaba *agregarles armaduras o piezas metálicas que ofrecieran más resistencia a los impactos que recibían desde tierra*.

Pero aparecía un problema: si uno le pone armaduras muy pesadas, el avión no puede volar; pierde maniobrabilidad y usa muchísimo más combustible. Por otro lado, si uno les pone armaduras muy livianas terminan resultando superfluas; es como si no existieran… ¿para qué usarlas?

Aquí es donde empieza a intervenir la matemática (una vez más): ¿dónde está el punto de equilibrio, el punto óptimo? Ya que uno *no puede proteger con armaduras* ***todo*** *el avión*, entonces, ¿qué partes cuidar más? ¿Qué hacer?

Luego de que cada avión cumpliera con su misión, se hacía un reporte detallado de los distintos lugares de los impactos y la cantidad que había recibido. Eso permitía elaborar un esquema como el que aparece en la Figura 1.

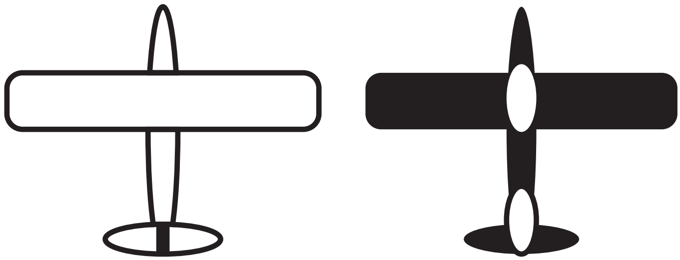


Figura 1

El diagrama muestra un ‘antes’ y un ‘después’. El avión de la derecha muestra que la mayoría del daño está hecho en los lugares más oscuros. Se advierte entonces que el avión había recibido las mayores averías en las alas, la nariz y el fuselaje, mientras que la cabina y la cola aparecían mucho más libres de los impactos.

Voy a agregar a continuación una lista que reseña —en promedio— el número de impactos por ‘pie cuadrado’. ¿Qué es un ‘pie cuadrado’ y por qué no hago la conversión a centímetros cuadrados que nos es muchísimo más conocido? Un ‘pie’ mide un ‘poquito’ más que 30 centímetros. Por lo tanto, ‘un pie cuadrado’ imagínelo como una plancha de (30×30) centímetros cuadrados. Si usted se fija en las cuentas que hago a continuación, verá que si yo calculara la conversión a centímetros cuadrados, aparecerían muchísimos decimales que terminarían distrayendo la atención de lo que me parece la idea central.

SECCIÓN DEL AVIÓN	AGUJEROS POR PIE CUADRADO
Fuselaje	1,73
Tanque de combustible	1,55
Motor	1,11
Resto del avión	1,80

En definitiva, si uno focaliza su mirada en estos números, descubre que la mayoría de los disparos se concentraba en el fuselaje (casi *dos agujeros por cada sector de (30x30) centímetros cuadrados*), después en la zona de los tanques de nafta y por último en los motores, que revelan el *menor* de los números en cuestión[55].

En vista de estos resultados, los militares *sugirieron* que las áreas 'grisadas' fueran las que recibieran mayor protección: si se iban a incorporar más armaduras y placas metálicas, deberían distribuirse en esas zonas. ¡Error!

Sí, *error*. Wald hizo una explicación magistral: "Si los aviones regresan con daños en las zonas grisadas, es porque esas zonas son las *que menos necesitan de las armaduras*". Después de todo, si los aviones podían recibir ese número de impactos pero podían regresar es porque allí no estaba el problema. Siguió Wald: "El hecho de que la cabina y la cola tuvieran muchísimo menos impactos no tiene que ver con que los proyectiles no llegaban hasta ellas, sino que… [y aquí le pido que me preste atención] *los aviones que sufrían ese tipo de impactos, en esos lugares… ¡no retornaban más!*".

Aunque ahora parezca una trivialidad, la observación de Wald fue espectacular. Si había una distribución uniforme de los pro-

55. Dejé para el final 'resto del avión', porque si bien aparece el número más grande es demasiado inespecífico y ambiguo.

yectiles, ¿dónde estaban los agujeros que faltaban? ¡Están en los *aviones* que faltan, los aviones que no volvieron!

Así de simple. Es que cabían dos alternativas: o bien los proyectiles que enviaban los nazis alcanzaban todas las partes del avión menos dos o bien los motores y las cabinas son los mayores puntos de vulnerabilidad. Había aviones que regresaban con agujeros en las alas, en el fuselaje, en la nariz… pero muy pocos en los motores y en las cabinas. Y claro, eso sucedía porque los que impactaban allí… no volvían.

Ahora me lo imagino a usted pensando: ¿y dónde interviene la matemática en esta deducción, que *ahora* parece tan simple, sobre todo cuando ya se conocen los hechos? Me lo imagino a usted también asegurando: "Esa conclusión la hubiera podido sacar yo también". Es posible, pero créame que lo que subyace detrás de esta historia es que —aunque uno no lo advierta— supone que los aviones que regresaban constituían una muestra ***al azar*** de todos los aviones que salían… y como usted habrá detectado ya, ¡eso no era cierto!

Con el mismo tipo de razonamiento, en su libro *How Not to be Wrong* (Cómo *no* estar equivocado), Jordan Ellenberg dice: "Si usted va a un hospital militar en momentos en los que se está disputando una guerra, encontrará muchísimos más soldados con heridas/agujeros de bala en las piernas que en el pecho. Pero eso sucede *no* porque los combatientes no sufran balazos en el pecho sino porque los que reciben impactos allí, no están en los hospitales: están muertos".

Las conclusiones de Wald[56] iban exactamente en sentido con-

---

56. Las sugerencias de Wald fueron hechas sobre los aviones ingleses que peleaban en la Segunda Guerra y fueron aplicadas por los norteamericanos en las guerras de Corea y Vietnam. La hipótesis de Wald era que los proyec-

trario de las que podían aparecer como *obvias*. Y esto es particularmente *crítico* no sólo en términos de 'guerra y aviones, impactos de bala, proyectiles, etcétera', sino que también tiene particular aplicación en la vida cotidiana, como se advierte en el uso que hoy le da la gente que conduce los destinos de Facebook. Sí, leyó bien: Facebook. Fíjese si no.

El director de investigaciones de Facebook, Nate Bolt, contó[57] hace no mucho tiempo cómo la historia de Wald lo impactó cuando aún era un estudiante en un laboratorio de la Universidad de California, San Diego. A usted no se le escapará que Facebook tiene una base de datos que posiblemente sea la más grande del mundo[58]. La tentación de elaborar hipótesis sobre el comportamiento humano es enorme. Tener la posibilidad de ver cuáles son los gustos de la gente —cuáles son sus gustos, mis gustos—, inferir en función de ellos qué es lo que queremos, qué es lo que estaríamos dispuestos a comprar, a qué lugares querríamos viajar, qué inclinaciones tenemos por ciertos tipos de mujeres,

---

tiles eran disparados al azar, y que no había manera de *dirigir y elegir* el lugar en el que debían impactar. Es posible que eso se pueda hacer ahora, pero no 70 años atrás. Los alemanes apuntaban en la dirección del avión y, algunas veces, tenían 'suerte' y se producía el impacto. Por ejemplo, si Wald veía que la mayoría de los aviones bombarderos que él tenía como muestra exhibían agujeros en el medio de las alas, él ***no** concluía* que a los nazis les interesaba apuntar hacia ellas, sino que debía haber bombarderos con agujeros en otras partes del avión, pero que esos aviones no eran parte de *la muestra que él analizaba porque habían caído en el campo de batalla y, por lo tanto, no habían regresado*.

57. http://www.fastcodesign.com/1671172/how-a-story-from-world-war-ii-shapes-facebook-today

58. O la segunda más grande, después de la que tiene Estados Unidos a través de su agencia NSA (iniciales en inglés de la National Security Agency, o sea, de la Agencia de Seguridad Nacional).

hombres, marcas, autos, libros, música, películas, obras de teatro, etcétera.

Mirando lo que hacen *las grandes mayorías* invita, como decía anteriormente, a sacar conclusiones que uno cree que están refrendadas por la abrumadora cantidad de datos disponibles. Sin embargo, eso no siempre es cierto. Bolt declaró: "Todos nosotros hemos producido, juntado y visto enormes cantidades de datos y los hemos analizado con múltiples de tipos de métricas, y es por eso que resulta *tan fácil hacer* ***inferencias equivocadas***. Lo que yo creo es que hay una parte creativa en la comprensión de los datos cuantitativos que requiere una suerte de análisis artístico cuando uno investiga. En particular, y por poner un ejemplo, la investigación en diseño no se puede hacer como si fuera un laboratorio esterilizado para que no haya contaminaciones externas/humanas".

La idea es mezclar la enorme cantidad de datos con casos individuales. "Es muy común que mirando los datos, cada uno de nosotros aparezca con conjeturas sobre '*por qué la gente hace tal o cual cosa, procede de tal o cual manera o tiene tal tipo de comportamiento*', *datos que uno juntó haciendo un análisis estadístico*. Pero después, cuando uno mira las reacciones en la relación uno-a-uno, descubre que ¡no es así!" Y sigue Bolt: "Es muy fácil quedarse empantanado en un lado o en el otro. Si uno pretende sacar conclusiones generales luego de analizar pequeños grupos, puede producir un error difícil de detectar en función de la muestra que uno analiza. Por el otro lado, si uno se basa únicamente en el análisis de los *grandes datos*, termina perdiendo 'el toque humano'". Para Bolt, el 'círculo constante' de cuestionarse todas las hipótesis termina siendo el gran desafío: lograr que las decisiones que toma la empresa den cuenta hasta del último 'agujero de bala', aun de aquellos que no se ven.

Como final: Wald y su mujer murieron el 13 de diciembre de

1950. Irónicamente, fueron dos de las víctimas cuando el avión en el que viajaban se estrelló en las montañas de Nilgiri, en el sur de la India. Hasta allí había ido invitado justamente por el gobierno indio, para dar conferencias sobre 'Teoría de la Decisión' y 'Econometría'.

En definitiva, la historia de Abraham Wald pone una vez más en escena la creatividad humana, y la capacidad de análisis que cuestiona aun lo que parece obvio. De eso se trata el método científico: por un lado, formular hipótesis que después se puedan comprobar con experimentos que sean repetibles y que ofrezcan los mismos resultados en 'otro' laboratorio o ambiente equivalente. Por otro lado, se trata de dudar, dudar y dudar, no creer en las 'autoridades académicas', ni en 'las verdades divinas o absolutas'. "Venga y proponga su idea: discutámosla y convénzame con argumentos. No me grite y pretenda ganarme por la fuerza de su prepotencia. Explíqueme para que le entienda. En todo caso, dese usted también… la posibilidad de estar equivocado."

¿Fraude electoral o no?

La que sigue es una historia verdadera. Pasó hace unos años, más precisamente en 2009 durante las elecciones presidenciales en Irán. Quiero presentar un trabajo que hicieron dos matemáticos norteamericanos: Bernd Beber y Alexandra Scacco[59], y que se basa en los resultados *públicos* que ofrecieron las autoridades iraníes. Después de leer la versión *abreviada* de lo que ellos escribieron, estoy —casi— seguro de que usted (como me pasó a mí) tenderá a sacar conclusiones definitivas. Es muy tentador hacerlo porque los datos, justamente, apuntan en la dirección de que hubo fraude. La prensa occidental se ocupó de sugerirlo de todas las maneras posibles y, créame, yo no lo sé ni tengo una opinión al respecto. Es por eso que le sugería que sea cuidadosa/cuidadoso antes de formarse una opinión definitiva. En todo caso, mi objetivo al proponer esta nota es que sepamos qué tipos de herramientas matemáticas se pueden usar para descubrir o detectar potenciales manipulaciones en los números. No son definitivas, porque no constituyen una *prueba*, pero son indicadoras de que

59. "What the Numbers Say: A Digit-Based Test for Election Fraud" ("Lo que dicen los números: un test basado en [el estudio de] los dígitos para [detectar] fraude en una elección"), por Bernd Beber y Alexandra Scacco, *Political Analysis* 20(2): 211-234.

algo *podría* haber pasado y que, más allá de las disputas políticas que terminan haciendo un ruido imposible de tolerar, así como ‘la pelota no dobla’, los ‘números no mienten’.

Empiezo por poner las cosas en contexto. Las elecciones se llevaron a cabo el 12 de junio de 2009. Había cuatro aspirantes a la presidencia: Mahmoud Ahmadinejad, Mid Houssein Mousavi, Mehdi Karroubi y Mohsen Rezai. Sé que los nombres nos dicen poco a nosotros, los que vivimos en *esta parte del mundo*, pero creo que corresponde conocer de qué personas estamos hablando. En el momento de las elecciones, Ahmadinejad ya era presidente y aspiraba a la reelección.

El contexto indicaba una fuerte sospecha de que habría fraude. De hecho, en el momento en que se conocieron los resultados que exhibían una abultada victoria de Ahmadinejad, aparecía como muy sorpresivo que hubiera ganado en áreas urbanas, incluida la capital Teherán o en Tabriz, la ciudad natal de uno de los candidatos, Mir Houssein Mousavi. Otros apuntaron a la pobre performance de Mehdi Karroubi, incluso en Lorestan, su provincia natal. De todas formas, lo que *más llamó la atención* es que en una elección que debía ser muy disputada —en el mejor de los casos— para el oficialismo, quien era presidente recibió más del 71 por ciento de los votos.

Todo esto se puede leer en el artículo que publicó el 20 de junio de 2009 el *Washington Post*[60], firmado por Beber y Scacco, los autores del trabajo científico. Pero se trata de conjeturas, sospechas que, naturalmente, están teñidas del color político con el que uno lo mira. Ahora bien: la matemática puede hacer otros aportes. De eso quiero hablar acá.

---

60. http://www.washingtonpost.com/wp-dyn/content/article/2009/06/20/AR2009062000004.html

El primer dato que se destaca es que la distribución de los votos del ganador fue muy *uniforme*, es decir, ganó virtualmente por el mismo porcentaje en todas las provincias. Esto, en sí mismo, no tendría por qué sorprender, salvo que si uno mira la historia de las elecciones en Irán, descubrirá que *no había pasado nunca*. Siempre hubo disparidad manifiesta entre los candidatos presidenciales que representaron a los distintos partidos, y las fluctuaciones eran evidentes en función de la geografía: en zonas urbanas ganaban unos, en zonas rurales ganaban otros, las diferencias eran muy ostensibles.

Sin embargo, ese dato aislado no dejaría de ser una curiosidad y nada más. Pero Scacco y Beber decidieron hacer otra cosa. Los humanos tenemos un problema muy serio con el azar. Por ejemplo, si yo le pidiera que usted fuera diciendo números al azar, es posible que los primeros de su lista lo sean, pero si tuviera que seguir y seguir hasta llegar al millón de números o más, *inexorablemente* aparecen *patrones* que ni usted mismo sospecha. Una computadora puede hacerlo instantáneamente.

Un hecho curioso surgió una vez con los iPods que fabrica Apple. Una de las funciones es la que se conoce como 'random' (o lo que es lo mismo, 'al azar', en castellano). Esa función es a la que uno apela si tiene una base de canciones muy grande y quiere que sea el propio aparato quien le haga una selección aleatoria. El problema se generó porque muchos usuarios decían, por ejemplo: "La función *random* me funciona mal, aparecen muchas canciones seguidas del mismo álbum", algo así como si uno empezar a tirar una moneda al aire y saliera siete veces consecutivas cara o ceca. Lo más probable (y esto lo compruebo personalmente en forma sistemática) es que las personas que ven esos resultados *sospechan inmediatamente de que hay algo 'raro' en la moneda o vos estás haciendo algo que yo no me doy cuenta*.

Sin embargo, la probabilidad de que eso suceda es mucho más alta de lo que uno presume y, por lo tanto, nuestra capacidad para entender lo que es el 'azar' está siempre puesta en duda.

¿Por qué escribí esto sobre el azar? Téngame paciencia y ya verá. Necesito dar un último paso. Suponga que yo le pidiera que usted escriba una lista con mil números naturales, o diez mil, veinte mil, no importa… una lista con muchos números. Ahora, fíjese en el último dígito de cada uno de ellos; fíjese que dije el último dígito, no el primero. Por ejemplo, si usted escribió el número 1479384, me estoy refiriendo al número *cuatro*. Dicho esto, pregunta: si la lista que usted escribió es *al azar*, ¿cuál tendría que ser el porcentaje de ceros, unos, dos, tres, cuatros, cincos, seis, sietes, ochos y nueves que aparecen como último dígito de cada número de su lista?

Sin pensar demasiado, si los números que usted eligió fueron al azar, no hay ninguna razón para que cada uno de los dígitos aparezca con mayor frecuencia que otro. Es decir, la distribución debería dar un 10 por ciento (aproximadamente, claro está) por dígito. Lo mismo debería suceder con los resultados en cualquier votación: el último dígito, o los dos últimos dígitos (los que *no definen ninguna elección*) deberían aparecer con la misma frecuencia, un diez por ciento cada uno en el caso del último, y un *uno por ciento* en el caso de los dos últimos.

Como decía anteriormente, cuando uno tiene *que representar al azar o replicarlo*… aparecen muchos problemas: no somos muy buenos al hacerlo. Si alguien quiere *manipular* números, debería tener en cuenta ese hecho. En general, nos parece que el número 3 o el número 7 representa más *el azar* que el número 0 o el número 5. Ahora vuelvo al caso Irán.

Beber y Scacco escribieron: "Vamos a concentrarnos en el número de votos que recibió cada candidato en cada una de las diferentes provincias, en particular en el último y penúltimo dígito. Por ejemplo, si un candidato recibió 14.579 votos en una provincia (como fue el caso de Karroubi en la provincia de Isfahan), vamos a focalizar nuestra atención en los números 7 y 9. Parecerá extraño porque estos dígitos, usualmente, no cambian quién es el ganador. De hecho, los últimos dígitos en una elección honesta, no nos dicen *nada* de los candidatos, ni la composición del electorado ni el contexto de la elección. Son parte del 'ruido' del azar, en el sentido que una recolección de votos cualquiera podría terminar tanto en 1 como en 2, 3, 4… o cualquier otro dígito. En algún sentido este dato sirve como 'prueba de fuego'[61] para decidir si hubo fraude o no. Por ejemplo, una elección en donde el número de votos termina mayoritariamente en 5, debería llamar la atención".

Siguieron un poco más adelante: "Revisamos los datos que proporcionó el Ministerio del Interior y que fueron publicados por la página web oficial Press TV. En total se contabilizaron 29 provincias y revisamos los totales de los cuatro candidatos: 116 números. Justamente estos números nos parecieron sospechosos. Encontramos *demasiados números 7 y no suficientes 5* como último dígito. Esperábamos que cada dígito apareciera al final con una frecuencia del 10 por ciento. Sin embargo, en los resultados por provincia, el número 7 aparecía el 17 por ciento de las veces y solamente el 4 por ciento eran números 5".

Por último, algo más respecto de la especie a la cual pertenecemos usted y yo: los humanos. Nos resulta muy complicado

61. Los autores usaron la frase 'litmus test', que se usa en química para decidir sobre la alcalinidad de una sustancia. En este caso, me pareció que la mejor traducción era 'prueba de fuego' pero, por supuesto, es mi traducción libre.

escribir números al azar que terminen en dos dígitos que *no sean consecutivos*. Es decir, nos es más fácil escribir un número que termine en 23 que en 64 o en 17. Si los datos *no hubieran sido manipulados*, uno esperaría que el 70 por ciento de esos números consistiera de pares de dígitos *distintos no consecutivos*. En el caso de las elecciones presidenciales en Irán solamente 62 por ciento de esos pares fueron no adyacentes. No parece una diferencia muy grande pero si uno calcula la probabilidad de que esto suceda en una elección honesta, ese número es apenas superior al 4 por ciento.

Un párrafo final. Un artículo publicado el 22 de julio de 2014 por Walter Mebane, Naoki Egame, Joseph Klaver y Jonathan Wall[62], pone en duda el trabajo de Scacco y Beber. No lo hacen en forma directa, pero sí cuestionan las observaciones hechas por *papers* de este tipo. A todos aquellos interesados en el tema, les sugiero buscar la literatura, que es muy abundante y también controversial.

Es por eso que yo no voy a sacar ninguna conclusión ni, como dije antes, tengo posibilidades de ofrecer una opinión educada. Pero lo que sí puedo hacer, y de hecho estoy haciendo, es advertir sobre los métodos que están a disposición de todas las personas honestas que quieren/queremos que haya elecciones honestas y no fraudulentas en todas partes del mundo.

Para terminar, quiero agregar acá un comentario de Alberto Kornblihtt[63]. Después de leer el artículo me hizo llegar algu-

62. http://spia.uga.edu/polmeth/library/pm14.pdf

63. Alberto es uno de mis grandes amigos. biólogo, doctor en Ciencias Químicas, especialista mundial en biología molecular, profesor titular en la Facultad de Ciencias Exactas (UBA), investigador superior del CONICET, uno de los revisores de la revista *Science*, miembro de las academias de ciencias argentina y norteamericana… y mucho más. No puedo incluir acá su

nas reflexiones que quiero compartir (con su autorización, claro está):

> El artículo me pareció sumamente interesante. Sin embargo, me preocupa lo siguiente. Si interpretamos como no azaroso el hecho de que el porcentaje de cada dígito en la última posición no sea cercano al 10% o que haya demasiada consecutividad de los dos últimos dígitos, para atribuir ese sesgo a causas fraudulentas es imprescindible analizar los mismos parámetros en las elecciones de otros países (no uno sino varios) para ver si se comportan como lo esperado o como las de Irán. Preferentemente con un número similar de votantes y de distritos electorales. La asunción sería que la probabilidad de que haya habido fraude en TODOS los países usados como control es muy muy baja. La necesidad de controles experimentales para validar ya no una conclusión sino una hipótesis es algo obligatorio en las ciencias experimentales. Sería inadmisible concluir nada si no se contara con el control adecuado. No sé si los autores del NYT lo hicieron. No me tomé el trabajo de leerlo. Pero si no lo hicieron, creo que es tu oportunidad [se refiere a mí] de resaltar, especialmente para los lectores que no están entrenados en la práctica científica, la importancia de los controles y la cautela en las afirmaciones.

El aporte de Alberto merecía más que una 'nota al pie'. Por eso la incluí en el texto principal. Sus observaciones mejoran fuertemente lo que estaba escrito y le agregan una calidad que no tenía antes.

---

currículum completo, porque me llevaría un capítulo entero del libro. Alguna vez se me ocurrió llamarlo 'el Messi de la ciencia argentina'.

El código de Parsons

Conozco muchísima gente que siente impotencia frente a la música. No es que no la disfruten, pero —tal como con la matemática, por poner otro ejemplo— se hallan totalmente alejados de poder *generar* nada: “Soy más sordo que una tapia”, “no puedo ni cantar en la ducha”… o frases equivalentes.

Fíjese si se reconoce en esta situación: usted está en un bar o en un colectivo o un auto y por la radio pasan una canción que usted reconoce pero no puede recordar el nombre: “¿Qué canción es ésa? ¿Cómo se llama?… No me digas, no me digas… Dejame pensar…”.

Sin embargo, más allá del esfuerzo que uno hace *no la puede descubrir*, no la puede *identificar*. Ya en la desesperación de no poder recordar uno se somete a tener que preguntar y aceptar —con fastidio— que alguna otra persona *sí* sepa el nombre; y si no, uno espera que finalice para que la locutora o periodista mencione el nombre de la pieza, el compositor y quien la cantó o ejecutó. Uno se queda masticando bronca e impotencia, pero… así es la vida.

Hace poco tiempo, más recientemente con el advenimiento de los teléfonos inteligentes y las apps que uno puede bajarse, apareció una que *solucionó* ese problema para siempre. Llegó Shazam.

Basta con que uno ponga el teléfono cerca del parlante que emite la música y, aunque haya muchísimo ruido, después de 15 segundos y casi como un pase de magia, aparece toda la información que uno busca: título de la canción, nombre del álbum que la contiene, autor de la pieza, cantante e incluso la letra: ¡todo! La pregunta natural entonces es: ¿cómo hacen?

Bastaría con que cada uno de nosotros aceptara que así como hoy existe Google, en donde uno tipea una *palabra*, *un nombre* o un *breve texto* y aparecen inmediatamente miles o millones de páginas webs que las contienen, lo mismo sucede con la música. La base de datos tiene almacenados *sonidos* en forma digital, en lugar de *textos*; por lo tanto, Shazam es el equivalente sonoro de Google.

Por supuesto, es muy fácil para mí escribir estos dos renglones e ignorar *el trabajo extraordinario* que hay detrás de Shazam. Me hace sentir incómodo presentar una analogía de este tipo que parece *minimizar* las ideas notables del grupo de personas que *programaron Shazam*. Si le interesa el tema, le sugiero que lea el artículo que publicó en el año 2003[64] Avery Li-Chun Wang, uno de los coautores de la aplicación multipremiada. Pero acá quiero parar y volver 40 años atrás, al año 1975. Ya verá por qué.

Justamente corría el año 1975 cuando Denys Parsons tuvo una idea maravillosa. Verá que después de leer lo que hizo uno tiene la tentación de decir: “Esto se me podría haber ocurrido a mí también”. Bueno, es posible, pero no se nos ocurrió ni a usted ni a mí: se le ocurrió a él.

La idea de Parsons fue premonitora de lo que pasa hoy con Shazam y terminó llamándose ‘El código de Parsons’. Es un sistema que permite también *rastrear canciones* aunque uno no

64. http://www.ee.columbia.edu/~dpwe/papers/Wang03-shazam.pdf

tenga los recursos tecnológicos a disposición que tenemos hoy. El método es realmente muy sencillo. No se asuste: no hace falta saber nada de música, no es una *prueba*, no nos mira nadie, no hay calificaciones, no hay nada… o mejor dicho, sí, hay algo: ¡hay una *idea*!

El método que diseñó Parsons se puede comparar con lo siguiente: suponga que usted está frente a una persona y quisiera retratarla. Por supuesto, si tiene una cámara de fotos sería una trivialidad. Bueno, pero usted *no tiene* ni una cámara de fotos ni un teléfono celular con cámara. ¿Qué hacer? Usted podría hacer un *dibujo* de la persona, un boceto, trazaría una suerte de 'contorno' que pretenda replicarla. Por supuesto, cuánto mejor sea su dibujo, más se acercará al original y permitirá reconocer de quien se trata.

Lo que hizo Parsons es diseñar una forma de trazar el *contorno* de una canción. Ya sé, ya sé: ¿el 'contorno' de una canción? ¿Qué es eso? Me explico y verá que es muy fácil de entender.

Elija mentalmente una canción que le sea fácilmente reconocible, digamos la canción que se suele cantar en los cumpleaños:

¡*Que los cumplas feliz, que los cumplas feliz,*
que los cumplas (nombre), que los cumplas feliz!

No se ría, verá qué es lo que hay que hacer y usted también podrá reproducirlo perfectamente. Ni siquiera hace falta que sepa y/o pueda *cantarla*. Basta con que la pueda *tararear*. Sígame por acá.

Tome un papel y un lápiz. Yo la/lo conduzco en lo que tiene que hacer. Como ocurre con cualquier canción que uno elija, *tiene que empezar con alguna nota*; no importa cuál, pero empieza en algún lado.

En el papel, anote un asterisco. Sí, me entendió bien, un asterisco así: *. Este asterisco representa a la nota con la que *empieza* la canción y, por lo tanto, es el momento en el cual usted empieza a cantar o a tararearla. En el caso que nos ocupa, la canción que se canta en los 'cumpleaños', es el momento en el que uno dice 'que'.

Ahora avancemos. Cuando uno tiene que avanzar y decir 'los', ¿se da cuenta usted de que es la misma nota? Es decir: no cambia nada. Tanto la palabra 'que' como la palabra 'los' van las dos en el mismo tono. Si le sirve, en lugar de cantarla… tararéela… y verá que usted no va ni para arriba ni para abajo: repite el mismo sonido.

Ahora, vuelva al papel en donde tenía anotado el asterisco. Como la segunda nota es la *misma que la primera*, agregue en el costado derecho del asterisco una letra R. ¿Por qué *R*? Es para indicar que hay que ***repetir*** (de ahí la R) la nota que uno había utilizado al principio. O sea, ahora en el papel usted tiene anotado: *R.

Sigo con la canción: después de haber *cantado* 'que los' uno dice 'cum' (parte de 'cumplas'). Pero para decir 'cum', usted advierte que ahora uno *no repite las dos notas del principio*. Pregunta: ¿sube o baja? Piénselo usted. ¿Qué le parece que sucede: *sube o baja* respecto de donde estaba?

¿Logra advertir que al cantar 'cum' usted está *subiendo*? En el papel entonces vamos a agregar una letra S, porque hay que *subir*. Ahora tenemos escrito:

*RS

¿Y después? Cuando tenga que *cantar* o *tararear* la parte final de la palabra 'cum-plas', *¿sube o baja*? Tararéela y verá lo que sucede. No la cante si no quiere, pero fíjese que después de 'cum', la sílaba 'plas' lo hace *bajando* otra vez. ¿Qué tendríamos que poner en el papel?: una B, porque uno *baja*. Es decir, debería figurar ahora:

*RSB

Si usted sigue tarareando (o cantando) la canción y va agregando una R (si repite), una B si baja o una S, si sube, en la primera parte de la 'tira' que va representando las notas del 'feliz cumpleaños', figura esta sucesión de símbolos:

*RSBSBBRSBSB

Inténtelo en soledad. Vea si está de acuerdo con lo que acabo de escribir. De todas formas, creo que usted está en condiciones de entender la idea: no hace falta saber nada de música, sólo prestar atención, al tararear una canción cualquiera, si uno va *subiendo* o *bajando* o eventualmente, *repitiendo*. Ni siquiera importa *cuántas notas uno sube o baja*, sólo importa si va para arriba o para abajo.

Una vez que uno tiene anotadas las letras R, S y B que corresponden a la primera parte de esta canción, hagamos lo siguiente: en el mismo papel hagamos un dibujo que pretenderá ser '*el contorno*' de la canción. Como se ve en la Figura 1, uno empieza en alguna parte anotando el 'asterisco', y a partir de allí coloca un punto hacia arriba si aparece una letra S, un punto a la misma altura si aparece una letra R, y un punto hacia abajo si aparece una letra B. Cuando aparecen dos R seguidas, uno traza un segmento horizontal. Si aparecen dos (o más) S seguidas, uno sube dos veces o más, y lo mismo con las letras B si es que la canción va hacia abajo. De esa forma, aparece un ‘dibujo’ que sirve para *graficar* o *replicar* la canción. En el caso del ‘feliz cumpleaños’ y las primeras 11 notas, el *contorno* queda así:

✲ R S B S B B R S B S B

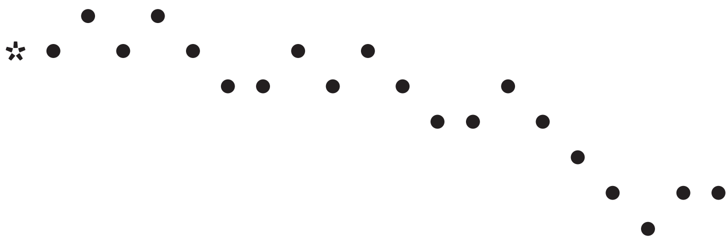


Figura 1

En la Figura 2 aparece el contorno de las primeras notas del *Himno a la Alegría* de Beethoven.

✲ R S S R B B B B R S S R B R

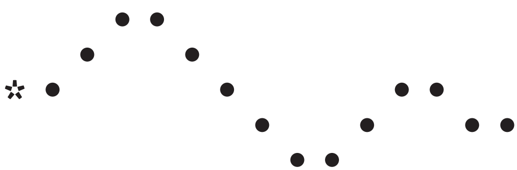


Figura 2

Ahora llega el momento de preguntarse qué más hizo Denys[65] Parsons con estos contornos. Parsons dedicó los siguientes cinco años de su vida a *indexar* y *categorizar* prácticamente toda la música que se conocía desde el siglo XVI en adelante. Luego, juntó todo el material y publicó un libro: *The Directory of Tunes and Musical Themes*, algo así como "La guía de canciones y temas musicales". En el prólogo escribió: "Estoy todavía anonadado que un test tan simple como éste, si uno lo hace hasta la nota número *dieciséis* de cada canción, le permite distinguir más de 10.000 temas musicales"[66].

Acá es donde me quiero detener y hacer una observación 'matemática'. ¿Dieciséis notas? ¿Cómo sabía Parsons que con el contorno de las 16 primeras notas de una canción uno podría distinguir cuál era? Es decir, ¿será verdad que si uno conoce el 'contorno' formado por las 16 primeras notas de una canción entonces *sabe cuál es la canción*?

La respuesta —creo— es muy interesante. Calculémosla juntos, usted y yo. Voy a empezar con un caso muy sencillo. De entrada fijémonos nada más que en las dos primeras notas de cada canción que se ha compuesto. Como la primera es *siempre* un asterisco, allí no hay variación, pero ¿cuál puede ser la segunda? Puede repetir (si hay una letra R), puede ir hacia arriba (si hay una letra S) o para abajo (si hay una letra B). O sea, hay solamente *tres posibles contornos*; no parece que sirva para mucho.

---

65. Sí, Denys se escribe así. A mí me resulta tan chocante como a usted, pero no le puse yo el nombre. Más aún: revisando la literatura uno descubre que Denys Parsons es el padre de Alan Parsons, el autor de "Eye in the Sky", cuya traducción supongo que es "El ojo en el cielo", del Alan Parsons Project, algo que me resultó ciertamente inesperado.

66. Como verá más adelante, uno estaba en condiciones de distinguir muchísimas más que 10 mil canciones.

Si ahora miráramos las *tres* primeras notas, la primera es siempre un asterisco, pero como vimos, hay tres posibilidades para seguir: *R o *S o *B. Veamos qué sucede con la siguiente nota.

Si uno empezó con *R, puede seguir con: *RS o *RR o *RB. O sea, hay tres posibles maneras de continuar.

Si empezara en *S, hay también tres posibilidades: *SS o *SR o *SB.

Por último, si empezara con *B, hay estas tres posibilidades: *BS o *BR o *BB.

O sea, en total, hay *nueve* posibilidades para las *tres* primeras notas. Usted detecta que el número *nueve* no es un número cualquiera, sino que $9 = 3^2$.

Ahora, le sugiero que pensemos juntos qué pasará si consideramos *una nota más*. En ese caso, no importa hasta dónde llegamos con las tres primeras, la cuarta será una R o una S o una B. Por lo tanto, para cada forma de llegar con las tres primeras, hay tres formas de seguir y, en consecuencia, hay que *multiplicar* por tres el número de formas que teníamos hasta allí.

Moraleja: ahora hay $3^3 = 27$ contornos posibles.

Como usted imagina, cada vez que agregamos una nota, es como si multiplicáramos por tres el número de contornos que teníamos. Por lo tanto, fíjese lo que sucede a medida que vamos agregando más notas en nuestra consideración.

Con dos notas	3 contornos posibles
Con tres notas	$3 \times 3 = 3^2 = 9$ contornos
Con cuatro notas	$9 \times 3 = 3^3 = 27$ contornos
Con cinco notas	$27 \times 3 = 3^4 = 81$ contornos
Con seis notas	$81 \times 3 = 3^5 = 243$ contornos
Con siete notas	$243 \times 3 = 3^6 = 729$ contornos

Y sigo en forma un poco más abreviada con esta lista:

$$3^{10} = 59.049$$
$$3^{15} = 14.348.907$$
$$3^{16} = 43.046.721$$

¿Y qué dicen estos números? Que con 16 notas (las que siguen a la inicial) uno podría distinguir más de 43 millones de canciones, que seguramente superan todas las que se han escrito hasta hoy.

Por otro lado, como $3^{17} = 129.140.163$, si uno considerara *una sola nota más*, entonces ya habría lugar para distinguir y/o diferenciar casi 130 millones de temas.

Y quiero parar acá. El crecimiento exponencial pone de manifiesto la potencia del método que ideó Parsons. Una vez que uno tiene el libro o si uno consultara hoy con Musipedia[67], tiene el problema resuelto en distinguir de qué canción se trataba. Una idea sencilla, un método práctico y problema resuelto.

Un breve párrafo final para la matemática: "*Sentadita a un costado y sin llamar demasiado la atención*", fue la que le ofreció a Parsons una herramienta para catalogar *todas* las canciones que se habían escrito hasta el año 1975. Pero como usted advirtió, considerando una sola nota más, uno estaría tranquilo en saber que tendrá categorizadas todas las que se vayan a escribir en este siglo o quizá más. Y lo que suceda después de este siglo… ni usted ni yo estaremos acá para reflexionar sobre el tema.

Sí estoy seguro de que la matemática aparecerá *siempre* para cooperar en la solución de casi todos los problemas que aparezcan. ¿No merecería tener un reconocimiento un poco mayor? Ya vendrá… es sólo cuestión de tiempo.

---

67. http://www.musipedia.org/

Rueda pinchada

Quiero contar una suerte de *interna* dentro de la matemática… o mejor dicho, entre los matemáticos. Hay un tema que genera las mayores controversias porque es donde aun los mejores, los más prestigiosos, los que sobresalen en sus respectivas áreas, tienen muchísimo cuidado y donde se producen (y se han producido) errores que no son visibles en ningún otro lugar: estimar probabilidades. Sí, aunque parezca un tema sencillo, no siempre lo es. Más aún: hay múltiples ejemplos de discusiones y controversias que tuvieron a mucha gente discutiendo acaloradamente y descalificando a quienes no compartían su opinión. Supongo que el caso más famoso es el que se conoce con el nombre de *Monty Hall*[68]. Cada vez que presento el problema en alguna clase o incluso en alguna charla, al conocer la solución se produce un murmullo como expresión de fastidio contenido. La mayoría *no quiere creer* lo que acaba de escuchar pero, al mismo tiempo, no quiere exponerse a discutir por temor a quedar en una mala posición con respecto al resto. Aunque, claro, siempre hay alguno que es más *atrevido* (afortunadamente) y que despierta una discusión que sigue siendo muy rica porque expone los problemas que tenemos para que la realidad empate nuestra intuición.

---

68. http://www.pagina12.com.ar/diario/contratapa/13-64074-2006-03-10.html

Me interesa muchísimo enfatizar algo: creo que este tipo de discusiones son esencialmente muy productivas, porque son las que nos permiten entender. Me cuesta trabajo llamar 'errores' de apreciación o incluso de intuición, porque es la forma habitual en la que la ciencia funciona: uno conjetura, cree que algo debería pasar (o pasa) y después necesita demostrarlo. Allí aparecen las dificultades: no siempre puede hacerlo y pasa mucho tiempo hasta descubrir que uno —en esencia— no entiende bien el problema, y allí mismo es cuando se están produciendo los primeros avances, en los momentos en donde uno cree que había entendido algo que en realidad no era así.

El problema que voy a exponer ahora no alcanza (ni de cerca) el rango del de Monty Hall, pero me pareció excelente para volver a poner a prueba nuestra capacidad para *intuir* una respuesta. Antes de seguir: no hace falta saber nada particular, no hay que conocer nada más que la definición de probabilidad de que un evento suceda. Es decir, cuando usted acepta como natural que la probabilidad de que al tirar una moneda salga cara sea de ½ (o un 50% de posibilidades) es porque uno está —mentalmente— aceptando que hay dos casos posibles (que salga cara o que salga ceca) y uno solo favorable (que salga cara)[69]. Por lo tanto, la probabilidad es *el cociente* o *la división* entre casos favorables (en este caso *uno* solo) dividido por los posibles (en este caso *dos*) y por eso la probabilidad es ½. Si yo le preguntara cuál es la probabilidad de que al tirar un dado salga un número *par*, los casos favorables son *dos, cuatro y seis*, y los posibles son seis: que salga un *uno, dos, tres, cuatro, cinco o seis*. Luego, al dividir favorables (tres) por posibles (seis), se obtiene una probabilidad

---

69. Y acepta también en forma inadvertida, que la moneda 'no está *cargada*'.

de ½. Moraleja: la probabilidad de que al tirar un dado salga un número par es justamente ½. Si usted entendió lo que escribí en este párrafo, está en condiciones de resolver el problema que voy a plantear a continuación. Sígame por acá.

Un profesor en la facultad estaba por tomar un examen un sábado por la mañana. Los alumnos estaban citados a las ocho para comenzar la prueba. Dos de ellos no llegaron a tiempo. La noche anterior habían tenido una fiesta y regresaron a sus respectivas casas pasadas las *cuatro* de la mañana. Se quedaron dormidos. Como uno de ellos solía pasar a buscar al otro por la casa, el problema de uno se transformó en el problema de los dos. De todas formas, cuando el examen estaba por terminar, alrededor del mediodía, ambos llegaron apurados, consternados y desconsolados.

Pidieron hablar con el profesor mientras los otros alumnos estaban todavía escribiendo el examen y éste los recibió en su oficina.

> —Queríamos hablar con usted para ver si podíamos rendir el examen ahora —dijo uno de ellos.
>
> —¿Qué les pasó? —preguntó el docente.
>
> —Es que pinchamos una goma y por eso no pudimos llegar a tiempo —contestó el otro.
>
> —De acuerdo —siguió el profesor—. Espérenme un instante que voy a adaptar el examen. Mientras tanto vos (apuntando a uno de ellos), sentate en la primera fila y vos (señalando al otro), sentate en la última.

Cuando los alumnos se retiraron, el profesor hizo algunos cambios en el texto del examen. En una parte de la hoja, escribió uno de los problemas que tenía previsto para todo el alumnado y le puso un valor de *cinco puntos* sobre los *cien* que componía toda la prueba. En la parte de atrás de la hoja, les pidió que escribieran cuál de las cuatro ruedas del auto se había pinchado. Esta respuesta la valuó en 95 puntos (sobre los cien).

Ahora pregunto yo: ¿cuál es la probabilidad de que ambos eligiera la misma rueda?

Como se ve, es un problema bien sencillo de entender (al menos, eso espero). ¿Tiene ganas de pensar? Me apuro a escribir algo: la respuesta *no es* 1/16.

Respuesta

Como escribí anteriormente, para poder calcular la probabilidad de que ambos escriban *la misma rueda*, será necesario poder contar, por un lado, *todos los casos posibles* y luego elegir entre ellos cuáles son los casos *favorables*.

Para empezar, quiero identificar las cuatro ruedas. Las voy a llamar así:

1. DD, a la rueda delantera derecha;
2. DI, a la rueda delantera izquierda;
3. TD, a la rueda trasera derecha; y
4. TI, a la rueda trasera izquierda.

Cada alumno está en un lugar separado del otro. Por lo tanto, *no puede ver lo que su compañero escribe*. Cuando el profesor reciba los exámenes, se fijará en la parte de atrás de cada hoja para ver qué fue lo que escribió cada uno; supongamos que el que está sentado en la primera fila escribió DD, y el que está sentado en la última escribió TI. En ese caso, le propongo que consideremos esa respuesta así: (DD,TI).

Es decir, en la primera parte de lo que figura entre paréntesis, está la elección de uno de los alumnos. La que figura en la segunda parte del paréntesis es del segundo alumno.

Dicho esto, ¿cuáles son todas las respuestas posibles que pudo haber recibido el profesor? Piense usted por su lado y yo escribo todos los posibles *pares* a continuación:

(DD,DD) – (DD,DI) – (DD,TD) – (DD,TI)
(DI,DD) – (DI,DI) – (DI,TD) – (DI,TI)
(TD,DD) – (TD,DI) – (TD,TD) – (TD,TI)
(TI,DD) – (TI,DI) – (TI,TD) – (TI,TI)

Tabla 1

Le propongo que relea los 16 pares que acabo de escribir. Fíjese que contemplan *todas* las posibles combinaciones de lo que pudieron haber dicho los dos alumnos. Cada uno de ellos pudo haber elegido cualquiera de las cuatro ruedas y, para cada una de esas elecciones del primero, el segundo pudo haber elegido cualquiera de las cuatro ruedas también. Es por eso que no sorprende (espero) que el total de los casos posibles sea 16.

Ya tenemos una parte del problema resuelta: sabemos cuáles son todos los casos posibles. Nos falta contar ahora cuáles son todos los casos *favorables*. Tengo una pregunta para hacerle antes de avanzar: en este contexto, ¿qué quiere decir *caso favorable*?

Acá es donde el problema se torna un poco más interesante. Veamos si usted está de acuerdo conmigo. Para que sea considerado *favorable* es necesario que *los dos alumnos hayan elegido la misma rueda*. Vaya hasta los 16 pares que aparecen en la Tabla 1.

Entre todos los pares, ¿cuántos hay en donde los dos eligieron la misma rueda? Cuéntelos usted.

¿Qué encontró? Que hay exactamente cuatro en donde la elección de cada alumno fue la misma: (DD,DD), (DI,DI), (TD,TD) y (TI,TI).

Es decir, entre los 16 pares posibles hay *exactamente cuatro* que son favorables. ¿Por qué? Porque en estos cuatro los dos alumnos eligieron la misma rueda.

Luego, como hay que dividir los favorables sobre los posibles, se obtiene 4/16 = ¼.

Es decir, *la probabilidad de que los dos hayan elegido la misma rueda es ¼*.

¿Por qué esto atenta —un poco— contra la intuición? ¿Por qué uno tiene la tentación de decir 1/16? Es que si efectivamente los alumnos **no** hubieran estado mintiendo, entonces habría *un solo par (entre los 16) que sería el correcto*.

Desde afuera, uno sabría que hay una sola de las cuatro ruedas que se pinchó y, por lo tanto, entre los 16 pares posibles habría *uno solo que sería el verdadero*. Pero en este caso, como ninguna de las cuatro ruedas se pinchó, bastaría con que ambos coincidieran en la elección de la rueda para que eso sirva para confundir al profesor. Por lo tanto, hay cuatro casos favorables y *no* uno solo.

Moraleja

Si una de las cuatro ruedas se hubiera pinchado efectivamente, entonces sí, la probabilidad de que ambos hubieran elegido la correcta sería 1/16. Pero en este caso eso no hace falta: lo único que necesitaban ambos era elegir ¡la misma rueda! y esa probabilidad es de 4/16 o sea, ¼. Conviene acostarse un rato antes o dormir después del examen, salvo que usted se tenga tanta confianza como para sentirse seguro con un 25% de posibilidades a favor.

¿Quién fue el culpable?

La lógica es una parte de la matemática que no siempre es reconocida como parte de ella; es imposible *hacer matemática* sin apelar a recursos lógicos. De la misma forma, es *imposible vivir* sin utilizar todas las herramientas que la lógica provee.

Es por eso que el siguiente problema sirve para exhibir la potencia que tienen los razonamientos y que permiten decidir situaciones que de otra manera parecerían encubiertas. Toda vez que la propia matemática esté puesta al servicio de cualquier deducción, siento que estamos más cerca de disfrutarla un poco más.

Por supuesto, el planteo que voy a hacer es totalmente ficticio y, si se me permite, imposible de que suceda en la realidad. Sin embargo, la propuesta va a requerir que usted apele a su capacidad de deducción, de observar los datos que tiene enfrente y descubrir… ¿quién fue el culpable? Es 'casi' como un juego de detectives. Acá voy.

Suponga que hay *cien personas* dentro de un auditorio a punto de escuchar una conferencia. El número podría ser cualquiera: elijo cien pero usted detectará inmediatamente que el argumento sirve para cualquier número de personas.

Suponga que están numeradas, del 1 al 100. En el momento que está por empezar la charla, una persona se acerca al expositor y le dice que uno de los espectadores robó una billetera.

Con toda ingenuidad, el conferencista pregunta: ¿quién *robó* la billetera?, y recibe las siguientes respuestas.

La persona número *uno* dice: 'Yo no fui'.
La persona número *dos* dice: 'Fue el número *tres*'.
La persona número *tres* dice: 'Fue el número *cuatro*'.
La persona número *cuatro* dice: 'Fue el número *cinco*'.

Y así siguiendo, cada uno va acusando al que lleva el número siguiente hasta llegar a los dos últimos en donde se produce una *ligera* modificación. El número 99 dice, como los anteriores: 'Fue el número *cien*', pero la persona que lleva el número *cien* dice (igual que el primero): 'Yo no fui'.

Ahora, tengo una pregunta para usted. Suponga que *todos los espectadores* ***mienten salvo uno*** que dice la verdad. O sea, de los cien participantes, hay 99 que mienten y solamente uno de ellos dijo la verdad.

Con estos datos, ¿se puede determinar quién fue el que robó la billetera?

La respuesta es que sí. Pero le sugiero que le dedique un rato a pensar por qué se puede decidir y, además, quién de los cien que estaban en la sala fue el que la robó.

Respuesta

El objetivo entonces es tratar de decidir si es posible saber quién fue el que robó la billetera. Para eso, le propongo un camino, que ciertamente no es el único (ni mucho menos), para llegar a la conclusión final.

Acompáñeme con mis razonamientos, pero si en algún momento siente que usted tiene una idea mejor, abandóneme y vaya con lo que se le ocurra a usted: *siempre* será mejor que cualquier cosa que pueda proponerle yo. ¿Sabe por qué?: porque es *su* idea, y elaborar sobre esa base no tiene precio.

Sigo. Analicemos qué pasaría caso por caso. ¿Podría haber sido el número *uno*? Veamos. El número *uno* estaría mintiendo cuando dice que 'él no fue'. También estarían mintiendo, desde el dos hasta el 99, porque todos dirían que fue el que lleva el número siguiente, y todo eso sería mentira. ¿Qué pasaría con el último, el número *cien*? Esta persona **SÍ** dice la verdad: 'él no fue'. Y entonces, ¡todo cierra bien! La persona número *uno* pudo haber sido el que robó la billetera.

¿Por qué no termina acá el análisis del problema? Es que, ¿cómo sabemos que lo mismo se puede deducir de *todos* los restantes, o siquiera de *algún otro*?

Veamos si esto pudo haber pasado. ¿Pudo haber sido el número *dos*? (¿No tiene ganas de pensar usted?)

El número *dos* ***no pudo ser*** porque, entonces, el número uno y el número cien estarían diciendo la verdad, y sabemos que hay uno solo de los cien que no mintió.

¿Pudo haber sido el número *tres*? No, porque entonces el número uno y el cien también dijeron la verdad. Incluso más: el número dos *también* habría dicho la verdad cuando lo incriminó al tres. O sea, el tres *no pudo ser*.

De la misma forma (y por idénticas razones), no pudieron ser ni el cuatro, ni el cinco, ni el seis… ni el 99. Es que si hubiera sido el 99, entonces hay tres que habrían dicho la verdad: el uno, el 98 y el 100.

Falta un solo paso: ¿pudo haber sido el 100 quien se quedó con la billetera? Fíjese que no, y otra vez por las mismas razones que antes. Si hubiera sido el 100, entonces hay *más de una de las personas que dijo la verdad* (¿cuáles? ¿Quiere pensar usted?).

En ese caso, de haber sido el 100, entonces el uno dijo la verdad (él no fue) pero también el 99 acusó correctamente al ladrón.

¿Cuál es la conclusión entonces? Justamente, la única posibilidad es que el número *uno* fue el ladrón. Todas las otras alternativas, *violan* las reglas establecidas (de los cien, todos mintieron salvo uno) y, por lo tanto, apelando solamente a reflexionar sobre todas las posibles alternativas, la única que cumple es que el número *uno* haya sido quien se quedó con la billetera.

Una vez más, y aunque parezca un problema trivial, reflexiones de este tipo, análisis de este tipo, deducciones de este tipo, están basados en herramientas de lógica que provee la matemática, y no siempre están expuestas. En este caso, apelando a ellas, fue posible 'hacer de detectives' y descubrir al ladrón.

Bacterias y virus

El que sigue es un problema precioso. Toca un tema que —salvo a los biólogos— al resto de los mortales nos resulta siempre *ajeno*. Es decir, lo que voy a proponerle es que aborde la pregunta que voy a hacer usando nada más que su capacidad creativa (que no es poca). Usted dirá: “¿Y qué sabe usted de mi *capacidad creativa*?”. Y yo voy a contestar: “Mucho. Mucho más de lo que usted supone”.

Me explico: existe —en general— una tendencia a suponer que hay ciertas cosas para las cuales ‘uno *no* es capaz’. ¿Seguro? Sí, muchísima gente (entre los que me incluyo) suponemos en múltiples oportunidades: “No, esto no es para mí”.

Si bien esto me sucede a mí tanto como a cualquier otra persona, me resisto a claudicar de entrada. Puede que el tema *no me interese* y, por lo tanto, reniegue en dedicarle *tiempo* que, a excepción de mi salud, es lo más preciado que tengo/tenemos. Pero después, salvo que se trate de una característica muy particular, que requiera de un estudio y/o entrenamiento especial, en principio, creo que *todos* estamos en condiciones de abordar *todos* los problemas. Lo haremos con diferentes posibilidades de éxito, pero si por éxito se entiende *solamente encontrar la solución definitiva*, entonces tenemos dos perspectivas diferentes. Yo quiero ser capaz de poder *pensar*, de poder *elaborar ideas*, de tener algo en mi cabeza que requiera de mi capacidad para pensar. Después, si yo le dediqué un tiempo razonable y logré avanzar hasta convencerme de que o bien requeriría de ayuda o bien necesitaría dedicarme y *estudiar* más de lo que sé, ésa es una instancia distinta. Lo que no quiero hacer es *rendirme* de antemano. ¿Por qué? Es que si el *desafío* me interesa, o mejor dicho, si el objeto de estudio o la propuesta *'me' desafía*, entonces me dan ganas de pensarlo y analizarlo. Seguro, y lea otra vez lo que acabo de escribir: "seguro" que voy a salir mejor que lo que entré. No es poco.

Acá voy. Suponga que yo le doy una probeta con una población de —digamos— cien bacterias. El número *cien* (la cantidad de bacterias) es arbitrario. El problema requiere que yo elija un número, pero podría haber elegido dos, diez, mil o cien millones. No importa y dentro de un rato verá por qué.

Suponga entonces que en la probeta hay cien bacterias y usted quiere probar con un virus para saber si las puede eliminar (o no). El experimento que hace le permite concluir lo siguiente:

Cuando usted pone el virus con una población de bacterias de ciertas características, a las 24 horas, el virus *mata una* de las bacterias, pero las que quedan se duplican (o sea, al pasar un día, en lugar de 100 bacterias ahora va a haber (99 × 2 = 198). Pero lo curioso es que el virus *también se duplica*. Es decir, ahora, pasadas las 24 horas iniciales, hay dos virus y 198 bacterias.

La pregunta es: si dejamos que se reproduzcan las mismas condiciones (cada día con más bacterias y más virus), ¿habrá algún momento en el que los virus destruyan ***todas*** las bacterias? ¿Qué se podrá decir? Y si los virus que se van reproduciendo (igual que las bacterias) pudieran destruirlas o matarlas a todas, ¿cuánto tiempo tardarán? ¿Se podrá dar respuesta a estas preguntas?

Es un momento justo para que yo la/lo abandone y la/lo deje con usted misma/mismo. Sólo le pido que reflexione sobre las condiciones del problema, hasta convencerse de que entendió el planteo: al principio hay 100 bacterias y un virus. A las 24 horas, el virus se duplicó (ahora hay dos), pero al que había originalmente le alcanzó para matar *una sola bacteria*. Ahora bien, en esas 24 horas, las 99 que no murieron, se reprodujeron: en total, hay 198. Con estas condiciones, ¿habrá algún momento en el que los virus destruyan *todas* las bacterias? ¿O qué pasará? Y si los virus pudieran ir matando a las bacterias siguiendo las reglas que escribí antes, ¿cuánto tiempo tardarían?

Sigue usted. Yo lo encuentro a continuación con algunas ideas.

Tiempo de reflexión

Ahora llegó el momento de pensar juntos. Le propongo una idea que yo suelo usar mucho: cuando puedo, trato de *reducir* el problema a números que sean más *manejables*. Es decir, el caso que yo planteé acá, involucra a 100 bacterias y un virus. Reduzcamos el número de bacterias a una sola bacteria y veamos qué sucede.

Si tuviéramos nada más que una bacteria y un solo virus, entonces, al pasar 24 horas, el virus se habrá duplicado, pero la bacteria que había será destruida por el virus que había originalmente. O sea, si empezáramos con una bacteria y un virus, entonces a las 24 horas, el problema está resuelto: la bacteria muere[70].

Supongamos que de entrada hay dos bacterias. O sea, hay dos

70. Me doy cuenta de que van a quedar dos virus, pero eso no importa a los efectos del problema. La pregunta es si con el paso del tiempo, las bacterias desaparecerán todas, y en el caso de *una sola bacteria* esto sucede a las 24 horas, o sea, cuando pasó un día.

bacterias y un virus. A las 24 horas, el número de virus se duplica: tendremos *dos* virus. Una de las bacterias desaparece, pero la que queda se duplica. O sea, una vez que pasó *un día*, tendremos otra vez dos bacterias pero también tenemos dos virus. Es interesante analizar este caso: luego de 24 horas, seguimos teniendo dos bacterias, pero ahora tenemos dos virus (antes teníamos uno). Fíjese que si —imaginariamente— separáramos cada virus con cada bacteria y las pusiéramos ahora en dos 'miniprobetas', pasaríamos a tener el problema más 'chico' con el que empecé este análisis.

Uno podría analizar cada bacteria con cada virus y advertir que en 24 horas más, o sea, al terminar el *segundo día*, cada virus mató a la bacteria que le correspondió en esa miniprobeta y ya no habrá más bacterias para que se reproduzcan. Por supuesto que quedarán virus vivos, pero lo que me importa es que las bacterias, en *dos* días, desaparecieron todas.

Avancemos un paso más: supongamos que ahora tenemos *tres* bacterias y un virus. ¿Quiere pensar un rato sin mis sugerencias?

Sigo. ¿Qué sucede a las 24 horas? El virus mata una bacteria, se reproduce (hay dos virus ahora) y las bacterias que quedaron vivas (dos), se duplican. O sea, hay *cuatro bacterias*, pero ahora, hay *dos virus*. Esto es un paso adelante, porque por cada virus que hay, puedo ubicarlo —imaginariamente— con dos bacterias (y no tres como había al comienzo). Es decir, si pudiéramos separar la probeta en dos partes (o suponer que ahora podemos tener dos miniprobetas en lugar de una), en cada una de ellas habría un virus y dos bacterias. Cuando pasen 24 horas más (al segundo día), en cada miniprobeta el virus matará a una de las dos bacterias, y la que queda (una sola) se duplicará. Pero el virus ¡también se duplica! Luego, juntando lo que hay en todas las miniprobetas, tendremos cuatro virus y cuatro bacterias. Ahora podríamos imaginar que tenemos *cuatro* miniprobetas, y en cada una ponemos un virus y una bacteria. Al pasar un día más (ahora pasaron *tres* desde que empezamos el experimento), cada virus matará a la bacteria que tenía asignada y, por lo tanto, las bacterias desaparecerán todas.

Moraleja: si uno empieza con tres bacterias y un virus, al pasar *tres* días, las bacterias desaparecen todas.

Si usted reflexiona conmigo y recapitulamos el proceso, verá que sucedió lo siguiente. Voy a llamar B a las bacterias y V a los virus. En cada paso, voy dividiendo —imaginariamente— las bacterias que quedan por el número de virus. De esa forma, en cada miniprobeta voy reproduciendo, día por día, el experimento inicial, sólo que ahora mientras el número de virus aumenta, el número de bacterias también crece, aunque siempre disminuyendo la cantidad de bacterias que quedan por miniprobeta. A continuación, el resumen.

Condición inicial

1B y 1V	En *un* día, desaparecen las bacterias.
2B y 1V	En *un* día, quedan 2B y 2V. Los separo en dos miniprobetas. En cada una ahora hay 1B y 1V. Al pasar un día más (*dos días* en total), desaparecen las bacterias.
3B y 1V	En 1 día, 4B y 2V. Separo 2B y 1V por miniprobeta. Al terminar el día dos, hay (en cada miniprobeta) 2B y 2V. En total, 4B y 4V. Los separo (dividiendo el número de bacterias por el número de virus), y tenemos ahora cuatro miniprobetas. En cada una hay 1B y 1V. Al pasar el *tercer día*, desaparecen las bacterias.

Hago un solo paso más, porque creo que la idea ya empieza a vislumbrarse claramente. Si empezamos con 4B y 1V.

A las 24 horas, tenemos 6B y 2 V. Los separo en dos miniprobetas de 3B y 1V.

Fíjese entonces en el caso anterior (en donde había 3B y 1V). En tres días, desaparecen las bacterias. Luego, como usamos *un día más* para llegar a tener 3B y 1V, al resumir, en *cuatro días*, desaparecen las bacterias.

Es decir, si empezamos con 4 bacterias y 1 virus, en 4 días, desaparecen las bacterias.

Creo que con esta idea, es posible entender ‘el patrón’ de lo que está sucediendo. Pensémoslo juntos (usted y yo): con esta misma idea, si uno empieza con 100 bacterias y 1 virus, necesitará esperar 100 días para que desaparezcan *todas* las bacterias.

Y si originalmente hubiera un número *N* de bacterias, hará falta esperar *N* días para que desaparezcan todas las bacterias.

El argumento se basa en que si el primer día hay N bacterias y un virus, al segundo día hay 2×(N – 1) bacterias, pero *dos* virus. Y este caso, lo puedo pensar como si dividiera (N – 1) bacterias con un virus por un lado, y las otras (N – 1) bacterias con el otro virus por el otro. O sea, hemos reducido el caso original, a *dos casos* pero con una bacteria menos. Eso garantiza que, al final, las bacterias van a desaparecer todas.

Reflexión final

Al principio, era difícil conjeturar lo que iba a pasar porque, si bien la cantidad de virus se duplica, la cantidad de bacterias también, pero… en el camino va desapareciendo *una* por cada virus. Este hecho es determinante para poder concluir que, si uno empezara con *mil bacterias*, necesitará esperar *mil días* para garantizar que todas las bacterias mueren, y si la cantidad de bacterias hubiera sido de *un millón*, habrá que esperar *un millón* de días para que los virus las maten a todas.

Cumpleaños en Singapur

Kenneth Kong es el conductor de un programa matutino de televisión que se emite en Singapur, tal como sucede en miles de ciudades y/o países del mundo. Más aún, el título del programa es bien sugerente: *Hola Singapur*.

El pasado viernes 10 de abril, Kong puso en su cuenta de Facebook un problema que —supuestamente— iba dirigido a alumnos de quinto grado del colegio *primario*. Lo subió con un anuncio: "Este problema me genera discusiones con mi mujer… y ¡es un problema para alumnos de quinto grado!".

Lo que sucedió a partir de allí es difícil de explicar. Mejor dicho, puedo usar una palabra que hasta hace muy poco tiempo no existía: 'se viralizó'. Primero, encendió un debate en todo Singapur, pero después, se trasladó al mundo. De hecho, ahora es muy difícil, por no decir imposible, que una situación de este tipo no se replique en forma 'casi' instantánea y se esparza, justamente, como un virus o una epidemia.

Lo interesante es que si bien a Singapur le suele ir —generalmente— muy bien en las competencias internacionales de matemática, es muy poco probable que niños de alrededor de diez años estén en condiciones de resolver con naturalidad un problema de estas características.

Kong se encontró *abrumado* por la reacción mundial que generó y después aclaró que no estaba pensado *exactamente* para esas edades, sino para entrenar alumnos de colegio secundario que participan en olimpíadas matemáticas internacionales. Sin duda, una clara diferencia.

De todas formas, el problema en sí mismo creo que es extraordinario, porque pone en evidencia —una vez más— que los problemas de la vida *no tienen edades típicas*. Un niño, con toda su candidez (que ciertamente me gustaría tener a mí), puede abordar una dificultad con un grado de creatividad que los más adultos nunca imaginamos o desechamos porque la creemos inadecuada. Me gustaría aprovechar este contexto para señalar —una vez más— que creo cada vez menos en la cultura enciclopedista y valoro cada vez más en estimular la creatividad, los ángulos distintos para pensar un problema y en promover los abordajes —supuestamente— más absurdos. De allí surgen las ideas, de la 'prueba y error', de intentar por lugares inexplorados y no siguiendo caminos que otros ya recorrieron y que resultaron inconducentes, o terminaron siendo inapropiados. Pero, como es habitual, me desvié.

Quiero proponerle algo: ¡no se entregue! No lo deje… no lea la solución en forma instantánea. No se prive del placer de *pensar*. ¿Qué apuro tiene? Guarde el enunciado en un papel o en su memoria y piénselo cuando tenga tiempo. Créame: vale la pena. No importa si 'no le sale' en forma inmediata… ¿qué problema hay? ¿Quién lo juzga? ¿A quién le importa? ¿No tiene ganas de regalarse un tiempo con usted misma/mismo y aprender, eventualmente, a coexistir con la frustración de tener un problema en la cabeza al cual *todavía* no le encontró la solución?

Ahora sí, acá voy.

Voy a adaptar un poco el enunciado propuesto por Kong para hacerlo más 'amigable'. Es que la redacción original está muy descuidada y las confusiones que podría generar no tienen nada que ver con el problema en sí mismo. Lo que sigue entonces es una versión 'libre'… mía.

Alberto y Bernardo son dos amigos que acaban de conocer a Cheryl. Están curiosos por saber cuántos años tiene. Cheryl decide poner a prueba la capacidad de análisis de sus dos 'nuevos' amigos y hace lo siguiente: escribe en un papel diez días del año.

Mayo 15 – Mayo 16 – Mayo 19
Junio 17 – Junio 18
Julio 14 – Julio 16
Agosto 14 – Agosto 15 – Agosto 17

Les dice a ambos que uno de esos días corresponde a su cumpleaños. Pero en lugar de señalar específicamente cuál es, llama a Alberto y le dice en el oído *el mes* (y nada más que el *mes*) en el que nació. Después, aparta a Bernardo y le dice en el oído también a él, sin que Alberto pueda escuchar, *el día* (y nada más que el *día*) de su nacimiento.

Es decir, cada uno de los dos conoce un dato distinto: Alberto sabe el mes, Bernardo sabe el día.

Se produce entonces el siguiente diálogo:

Alberto: Yo no sé cuándo nació Cheryl pero estoy seguro de que Bernardo tampoco lo sabe.

Bernardo: Al principio, yo no sabía cuándo había nacido Cheryl, pero ahora sí lo sé.

Alberto: Ah, entonces *ahora* yo *también* lo sé.

Ahora le toca a usted. ¿Qué día es el cumpleaños de Cheryl?

Así planteado, parecería imposible determinar la fecha… sin embargo, le propongo que avancemos juntos en analizar algunas posibilidades y verá que se puede.

Vuelvo a escribir acá las diez fechas posibles:

Mayo 15 – Mayo 16 – Mayo 19
Junio 17 – Junio 18
Julio 14 – Julio 16
Agosto 14 – Agosto 15 – Agosto 17

Me apuro a mostrarle —hipotéticamente— cómo pudo haber sabido Bernardo la fecha de cumpleaños inmediatamente. Suponga que Cheryl le hubiera dicho el número 18. En ese caso, como hay *un solo* número 18 entre los diez posibles (el que corresponde al 18 de junio), entonces Bernardo tendría la solución.

Y fíjese qué curioso: ahora que hemos analizado esta posibilidad con el número 18, usted advierte que hay *otro* número que cumple con las mismas condiciones: el 19. Si Cheryl le hubiera susurrado en el oído a Bernardo el número 19, este dato *también* le alcanzaría para saber la fecha de cumpleaños (el 19 de mayo), ya que hay *un solo 19* entre los diez candidatos.

¿Qué se deduce de esto? Varias cosas… pero me gustaría pensarlas junto a usted. Analicemos ahora el diálogo que mantuvieron Alberto y Bernardo. En un instante verá cómo esa conversación, que parece claramente 'inocente' fue la que terminó iluminando el camino a la solución.

Alberto dice en su primera frase que, con el dato que le dio Cheryl (el mes), no le alcanza para saber qué día nació. Pero lo que *también* dice Alberto es que él sabe que Bernardo *tampoco* puede saber. ¿Por qué habría de saber esto Alberto?

Piense conmigo lo siguiente: si Cheryl le hubiera susurrado a Alberto el mes de mayo, entonces, *uno de los posibles días que Cheryl le podría haber dicho a Bernardo es el día 19*. En ese caso, Bernardo ***sí*** sabría el día de cumpleaños de Cheryl. Por lo tanto, cuando Alberto dice que él *sabe* que Bernardo no puede saber, es porque Cheryl no le pudo haber dicho *mayo*. Esto excluye al mes de mayo de la discusión.

Más aún: con el mismo análisis, Cheryl no le pudo haber dicho a Alberto *tampoco* el mes de junio. Es que si le hubiera dicho junio, el cumpleaños pudo haber sido el día 18 y, por lo tanto, Alberto no debería decir que él está seguro de que Bernardo no sabe.

Moraleja: cuando Alberto dice que no solamente él no sabe, sino que él está seguro de que *tampoco Bernardo* sabe, es porque el mes que le dijo Cheryl a Alberto en el oído, ¡no fue ni mayo ni junio!

Este análisis permite descartar inmediatamente *cinco* de las diez fechas posibles. El cumpleaños de Cheryl queda ahora reducido a estos cinco días:

Julio 14 – Julio 16
Agosto 14 – Agosto 15 – Agosto 17

Hasta aquí hemos llegado luego de analizar la primera frase de Alberto. Ahora, pasemos a la frase de Bernardo.

Lo primero que dice es que 'al principio' él tampoco podía saber la fecha del cumpleaños. ¿Qué podría querer decir 'al principio'? Que el número que le dijo Cheryl no fue suficiente para ayudarlo. Por ejemplo, como escribí antes, si Cheryl le hubiera dicho o bien el número 18 o bien el 19, Bernardo ya podría decidir. Pero no fue así.

Sin embargo, el dato que se agregó a lo que ahora sabe Bernardo, es que no solamente escuchó a Cheryl, sino que escuchó *también* lo que dijo Alberto. Cuando Alberto dice que él no puede decidir, eso no puede representar ninguna sorpresa: conociendo solamente el mes, era seguro que él no iba a poder, pero el dato nuevo para Bernardo es que Alberto dice que él sabe que Bernardo *tampoco* puede saber. Eso le permite a Bernardo descartar los meses de mayo y junio (como ya vimos), pero agrega algo más.

Como las cinco fechas que quedan disponibles son las de julio y agosto, el *número* que Cheryl le dijo a Bernardo tuvo que haber sido 14, 15, 16 o 17. Acá me quiero detener: ¿puede ser que Cheryl le hubiera dicho el número 14?

Si le hubiera dicho el número 14, entonces Bernardo no podría haber dicho: "Al principio no sabía, pero *ahora* ya sé". Si Cheryl le hubiera dicho 14, entonces Bernardo *no podría saber*. ¿Por qué? Porque podría haber sido el 14 de julio o el 14 de agosto. Por lo tanto, el número que Cheryl le dijo a Bernardo *no pudo ser 14*. Esto sirve para eliminar *otras dos* de las cinco posibles fechas, justamente el 14 de julio y el 14 de agosto.

Las únicas tres que quedan son: julio 16, agosto 15 y agosto 17.

Y desde acá falta un solo paso. Fíjese que el número que le tiene que haber dicho Cheryl a Bernardo pudo haber sido *solamente* alguno de estos tres: 15, 16 o 17. Cualquiera de estos tres números que Cheryl hubiera elegido, habría sido suficiente para que Bernardo pudiera deducir la fecha del cumpleaños.

Pero acá no termina todo. Bernardo la sabría, pero ¿y Alberto? ¿Por qué habría de decir él como tercera frase: "Ah, entonces yo también la sé"?

Lo que sucede es que el mes que le dijo Cheryl a Alberto *no pudo haber sido agosto*, porque si no, él no podría saber cuál de los dos días de agosto es el cumpleaños. En cambio, si Cheryl le dijo julio, entonces *sí*, él *también* puede saber. Y eso es exactamente lo que tuvo que haber pasado: Cheryl le dijo julio a Alberto y 16 a Bernardo. Ésa es la única combinación de mes y día que permite que todo el análisis sea consistente.

En principio, deducir la fecha del cumpleaños aparecía como algo imposible. De hecho, sin que se hubiera producido el diálogo que reproduje anteriormente, si uno de los dos (Alberto) conoce el mes y el otro (Bernardo) conoce el día, eso no sería suficiente. Pero cuando ambos mantienen esa conversación, inadvertidamente (o no) ¡se están pasando información!

En algún lugar, mucho más allá del problema en sí mismo, me gustaría invitarla/invitarlo a que relea la última frase que escribí: en la vida cotidiana, el intercambio de información se produce de muchas maneras. En principio, los datos parecían reducidos al mes y al día, pero el diálogo entre ambos *aportó mucho más*.

Aunque parezca raro, hay personas que están más atentas a *todas* las fuentes de información que las rodean, lo que les permite percibir datos que parecen ocultos para otros. Dicho de otra manera, están mejor preparadas para 'leer entre líneas' o 'escuchar entre silencios'.

De una u otra forma, entrenar nuestra capacidad para pensar, es siempre estimulante… y divertido… y el problema de Kenneth Kong sirvió para ponerlo en evidencia una vez más.

Apéndice

Quiero hacerle una propuesta. Con el análisis previo, queda demostrado que *la única posible fecha de cumpleaños para Cheryl fue el 16 de julio.*

Ahora, quiero mostrar que si el cumpleaños hubiera sido *cualquier otro de los nueve días que escribió Cheryl en el papel*, entonces el diálogo que mantuvieron Alberto y Bernardo no hubiera sido 'lógicamente consistente', o sea, o bien no hubieran podido decir lo que dijeron, o no se sostendría en términos lógicos. Me explico.

Reproduzco acá las fechas y el diálogo. Numero las diez posibilidades.

1. Mayo 15
2. Mayo 16
3. Mayo 19
4. Junio 17
5. Junio 18
6. Julio 14
7. Julio 16
8. Agosto 14
9. Agosto 15
10. Agosto 17

Y éste es el diálogo que mantuvieron Alberto y Bernardo:

> *Alberto*: Yo no sé cuándo nació Cheryl pero estoy seguro de que Bernardo tampoco lo sabe.
>
> *Bernardo*: Al principio, yo no sabía cuándo había nacido Cheryl, pero ahora sí lo sé.
>
> *Alberto*: Ah, entonces *ahora* yo *también* lo sé.

Ahora, analicemos fecha por fecha (posible) excluyendo la del 16 de julio, porque ya sabemos que *ése* es —efectivamente— el día que Cheryl nació.

Empecemos con las fechas de mayo, que son tres. Cuando

Alberto escucha *mayo*, está claro que él no puede decidir cuándo fue el cumpleaños, pero lo que *no debió decir* es que él está seguro de que Bernardo tampoco lo sabe, porque Cheryl le podría haber dicho 19 a Bernardo y, en ese caso, Bernardo *sabría perfectamente la fecha*.

Luego, como este análisis es válido para cualquiera de las tres posibilidades de mayo, estamos en condiciones de descartar las tres posibles: mayo 15, mayo 16 y mayo 19.

De la misma forma, si Cheryl le hubiera dicho 'junio' a Alberto, entonces, por idénticas razones, Alberto no debería haber dicho que él estaba seguro de que Bernardo no sabría tampoco, porque Cheryl pudo haberle dicho 18 a Bernardo y en ese caso él ***sí*** sabría cuándo nació Cheryl. Esto descarta dos fechas más: junio 17 y junio 18.

Antes de seguir, fíjese que para descartar las primeras cinco alternativas, no fue necesario analizar lo que dijo Bernardo. Bastó con la primera intervención de Alberto para saber que ninguna de esas fechas pudo haber sido el día de nacimiento de Cheryl. En el análisis de las fechas que faltan, ya sabemos entonces que lo que dijo Alberto lo ayuda a Bernardo a saber que el cumpleaños no fue ni en mayo ni en junio.

Ahora supongamos que Cheryl hubiera nacido el 14 de julio. En ese caso, Cheryl le dijo 'julio' a Alberto y '14' a Bernardo.

Alberto hace muy bien en decir que él no sabe la fecha porque en julio hay dos fechas escritas en el papel. Más aún: Alberto está en condiciones de decir también: "Estoy seguro de que Bernardo tampoco la sabe". ¿Por qué? Porque Alberto sabe que Bernardo pudo haber escuchado o bien 14 o bien 16, y *con ese dato solamente, sin escuchar más nada aún, ¡no va a poder decidir la fecha del cumpleaños!* Por eso Alberto dice que él está seguro de que Bernardo no puede saber.

Ahora pasemos a analizar lo que dijo Bernardo. Habiendo escuchado el número 14, Bernardo no está en condiciones de decir que él sabe qué día nació Cheryl, sencillamente porque pudo haber sido —efectivamente— el 14 de julio, pero también pudo haber sido el 14 de agosto, y tanto en un caso como en otro, Alberto no hubiera podido saber. Luego, como con ese dato solamente no le alcanza, Bernardo no pudo haber dicho que sabía y, por lo tanto, el 14 de julio también queda descartado.

Hasta acá entonces hemos desechado las primeras seis fechas propuestas. Me salteo la del 16 de julio como expliqué antes.

Supongamos ahora que el cumpleaños fue el 14 de agosto. Una vez más, cuando Alberto escucha 'agosto', no puede decidir (ya que en agosto hay tres días posibles). Pero también sabe que Bernardo no podrá decidir, porque los tres números posibles de agosto *no son únicos* (como el caso del 18 y el 19).

Ahora pasemos a Bernardo. Por lo que dijo Alberto, *sabe* que el cumpleaños no fue ni en mayo ni en junio, pero cuando escuchó que Cheryl le decía '14', Bernardo no tiene forma de saber si es el 14 de julio o el 14 de agosto. En consecuencia, no puede decir que él sabe la fecha del cumpleaños.

Moraleja: no pudo haber sido el 14 de agosto tampoco, si es que uno quiere que la conversación que mantuvieron Alberto y Bernardo haya sido 'lógicamente consistente'.

Nos quedan por analizar dos fechas posibles: el 15 y el 17 de agosto. Veamos que ninguna de las dos puede ser la correcta.

a) Supongamos que el cumpleaños fue el 15 de agosto. Alberto escucha 'agosto' y, por lo tanto, como todas las veces anteriores, *no puede decidir* porque en agosto hay tres fechas posibles. Alberto dice que él sabe que Bernardo *tampoco* puede decidir porque los tres números de agosto *no son únicos*.

Ahora analicemos lo que dice Bernardo. El escuchó decir el número 15, y a ese dato se agregó lo que dijo Alberto por lo que Bernardo sabe ahora que el *mes* del cumpleaños no fue ni mayo ni junio. Por lo tanto, fíjese que Bernardo —con esos datos— podría deducir que el cumpleaños fue el 15 de agosto, ya que si bien hay dos posibles fechas que involucran al número 15, además de la de agosto, la otra fue en mayo, y Bernardo ya sabe que en mayo no fue. Moraleja: Bernardo *sí* podría deducir que el cumpleaños fue el 15 de agosto.

Sigamos. Cuando Bernardo afirma que al principio no sabía, pero que ahora *sí sabe*, Alberto agrega: "Ah, entonces ahora yo también lo sé". Pero Alberto no tiene forma de saber si fue el 15 o el 17 de agosto. Sabe que fue en agosto, pero no sabe cuál de los dos días. Bernardo —que sí posee el dato del número (en este caso el 15)— *sabe* que tuvo que haber sido el 15 de agosto porque el otro día que involucraba al número 15 fue en mayo, que quedó excluido. Luego, Bernardo *sí* sabe pero Alberto no puede saber. Entonces, no pudo haber dicho su segunda frase. Esto descarta el día 15 de agosto como potencial fecha.

b) Y para terminar, el último análisis sirve también para convencerse de que el cumpleaños *tampoco* pudo haber sido el 17 de agosto. De haber sido el 17 de agosto, las dos primeras frases (la primera de Alberto y la de Bernardo) son lógicamente consistentes. Pero cuando Alberto habla por segunda vez y dice que 'él también sabe ahora', eso *no puede ser cierto con la información que tiene* porque —como en el caso anterior— él no puede saber si fue el 15 o el 17 de agosto. Luego, no debió decir lo que dijo.

Esto elimina la última posibilidad que quedaba. Por lo tanto, de las diez alternativas, la única viable es la del 16 de julio. En este caso *sí*, las frases y las deducciones de cada uno fueron y son correctas.

Pregunta: ¿hacía falta que yo analizara *las otras nueve posibilidades* además de la del 16 de julio?

Respuesta: No, no hacía falta, porque había quedado claro que ese día era el único posible.

Sin embargo, lo que pretendí hacer, es mostrar que si el cumpleaños hubiera sido en cualquiera de los otros nueves días, el diálogo que mantuvieron Alberto y Bernardo no hubiera podido existir… al menos, en esos términos.

¿Cuántas galletitas hay en la lata?

El siguiente problema invita a elaborar una respuesta cuando los datos no son *directos*. ¿Qué quiero decir? Fíjese en este ejemplo. Suponga que uno tiene una lata con galletitas. No sabe *exactamente* cuántas hay, pero le alcanza con hacer una buena estimación. En la cocina, junto con usted hay otras cuatro personas. Las voy a llamar A, B, C y D. La letra U me la voy a guardar para 'usted'.

Les pide a cada uno que hagan una estimación y en función de las respuestas que le den (y usted también va a participar) elegirán una persona como 'el mejor estimador' del grupo.

Supongamos entonces que cada uno miró la lata y escribió la cantidad de galletitas que estimaba que había adentro. Éstos fueron los resultados propuestos:

A dijo que había 28.
B escribió 29.
C anotó 31.
D propuso 32.
U (usted) pensó que había 35.

Una vez que todos hubieran escrito sus estimaciones, se hizo el recuento de las galletitas y dio el siguiente resultado:

1. Uno de ustedes acertó exactamente con el número.
2. Uno le erró en una galletita.
3. Uno le erró en dos galletitas.
4. Uno le erró en tres galletitas.
5. Uno le erró en cuatro galletitas.

Cuando escribo que le *erró* en dos galletitas (por ejemplo), significa que en la lata había o bien dos más o dos menos de lo que esa persona dijo. Lo mismo para las otras estimaciones.

Ahora bien, con estos datos, ¿es posible determinar cuántas galletitas había en la lata y cuál de los cinco integrantes del grupo acertó?

Respuesta

Analicemos juntos las posibilidades. Hay razones inmediatas para descartar que 28, 29 y 35 sean los resultados correctos. ¿Por qué? (¿quiere pensar usted en soledad?)

Es que, supongamos que el resultado correcto fuera 28, el que dijo 35 le erró en siete, y esa posibilidad no está contemplada. Luego, 28 no va a poder ser.

Por la misma razón, ni 29 ni 35 pueden ser las respuestas. Quedan entonces dos posibilidades: 31 o 32.

Si 32 fuera el resultado correcto, entonces los que dijeron 29 y 35 le habrían errado en tres cada uno y eso no es posible porque, de acuerdo con lo que escribí antes, solamente *uno* le erró en tres.

La única posibilidad entonces es 31. Veamos que cumple con todo lo pedido.

C dio la respuesta correcta: 31.

D fue el único que le erró en uno, ya que dijo 32.

B fue quien le erró en dos, ya que dijo 29.

A fue el que le erró por tres porque dijo 28 y el último, el que le erró en cuatro fue U (usted) que dijo 35.

Y eso responde la pregunta: el mejor estimador terminó siendo C y los datos que uno consiguió fueron suficientes para determinar al ganador. Simple. Sencillo… y breve.

Este problema sirve como un desafío a desentrañar. Suponga que usted elige 10 números cualesquiera (enteros, positivos[71]). Los anota en un papel y los exhibe para que todos los veamos. Yo le confirmo que entre esos diez números tiene que haber algunos (quizá todos) que cuando yo los sume *seguro* que obtengo un número múltiplo de diez. Es decir, no importa cómo usted elija esos diez números, yo voy a poder descubrir un subconjunto de ellos, de manera tal que cuando los sume resulte un múltiplo de diez. ¿Quiere pensar por qué esto es cierto?

Solución

Hagamos así. Usted eligió diez números cualesquiera. Los anotó en un papel. Yo les voy a poner un *nombre*, para identificarlos. Los voy a llamar así:

$$A_0, A_1, A_2, A_3, \ldots , A_9$$

71. En realidad, si bien agrego que son *positivos* es una condición *innecesaria*. Alcanza con que sean números enteros.

(Nota: Fíjese que en total son diez números, como llamo A_0 al primero, el último *tiene* que ser A_9.)

Ahora, voy a agrupar esos diez números de diferentes maneras. Los voy a ubicar en distintas 'cajas'. La distribución la voy a hacer así:

La caja *cero* va a consistir de un solo número: el $\{A_0\}$.
La caja *uno* va a consistir de dos números: $\{A_0$ y $A_1\}$.
La caja *dos* contiene tres números: $\{A_0, A_1$ y $A_2\}$.
La caja *tres* contiene cuatro números: $\{A_0, A_1, A_2$ y $A_3\}$.
Caja *cuatro*: $\{A_0, A_1, A_2, A_3$ y $A_4\}$.
Caja *cinco*: $\{A_0, A_1, A_2, A_3, A_4$ y $A_5\}$.
Caja *seis*: $\{A_0, A_1, A_2, A_3, A_4, A_5$ y $A_6\}$.
Caja *siete*: $\{A_0, A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6$ y $A_7\}$.
Caja *ocho*: $\{A_0, A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6, A_7$ y $A_8\}$.
Caja *nueve*: $\{A_0, A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6, A_7, A_8$ y $A_9\}$.

Por favor, no se pierda, que todo lo que estoy haciendo es ponerle *nombres* a los números que usted eligió. Una vez que llegué hasta acá, calculo la ***suma*** de los números que figuran en cada caja.

Vamos a tener entonces *diez* nuevos números, que voy a llamar

$$S_0, S_1, S_2, S_3, S_4, S_5, S_6, S_7, S_8 \text{ y } S_9$$

La primera suma, S_0, es directamente A_0.
La segunda suma, $\boxed{S_1 = A_0 + A_1}$
La tercera suma, $\boxed{S_2 = A_0 + A_1 + A_2}$
Y así sigo sumando los números que están en cada caja.

Al final, el último número, el

$$\boxed{S_9 = (A_0 + A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + \ldots + A_8 + A_9)}$$

Al llegar acá, voy a *dividir por diez* cada uno de estos diez números, desde el S_0 hasta el S_9, y ***me voy a quedar con el resto de cada división***.

Fíjese que como desde S_0 hasta S_9 son diez números, al dividirlos por diez y quedarme con los restos, voy a tener ahora *otros* diez números. Los voy a llamar:

$$R_0, R_1, R_2, R_3, R_4, R_5, R_6, R_7, R_8 \text{ y } R_9$$

La particularidad que tienen estos diez *numeritos* es que deben ser *todos mayores o iguales que cero y menores* ***estrictos*** *que diez.* Es decir, al dividir cualquier número entero por diez, hay diez restos posibles y nada más:

0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 y 9.

¿Y ahora? Bueno, ahora viene la parte más interesante.

Por un lado, tenemos diez números (los restos de las sumas de los que figuran en las cajas):

$$R_0, R_1, R_2, R_3, R_4, R_5, R_6, R_7, R_8 \text{ y } R_9 \quad (*)$$

Por otro lado, tenemos otros diez números que son los posibles restos que se obtienen al dividir un número por diez:

0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 y 9.

¿Qué se deduce de esto? Dos posibilidades:

1. Los números que figuran en (*) son todos distintos.
2. Hay al menos un par de esos números que son iguales.

Analicemos cada caso.

Si los números que aparecen en (*) son todos distintos, entonces *alguno de ellos tiene que ser* **cero**. Es que como hay nada más que diez posibilidades, si son todos diferentes, alguno de ellos tiene que ser nulo. Para fijar las ideas, supongamos que R_4 es el que es igual a cero.

Pero si $R_4 = 0$, esto quiere decir que al *dividir por diez al número* S_4, se obtiene *resto cero*. Y justamente, el número S_4 resulta ser la *suma* de los números que figuran en la caja número cuatro, o sea,

$$\boxed{S_4 = A_0 + A_1 + A_2 + A_3 + A_4}$$

Si esto sucede, significa que *ya encontré lo que buscaba. Un subconjunto de los números que usted escribió, tal que la* ***suma*** *de ellos es un número múltiplo de diez.*

Es decir, en el caso (1), ya hemos encontrado la solución.

Falta analizar el caso (2). Este caso corresponde a que no todos los números que aparecen en (*) son distintos: ¡tiene que haber —al menos— dos que son iguales!

Antes de avanzar. Si alguno de ellos ya es *cero*, entonces el problema queda resuelto también como hice en (a). El caso que resta entender es cuando los números que figuran en (*) no son todos iguales y no hay ninguno igual a cero.

Supongamos que el $R_4 = R_7$. Elijo estos dos pero usted advierte que con cualquier par el argumento será el mismo.

¿Qué significa que $R_4 = R_7$? Que si uno suma los números que figuran en la caja 4 y en la caja 7, y al resultado lo divide por diez, se obtiene el mismo resto. Pero algunos números que están en la caja 4 y la caja 7 son iguales. De hecho, cada una de estas dos cajas contiene estos números:

Caja 4: $\{A_0, A_1, A_2, A_3$ y $A_4\}$
Caja 7: $\{A_0, A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6$ y $A_7\}$

Como sabíamos desde antes, hay cinco números que están en ambas cajas: $\{A_0, A_1, A_2, A_3$ y $A_4\}$.

$$S_4 = A_0 + A_1 + A_2 + A_3 + A_4$$
$$S_7 = A_0 + A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + A_5 + A_6 + A_7$$

Luego, como el resto de S_4 y S_7 al dividir por diez es el mismo, *la resta* de estos dos números ¡tiene que tener resto cero!

Es decir, el resto de dividir por diez al número $(S_7 - S_4)$ ¡es cero!

Pero justamente, si hago esa resta:

$$S_7 - S_4 = A_5 + A_6 + A_7$$

encontré lo que quería. ¿Por qué?

Porque justamente encontré tres números (A_5, A_6 y A_7) entre los diez que usted me había dado, de manera tal que cuando los sumo obtengo un número que es múltiplo de diez, que es equivalente a tener resto cero cuando uno lo divide por diez.

Antes de avanzar con otra idea que se deduce de todo esto que hicimos hasta acá, me interesa invitarla/lo a que usted se genere su o sus propios ejemplos. Yo voy a poner uno, pero como se me ocurre a mí, no tiene mayor gracia. Lo interesante es que pudiera inventar uno usted. Si no, fíjese a continuación. Supongamos que los números que usted eligió son:

{2, 13, 6, 5, 16, 19, 118, 23, 32 y 73}

Probando *a mano*, uno advierte que —por ejemplo— si elijo {6, 16, 13, 5} y los sumo, se obtiene 40 que es múltiplo de diez.

Pero más allá de esta situación que uno puede resolver simplemente *mirando*, ¿cómo reproducir lo que hice anteriormente para resolver el caso sin tener que *adivinar o conjeturar*?

En cada caja irán los números:

Caja 0: {2}
Caja 1: {2,13}
Caja 2: {2, 13, 6}
Caja 3: {2, 13, 6, 5}
Caja 4: {2, 13, 6, 5, 16}
Caja 5: {2, 13, 6, 5, 16, 19}
Caja 6: {2, 13, 6, 5, 16, 19, 118}
Caja 7: {2, 13, 6, 5, 16, 19, 118, 23}
Caja 8: {2, 13, 6, 5, 16, 19, 118, 23, 32}
Caja 9: {2, 13, 6, 5, 16, 19, 118, 23, 32, 73}

Hagamos las sumas de cada caja.

Se obtienen estos diez números: 2, 15, 21, 26, 42, 61, 179, 202, 234, 307.

Fíjese que está claro que no hay ninguno de estos diez números que sea múltiplo de diez (tendría que 'terminar' en cero). Luego, tiene que haber al menos *dos* de ellos que tengan el mismo resto (al dividirlos por diez). Calculemos esos restos. Resultan ser: 2, 5, 1, 6, 2, 1, 9, 2, 4, 7.

Con esta información, ya estamos en condiciones de resolver el problema. Estoy seguro de que usted habrá detectado múltiples maneras de avanzar. Yo voy a elegir solamente una de ellas. Supongamos que elijo los números que figuran en las cajas dos y cinco, respectivamente.

Caja 2: {2, 13, 6}
Caja 5: {2, 13, 6, 5, 16, 19}

La suma de los números de la caja 2 resulta ser: 2 + 13 + 6 = 21.

La suma de los números de la caja 5 es: 2 + 13 + 6 + 5 + 16 + 19 = 61.

Estos dos números, 21 y 61, tienen el mismo resto al dividirlos por diez: *uno*. Luego, si sumamos los tres números que quedarían en la caja 5 al retirar los que están en la caja 2, quedan estos tres: 5, 16 y 19. Justamente, si uno *suma* estos tres números, obtiene lo que quería: 5 + 16 + 19 = 40.

Hemos encontrado tres números (de los diez que usted me había dado) que al sumarlos dan como resultado un múltiplo de diez. Esos tres números son: 5, 16 y 19.

Pregunta importante: Al principio del problema, le hice un desafío. Le pedí que eligiera diez números cualesquiera y yo habría de encontrar un subgrupo de ellos de manera tal que al sumarlos darían como resultado un múltiplo de diez. La pregunta que quiero hacerle es ésta: si yo le pidiera que en lugar de elegir diez números, seleccionara *siete*, ¿qué resultado se le ocurre que podría deducir? ¿Quiere pensarlo usted?

Antes de contestar, le propongo que se fije en lo que hemos hecho anteriormente. ¿Habrá que cambiar la conclusión? En principio, uno debería decir que sí, porque no hay nada que relacione al número *siete* con el número diez como figuraba antes. ¿Qué ajuste hacer?

La idea es que ahora habrá que adaptar el desafío. Debería proponerle que eligiera *siete* números cualesquiera, y yo debería ser capaz de encontrar un subgrupo de ellos de manera tal que cuando los sume, resulte un múltiplo de *siete* (y no de *diez* como había antes).

Lo notable es que esto es cierto. Si usted se fija en el desarrollo que hicimos, va a descubrir que el número diez en sí mismo no tiene ninguna relevancia. Habríamos podido resolver el caso si en lugar de diez usted hubiera elegido *siete*, o *setenta y uno*, o cualquier cantidad. En todo caso, lo que importa es observar que la adaptación que hay que hacer es que, si usted elige *n* números cualesquiera, yo voy a ser capaz de encontrar un subgrupo entre los números que usted me da, de manera tal que la suma sea ahora *múltiplo de **n***.

¿Y cómo convencerse de que el resultado es cierto? Haciendo exactamente las mismas cuentas y procediendo exactamente de la misma forma que antes. Para replicar lo que hicimos antes, pueden construirse *n* cajas usando los *n* números que usted me dio, calcular las sumas de los números que figuran en cada una de ellas, y fijarse en los restos al dividirlos por *n*. Si son todos distintos entre sí, tiene que haber alguno que tenga resto cero. Si es así, al sumar ese subgrupo de números resultará un múltiplo de *n*. Si no, son todos distintos, o bien hay alguno que tiene resto cero (en cuyo caso sirve para lo que buscamos) o bien tiene que haber (al menos) dos iguales. Uno se fija en las dos cajas como hicimos antes, y 'retira' los números comunes a ambas. Los números que quedan son los que al sumarlos tienen resto cero, o dicho de otra forma, son múltiplos de *n*.

Moraleja

Este ha sido un buen ejemplo de cómo uno puede resolver un caso particular de un problema y terminar luego infiriendo qué debería decir el caso general y cómo demostrarlo también.

El capitán, sus hijos y un crucero en el Danubio

El río Danubio es uno de los más famosos del mundo. Varios cruceros lo recorren y hay muchos que están especialmente dedicados a personas que disfrutan de la música clásica. De hecho, uno de ellos tiene la particularidad que se detiene en *todos* los países por los que pasa el río, y lo hace de tal forma que en cada uno de ellos se ofrece un concierto al que únicamente pueden asistir los pasajeros del barco. Sólo para ser *ilustrativos* me permito escribir la lista de estos países: Alemania, Austria, Eslovaquia, Hungría, Croacia, Serbia, Bulgaria, Rumania y Ucrania. Como se advierte, nueve países. Son muchos. Además, en total el Danubio tiene un recorrido de más de 2.830 kilómetros.

El barco es el mismo desde hace más de una década, al igual que el capitán, quien no ha faltado a ninguno de los viajes. Ahora tengo una pregunta muy particular para hacer. En principio, usted sospechará que *faltan datos* pero créame que no sólo no es así, sino que creo que usted disfrutará de *bucear* hasta encontrar la respuesta. Acá va la pregunta:

¿Qué edad tiene el capitán del barco, cuántos hijos tiene en total y cuán largo es el barco que maneja? Se sabe que el ***producto*** *de esos tres números (que suponemos enteros) es 32.118.*

Como datos adicionales: la longitud del barco está medida en metros, se sabe que el capitán tiene, entre sus hijos, una pareja de mujeres que son mellizas y también una pareja de varones que son mellizos, y, como era esperable que sucediera, todavía no llegó a los 100 años.

Le sugiero que lea de nuevo la pregunta y se detenga un rato para pensar qué datos debería buscar. Verá que si le dedica un cierto tiempo, los obstáculos que ahora parecen insalvables no lo son tanto y, cuando finalmente logre imaginar por dónde encararlo, experimentará una sensación de *conquista* muy particular. Al menos eso fue lo que me pasó a mí.

Respuesta

Como los números involucrados son números *enteros* y el producto resulta ser 32.118, nos va a interesar saber *de qué formas se puede descomponer 32.118 como producto de varios números enteros*. Antes de buscar esta respuesta, le propongo que miremos lo que sucede con un número (cualquiera) más chico. Voy a tomar como ejemplo al número 100. Fíjese.

En principio, al descomponerlo en números *primos* (que son los más pequeños, aquellos que ya no podemos *dividir* más), se tiene:

$$100 = 2 \times 2 \times 5 \times 5$$

Luego, estas cuatro son las únicas posibles descomposiciones como producto de *dos* números:

$$100 = 2 \times 50$$
$$100 = 4 \times 25$$
$$100 = 20 \times 5$$
$$100 = 10 \times 10$$

Ahora busquemos las descomposiciones como producto de *tres* números. Le sugiero que las piense usted también antes de leer la respuesta.

$$100 = 2 \times 2 \times 25$$
$$100 = 2 \times 5 \times 10$$
$$100 = 4 \times 5 \times 5$$

Y, finalmente, hay una única manera de descomponerlo como producto de *cuatro* números:

$$100 = 2 \times 2 \times 5 \times 5$$

Ya habrá advertido que estoy *excluyendo* al número *uno* de todas las factorizaciones, pero no habría ningún inconveniente en incluirlo. De hecho, uno podría agregar *tantos números **uno** como quisiera*, pero eso no parece agregarle mucho valor a lo que buscamos. De todas formas, tómese la libertad de incorporar los números *unos* a cualquiera de las descomposiciones que aparecen anteriormente.

Ahora sí, después de haber analizado lo que sucede con el número 100, exploremos lo que pasa con el número 32.118. Entre usted y yo, busquemos la descomposición en números primos (que por el 'Teorema Fundamental de la Aritmética' se sabe que es única salvo el orden en el que aparecen los factores).

$$32.118 = 2 \times 3 \times 53 \times 101$$

Estos cuatro números primos son los que *caracterizan* al número 32.118. Dicho esto, exploremos de cuántas formas se puede descomponer como producto de números más pequeños. Sígame por acá.

1. $32.118 = 2 \times 101 \times 159$
2. $32.118 = 3 \times 101 \times 106$
3. $32.118 = 2 \times 53 \times 303$
4. $32.118 = 6 \times 53 \times 101$
5. $32.118 = 3 \times 53 \times 202$
6. $32.118 = 2 \times 3 \times 5.353$

Estas seis formas son las únicas posibles. ¿Qué conclusión podríamos sacar? Le recuerdo (y de paso me lo recuerdo a mí también) que la idea es poder deducir *cuántos hijos tiene el capitán, cuántos años tiene y cuántos metros mide el barco*.

Casi de inmediato podemos deducir que ***no puede ser*** la última de las seis descomposiciones (la que lleva el número *seis*): el barco no puede medir 5.353 metros (más de cinco kilómetros) ni el capitán puede tener tres años… ni dos.

Antes de explorar lo que sucede con las otras cinco, me permito recordarle que en el enunciado se dice que el capitán tiene hijas mujeres e hijos varones (¿recuerda? Tiene dos parejas de mellizos, una de mujeres y otra de varones), o sea, tiene *por lo menos* ***dos*** *hijas mujeres y* ***dos*** *hijos varones*. Esto determina que el capitán tiene *por lo menos* cuatro hijos. En consecuencia, si uno sospecha que el número más grande tendrá que medir la longitud (en metros) del barco, alguno de los otros dos números tiene que ser mayor o igual que *cuatro*. Más aún, el restante tiene que ser *la edad* del capitán.

Ahora sí, creo, estamos en condiciones de mirar las cinco descomposiciones restantes, las que van numeradas del *uno* al *cinco*.

¿Podrá ser la número *uno?* (le sugiero que piense por su cuenta. De esa forma, todo este análisis tendrá alguna utilidad para usted también).

Sigo yo. No, la primera no puede ser porque si uno admitiera que el barco mide 159 metros, el capitán debería tener 101 años y el enunciado aclara que eso no es cierto. De la misma forma, eso cancela la opción número *dos*. La que lleva el número *tres* ***tampoco*** puede ser, porque si bien el barco podría medir 303 metros y el capitán tener 53 años, si tuviera nada más que *dos hijos* entonces no podría tener *hijas mujeres* e *hijos varones*.

Ya hemos eliminado entonces, las opciones 1, 2, 3 y 6. Miremos la número *cuatro*. En este caso sí podría ser, porque se deduciría que el barco mide 101 metros, el capitán tiene 53 años y tiene en total *seis* hijos, sin tener la necesidad de aclarar cuántas mujeres y cuántos hombres. No hay ningún inconveniente en *no distinguir cuántos hay de cada sexo*, porque el problema no pregunta eso, sino *cuál es el total de hijos que tiene el capitán*. Esto quiere decir que la opción

$$32.118 = 6 \times 53 \times 101$$

sigue en pie.

Falta ver qué sucede con la opción *cinco*. ¿Quiere quedarse en soledad?

La idea es deducir que *no*, que tampoco la opción número *cinco* es viable. Si bien podría ser que el capitán tuviera 53 años y que el barco midiera 202 metros, lo que no se podría cumplir es que entre las hijas mujeres y los hijos varones *sumen menos de cuatro*, y en la opción número *cinco*, el número de hijos debería ser *tres*, *¡y ya sabemos que eso no puede suceder!*

Moraleja

Una vez que usted pudo avanzar conmigo, en el tipo de análisis que debía hacer (encontrando la descomposición en números primos para después agruparlos convenientemente), el resto del camino —creo— fue sencillo.

Por supuesto, es siempre *muy fácil* hablar sobre la *dificultad* de un problema una vez que uno conoce la solución. En todo caso, como ni usted ni yo vamos a estar ***nunca*** en nuestras vidas en esta situación, lo que me interesaba es mostrar la capacidad de análisis que uno tiene aun en condiciones en las que los datos parecen faltar. Sin embargo, no es ni fue así. *Sí* suele pasar mucho en la vida cotidiana que cuando uno cree que el problema que enfrenta es tan complicado que uno se siente entre superado y avasallado por él, vale la pena reflexionar que *no siempre es así*:

Algunas veces los problemas no ganan.
¡Ganamos nosotros, los que pensamos!

Sombreros en la entrada de un cine

A esta altura de la vida, supongo que usted y yo debemos haber visto y/o leído muchísimos problemas lógicos que involucran sombreros. Yo mismo ya debo haber escrito al menos una docena. Sin embargo, *siempre* aparece alguno distinto, alguno que me llama la atención porque le agrega 'algo' que no se había planteado en los casos anteriores. De hecho, me había comprometido (conmigo mismo) a no agregar ninguno más, salvo que contuviera algo distinto de lo que ya escribí. Así fue como apareció este problema. Le sugiero que, si tiene cinco minutos libres, se dedique a pensarlo. Acá va.

Hay cuatro personas (A, B, C y D) que están haciendo una cola para comprar entradas para el cine. Fíjese cómo es la configuración geográfica mirando la Figura 1.

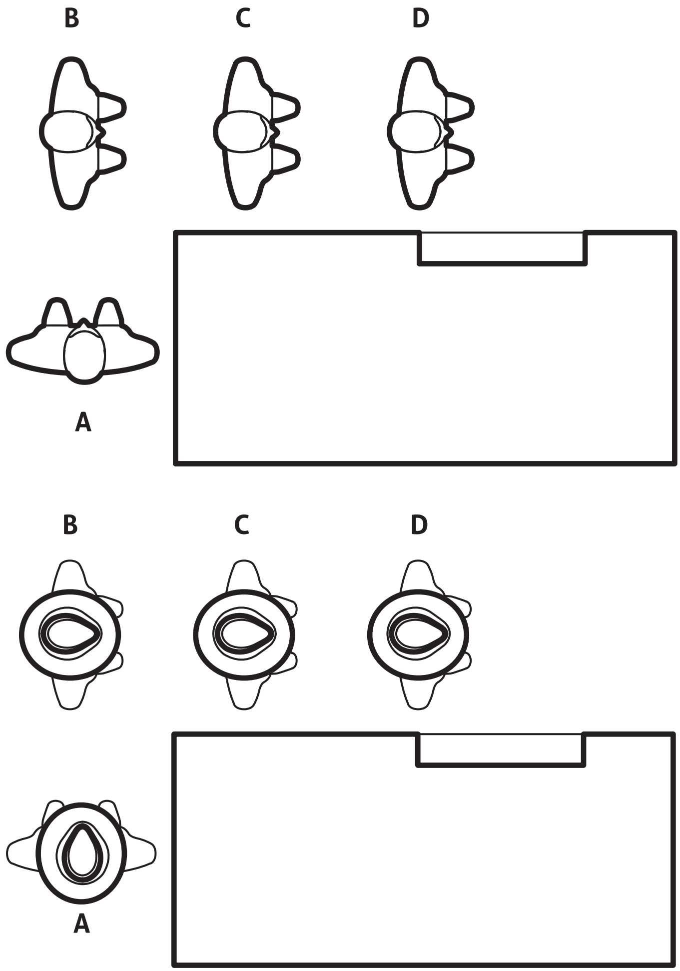


Figura 1

El lugar es muy angosto y, por lo tanto, sólo B, C y D (los tres más cercanos a la boletería) aparecen uno detrás de otro. Como la cola *da vuelta* al llegar a la esquina, la persona que llamé A solamente puede ver al que llamé B, mientras que B puede ver a C y D; C puede ver sólo a D y D no ve a ninguno de los otros tres.

Supongamos ahora que tenemos cuatro sombreros: dos blancos y dos negros.

Tome usted los cuatro sombreros y distribúyalos como quiera, de manera tal que ninguno de los cuatro pueda ver qué color de sombrero les asignó.

Cuando haya terminado, yo preguntaré a cada uno si saben qué color de sombrero tienen. Voy a ir en orden: primero a A, después a B, tercero a C y luego a D. Todos pueden escuchar las respuestas de todos.

Ahora viene lo interesante. Fíjese si usted puede detectar cuál de los cuatro es 'diferente' del resto. ¿En qué sentido? En el siguiente: cuando llegue a esta persona, si él (o ella) puede contestar, entonces los otros tres podrán deducir lógicamente qué color de sombrero tienen.

Pero hay más: si al llegar a esta persona sucede que él (o ella) *no puede contestar*, entonces esto *también* les permitirá deducir a los otros tres qué color tiene cada uno.

Dicho de otra forma, hay una de las cuatro personas que tiene la siguiente facultad: si contesta, los otros tres también podrán. Y si no puede contestar, los otros tres sí podrán.

¿Cuál de los cuatro es y por qué? Ahora le toca a usted. Yo sigo a continuación.

Respuesta

Empecemos analizando lo que le sucede a A. ¿Hay alguna distribución posible de sombreros que le permita a A saber qué color de sombrero tiene cuando yo le pregunte primero?

La respuesta es *no*. ¿Por qué? Es que como A solamente puede ver el color de sombrero de B y todavía ninguno de los otros tres dijo nada que lo pudiera ayudar, entonces no le queda otra alternativa que la de quedarse en silencio (que es como decir 'no sé de qué color es mi sombrero'). Conclusión: A no tiene esa facultad.

¿Qué sucede con B? Dos cosas: o bien C y D tienen sombreros del mismo color (no importa si son blancos o negros) o bien tienen sombreros de colores distintos. Esto, que parece una obviedad, es determinante para la solución. Veamos.

Supongamos entonces que C y D tienen el mismo color de sombrero. Esto le sirve a B para deducir que tiene el *otro* color. Pero a partir de acá, pueden contestar los otros tres. Cuando B dice su color, A sabe que él también tiene el mismo, y tanto C como D tienen el contrario de A y B.

Ya sabemos entonces que si B puede contestar, los otros tres también. ¿Quiere seguir pensando usted sin leer el texto? Igualmente, yo sigo.

La otra alternativa que me queda por analizar surge si B *no pudiera contestar mi pregunta*.

Si pasa eso, es porque C y D tienen colores distintos. Pero *este dato* es determinante —otra vez— para que puedan contestar los otros tres. ¿Por qué? Sucede que A, cuando advierte que B no puede contestar, es porque está viendo que C y D tienen colores diferentes. Pero como A *sí* puede ver el sombrero de B, entonces sabe que o bien C o bien D tienen el mismo color (que B), y luego A tiene el *otro* que queda.

Por ejemplo: supongamos que B observa que C tiene el color blanco y D el color negro. En este caso, B no puede contestar y se queda callado. Esto le indica a A que C y D tienen colores distintos. La diferencia es que A *ve* el color de B (digamos que B tiene color negro). Así, A debe tener sombrero de color blanco.

Lo relevante es que el *silencio* de B le permite a A deducir qué color tiene. Ni bien A dice su color, entonces B sabe que tiene el color diferente del de A. Y a partir de acá todo es sencillo, porque B dice su color, C ya sabe que tiene un color diferente del de D y como lo está viendo lo puede deducir, y D dice el color que resta.

Este análisis permitió deducir que B tiene la facultad de la que hablaba al principio del problema: si B contesta, todos están en condiciones de inferir qué color tienen y lo dicen. Pero, si B *no puede contestar*, entonces A sabe qué color tiene y a partir de allí los otros también.

Así como está planteado el problema, nunca se llegaría a la instancia en la que tengan que ser C o D los primeros en contestar. Cualquiera sea la distribución de sombreros, alguno de los dos primeros (B o A) tuvo que haber hablado antes.

Reflexión final

¿Cuál es el objetivo de plantear un problema de este tipo? No crea que yo supongo que cada uno de nosotros en la vida cotidiana está tratando de deducir el color de su sombrero en función de los colores que tengan otras personas. No, no es así. Si llegara el caso en el que *importara* el color de sombrero que uno lleva puesto, uno ¡se lo saca y mira!

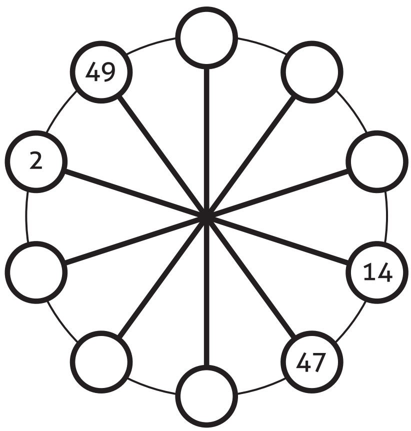
Sin embargo, ser capaz de hacer análisis de este tipo suele cooperar para avanzar en situaciones en donde los datos parecen insuficientes y uno cree que necesita buscar más información. En definitiva, ser capaz de hilvanar ciertos argumentos en forma lógica es lo que nos permite imaginar diferentes escenarios y tener previstos planes A o B o C.

Es que en la vida real, o bien uno no está usando un sombrero o bien el contexto no permite que uno se lo saque y mire de qué color es.

Jugando con la aritmética

Este ejercicio sirve para entretenerse pensando. La idea es encontrar algunos números para ubicarlos en lugares que he dejado vacíos expresamente, pero cumpliendo ciertas condiciones. En lugar de avanzar en forma abstracta, permítame plantear el problema.

Fíjese en esta rueda en donde hay *diez* círculos preparados para recibir ciertos números naturales, es decir, números que empiezan en el 1, 2, 3, 4, 5…



Cada uno de los lugares vacíos (o no), está conectado con su opuesto. En la figura, aparecen unidos por un segmento.

Yo ya ubiqué a estos cuatro: 2, 49, 14 y 47.

Ahora le propongo que calculemos juntos la *suma de los cuadrados* de dos adyacentes, como lo son el 2 y el 49. El resultado es 2.405. Ahora, sume *los cuadrados* de los que están 'del otro lado' (los opuestos): en este caso 14 y 47, *también* se obtiene el número 2.405.

Es decir,

$$2^2 + 49^2 = 2.405$$

De la misma forma

$$14^2 + 47^2 = 2.405$$

Hasta acá, no parece nada extraordinario. En definitiva hay infinitos ejemplos de pares de números que al sumar sus cuadrados dan el mismo resultado.

Pero ahora llega lo interesante. Quiero proponerle que usted *complete* la rueda con los seis números que faltan de manera tal que le propiedad siga siendo válida ahora *para todo par de números adyacentes*.

O sea, el problema reside en encontrar otros seis números de modo que cuando usted elija cualquier par de números adyacentes, los eleve al cuadrado y los sume, el resultado es el mismo que si usted considera los opuestos, calculara los cuadrados y los sumara después.

Planteado el problema, no creo que haya una única forma de resolverlo y estoy casi seguro de que cada persona que invierta una cierta cantidad de tiempo buscará elaborar su propio método. En todo caso, me apresuro a decir que conozco una solución (que voy a escribir en detalle a continuación) en donde ninguno de los seis números que faltan es mayor que 26. ¿Tiene ganas de pensar?

Idea para encontrar una solución

Fíjese que uno sabe que

$$2^2 + 49^2 = 14^2 + 47^2$$

Por lo tanto,

$$49^2 - 47^2 = 14^2 - 2^2 = 192$$

Esto quiere decir que los pares de números opuestos cumplen que la *diferencia* de los *cuadrados* es igual a 192. Por lo tanto, cualesquiera sean los números que encontremos *tendrán* que cumplir esa condición: si uno los eleva al cuadrado y los resta, la diferencia tiene que dar 192. Éste es un paso importante. Sigo.

Le propongo ahora que llamemos *a* y *b* a dos números opuestos cualquiera. Como el patrón que acabamos de descubrir *tiene* que seguir siendo válido

$$a^2 - b^2 = (a - b) \times (a + b) = 192 \qquad (*)$$

Fijémonos ahora en los *factores primos* del 192. Es decir, tratemos de descomponer 192 en los factores más pequeños posibles. Éstos son justamente los números primos que aparecen involucrados en la descomposición de *todo número natural*.

En este caso se obtiene:

$$192 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3 = 2^6 \times 3$$

Ahora queremos ver de cuántas formas podemos combinar estos factores para obtener distintos pares de números cuyo producto sea igual a 192.

Éstos son los resultados y le pido que usted haga las cuentas por su lado para corroborar que lo que yo estoy por escribir coincide con lo que usted está haciendo.

$$192 = 96 \times 2 = 48 \times 4 = 32 \times 6 = 24 \times 8 = 16 \times 12 = 3 \times 64 \quad (**)$$

Vuelvo a la igualdad que aparece en (*). Voy eligiendo las posibles factorizaciones que figuran en (**)

1) Si utilizo la descomposición que involucra a 96 y 2, se tiene:

$$192 = 96 \times 2$$

Si usted se fija en la igualdad (*) se deduce que:

$$a - b = 2$$
$$a + b = 96$$

Es decir

$$a = 49$$
$$b = 47$$

De esta forma, hemos encontrado un *par* de números opuestos, 49 y 47 que ya estaban ubicados en el planteo del problema. Sigamos.

2) Si usamos la descomposición en 48 y 4, se tiene:

$$192 = 48 \times 4$$

Luego,

$$a - b = 4$$
$$a + b = 48$$

y de estas dos igualdades concluimos que

$$a = 26$$
$$b = 22$$

Éste es un par que no estaba antes: (26,22).

3) Ahora usemos la descomposición en 32 y 6. Se tiene:

$$192 = 32 \times 6$$

$$a - b = 6$$
$$a + b = 32$$

Esto provee *otro* par que sirve para ubicar en los círculos opuestos:

$$a = 19$$
$$b = 13$$

4) Ahora usemos $192 = 24 \times 8$:

$$a - b = 8$$
$$a + b = 24$$

Estas dos igualdades permiten obtener un nuevo par:

$$a = 16$$
$$b = 8$$

5) Si ahora usamos $192 = 16 \times 12$, se tiene:

$$a - b = 12$$
$$a + b = 16$$

y de acá reencontramos otro par que teníamos desde el principio:

$$a = 14$$
$$b = 2$$

6) El último producto que queda por considerar ($192 = 64 \times 3$), presenta una dificultad que no tenían los anteriores. Acompáñeme por acá:

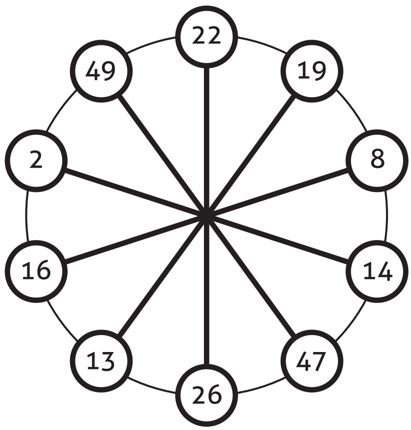
$$a - b = 3$$
$$b + b = 64$$

Trate usted de encontrar los valores de *a* y *b* que hacen ciertas estas dos igualdades, y verá que ***¡ya no son más números naturales!*** Como el objetivo del problema incluye la condición de que todos los números involucrados *sean* naturales, esto significa que al haber aceptado un número impar (en este caso el *tres*), los valores de *a* y *b* no sirven para el propósito que nos ocupa. Luego, hay que descartar esa descomposición. Usted podrá comprobar que la descomposición de $192 = 3 \times 64$ es la única que se puede encontrar con un factor impar, si uno quiere obtener 192 como producto de *solamente dos números enteros positivos*.

En consecuencia, hemos descubierto estos cinco pares para ubicar como *opuestos* en la rueda:

1. (47,49)
2. (2,14)
3. (16,8) (***)
4. (13,19)
5. (26,22)

Ahora, ubiquemos estos pares en la rueda hasta que quede conformada así:



En consecuencia, este método nos permitió encontrar (y ubicar) los seis números que faltaban.

Con todo, tengo todavía una pregunta: ¿por qué esto resuelve el problema?

Es que cuando usted tome dos números consecutivos cualquiera, los eleve al cuadrado y luego haga lo mismo con los opuestos, se encontrará con alguna de las igualdades que figuran antes y que nos permitió encontrar los cinco pares. Más aún: le propondría que usted haga las cuentas hasta convencerse de que lo que acaba de leer es cierto.

Una observación final. ¿Habrá otros números que se puedan ubicar en esos círculos o los que encontramos son los únicos posibles?

Creo que usted está en condiciones de contestar esta pregunta, pero igualmente escribo una idea para responder. El método que seguimos para encontrar los cinco pares es exhaustivo: como dedujimos que la diferencia de los cuadrados de los números que están opuestos tiene que dar 192, esto *fuerza* a que si uno quiere que los adyacentes tengan la propiedad que figura anteriormente, deben provenir de todas las posibles descomposiciones del número 192 como producto de dos números enteros positivos. Las únicas posibles son las que encontramos y, por lo tanto, ¡no hay otras soluciones!

Ahora sí podemos estar tranquilos de que no nos perdimos nada y de que las soluciones que encontramos son las únicas que hay. Bonito, ¿no?

Problema breve y sencillo

Fíjese en el número 5252555. Tiene en total *siete* dígitos. El cinco aparece *cinco* veces. El dos aparece *dos* veces. Es decir, las cifras que aparecen (en este caso 2 y 5) se repiten exactamente esa cantidad de veces en el número global (que tiene siete dígitos).

El número 6661666 también cumple lo mismo ya que hay seis números seis y un número uno.

Ahora, preguntas:

1. ¿Cuál será el número más grande que uno podrá conseguir? (con siete dígitos en total y donde cada uno de los números tendrá que ser la cantidad de veces que aparece repetido).
2. ¿Cuál será el número más chico que cumpla la misma condición?

La/lo dejo a usted en soledad. Yo me retiro y reaparezco a continuación.

Solución

1. ¿Podrá contener algún ocho o algún nueve? La respuesta es no, porque en total el número tiene siete dígitos y si hubiera un ocho o un nueve, tendría que aparecer repetido esa cantidad de veces y eso no es posible. ¿Podrá contener un *siete*? Sí. No sólo puede contenerlo sino que *el número* 777777 (con siete números siete) es el mayor de todos los que uno pueda encontrar con esta propiedad. Esta respuesta fue fácil entonces.
2. ¿Cuál será el menor? Claramente el número no puede contener un *cero*, porque si lo tuviera no se podría contener a sí mismo porque tendría *cero* dígitos. Luego, la conclusión es que no puede haber ningún cero. Puede haber un *uno*. De hecho, si uno quiere buscar el mínimo entonces es conveniente usarlo al principio ya que el uno es el más chico de todos los dígitos que uno puede usar. Sigamos. No puede haber más 'unos'. Con la idea de obtener el más pequeño de todos, tratemos de usar el siguiente dígito, o sea el *dos*. De ellos tiene que haber *exactamente* ***dos***. Luego, el número 'empezará' así: 122. Faltan decidir otros cuatro dígitos. ¿Cuáles pueden ser? Ya no puedo poner más ni unos ni dos, pero si pusiera un *tres*, entonces lo tendría que repetir tres veces. No habría problema, porque lugar tenemos, pero la dificultad se va a plantear con el último dígito para ubicar, ya que como nos queda nada más que un solo lugar, ese dígito tendría que ser un *uno* y ya sabemos que no podemos usar más números 'uno'. Luego, *tampoco podemos usar el número tres*. El siguiente dígito que sí podemos usar es el *cuatro*. Más aún: como estamos buscando el número más chico que cumpla con esa condición, tendremos que usar

> el *cuatro y ubicarlo* ***cuatro*** veces. Moraleja: el número tiene que empezar con 122 y seguir con 4444. En definitiva, el número más chico que uno puede 'fabricarse' con las condiciones que hemos pedido es el 1224444.

Antes de terminar, ¿no tiene ganas de modificar el número de dígitos que se pueden usar y llevarlo de siete a ocho o nueve o los que usted quiera y buscar cuáles son los que cumplen? En definitiva, de eso se trata la matemática también: tener un escenario en donde uno ya conoce las respuestas, y empezar a investigar lo que sucede en los alrededores, tratando de aligerar las hipótesis lo más que uno pueda y ser lo más general posible.

Ahora, puede seguir usted eligiendo la dirección que quiera y buscando sortear los obstáculos que usted mismo se ponga. Lindo desafío, ¿no?

Más *matemagia* (primera parte)

Todo lo que tenga que ver con la 'magia' tiene un costado seductor... *siempre*. ¿Cómo hace? ¿Cómo hizo? La idea es que cada vez que un mago se presenta con un truco cualquiera, la tentación es, por un lado, *dejarse engañar y disfrutar del momento*. Por otro, *sufrir* tratando de *descubrir* qué fue lo que hizo.

En este caso, le voy a proponer lo siguiente. Voy a escribir acá una forma de *descubrir* lo que usted pensó, como si pudiera leerle la mente 'a distancia'. De hecho, la idea es ponerlo en práctica con amigos a quienes tratará de sorprender, de la misma forma en que yo estoy tratando de hacerlo con usted.

Piense un número cualquiera[72]. Obviamente, no lo diga. En fin, en este caso, aunque usted lo dijera yo no estoy allí para escucharla/escucharlo. No importa: servirá para cuando tenga que ponerlo en práctica.

Mientras tanto, voy a poner un ejemplo como para que usted pueda *comparar* con el número que usted eligió. Yo elijo el 14.

Ahora usted tiene que seguir mis instrucciones.

---

72. No lo escribí explícitamente pero la idea es que usted piense un número natural, o sea, un número entero positivo. El truco funciona en otros casos también, pero ¿para qué complicarse?

1. Tome el número que usted eligió y *multiplíquelo por* ***cinco***. En mi caso, yo multiplico (14 × 5) = 70.
2. Al resultado *súmele* ***seis***. En mi caso, (70 + 6) = 76.
3. Al resultado, *multiplíquelo por* ***cuatro***. En mi ejemplo (76 × 4) = 304.
4. Al resultado, *súmele* ***nueve***. En mi caso, (304 + 9) = 313.
5. Al resultado, *multiplíquelo por* ***cinco***. En mi ejemplo, (313 × 5) = 1.565.

Ahora bien: acá usted me tendría que decir *qué número le dio* luego de todas estas cuentas. Una vez más, como yo no estoy allí no puedo escuchar lo que me dice, pero usted sí puede escucharse y escribir el número en un papel. Hágalo. En mi ejemplo, yo tendría que escribir 1.565.

Con el dato que usted me dio, yo haría lo siguiente (y le pido que usted lo ponga en práctica): "Réstele 165 y divida por 100 y obtendrá el número original".

En mi caso, como yo llegué a 1.565, si le resto 165 llego a 1.400. Si lo divido por 100, resulta 14… ¡que era el número original!

Supongo que si usted hizo bien las cuentas, le tiene que haber dado el resultado correcto. La pregunta (y el atractivo) que surge es la siguiente: ¿por qué?

¿Quiere pensar usted la respuesta?

Acá voy. Voy a llamar × al número que usted pensó. Los pasos que yo le pedí que diera fueron, sucesivamente:

1. multiplicarlo por 5
2. sumarle 6
3. multiplicarlo por 4
4. sumarle 9
5. multiplicarlo por 5

Ahora, hagámoslo con el número × que usted eligió. Se tienen entonces los siguientes resultados parciales:

1. 5X (al haberlo multiplicado por 5)
2. (5X + 6) al sumarle 6
3. (5X + 6)4 = 20X + 24 (al multiplicarlo por 4)
4. (20X + 24) + 9 = 20X + 33 (al sumarle 9)
5. (20X + 33)5 = 100X + 165 (al multiplicarlo por 5)

Al llegar acá es donde usted advierte lo que pasó: el número al que llegamos es (100X + 165). Luego, cuando usted me *dice* el número al que llegó, me está diciendo:

$$(100X + 165)$$

Entonces yo, mentalmente, le resto 165 y tengo 100X. Luego, divido por 100 y tengo el número X.

Es decir, si yo juntara *todo* el proceso que hicimos en una sola fórmula, se trata de hacer lo siguiente con el número × original:

$$[(5X + 6)4 + 9]5$$

Cuando uno la *desarrolla,* se llega a (100X + 165) y listo. De allí, yo resto 165 y divido por 100 y tengo el número original que usted pensó.

Más *matemagia* (segunda parte)

Un truco más para quien se quiera preparar para 'ejercer' de mago. No, con esto ciertamente que no le alcanzará, pero para alguna reunión, o para sorprender a amigos y/o familiares, este tipo de problemas son *especiales*.

Como tantas otras veces y con tantos otros ejemplos, se trata de que una persona piense un número (que no le dirá) y usted irá conduciendo con ciertas preguntas para que al final, cuando ella (o él) le den el resultado, usted pueda deducir cuál era el número original.

Por supuesto, sé que hay múltiples variantes pero ésta me parece particularmente atractiva. Acá va.

Al mismo tiempo que yo le proponga lo que hay que hacer con un número cualquiera que llamaré X, lo voy a hacer con dos ejemplos como para que queden las ideas más claras. Es decir, voy a mostrarle qué es lo que hay que hacer y, simultáneamente, voy a hacer de cuenta que usted y yo estamos juntos y elegimos dos números para ver *cómo los descubre el mago*.

Supongamos entonces que el número que *alguien* elige se llama X. Pero, por otro lado, supongamos que usted elige el número *seis* y yo elijo el número *siete*.

Éstas son las instrucciones que hay que seguir:

1. Multiplique el número por *tres*. Llegamos al número 3X. En el caso de los dos ejemplos que estoy haciendo en paralelo, en el caso del *seis*, al multiplicar por *tres*, se obtiene el número 18. Cuando multiplico *siete* por *tres*, resulta el número 21.
2. Si cuando usted multiplicó por *tres* le dio un número par, divídalo por *dos*. Si le dio *impar*, súmele uno y divídalo por dos. En mis dos ejemplos funciona así: en el caso 18 (que es par), lo divido por dos y queda *nueve*. En el caso del 21, como es impar, le sumo *uno* (y queda 22) y lo divido por *dos*: el resultado es 11. O sea, tengo *nueve* en un caso y *once* en el otro. No sé lo que pasó con su número.
3. Ahora multiplique el resultado que obtuvo *otra vez por* ***tres***. En uno de mis ejemplos, en el caso del *nueve*, al multiplicarlo por *tres* queda 27. En el caso del 11, al multiplicarlo por *tres* queda 33.
4. Cuando llegó hasta acá, *divida por* ***nueve*** el número al que llegó usted, y si no le da exacto, no se preocupe: ¡olvídese de los decimales! Solamente dígame qué número le da el cociente. En los dos ejemplos míos, en un caso (al dividir 27 por 9) llego al número *tres*. En el otro, al dividir 33 por *nueve*, **también** llego a tres.
5. Final: si cuando yo le pregunté si había llegado a un número par usted me dijo que sí, entonces el número que usted eligió es el *doble* del que llegó en el paso anterior (compruébelo). Si en cambio me había dicho que era *impar*, entonces su número original es el doble más uno. Fíjese lo que me pasa a mí: cuando yo obtuve 18, dije que el número era par y, por lo tanto, siguiendo esa cuenta llego hasta el *tres*. El número original mío es entonces *el doble de tres*, o sea ¡seis! (que efectivamente fue el número original mío).

> En el caso impar, yo llegué también a *tres*. En este caso, el número original se calcula como *el doble más uno*. Por lo tanto, el doble de tres es seis, y más uno es siete, que efectivamente también era mi número original.

Moraleja: en cualquiera de los dos casos es posible llegar a descubrir cuál es el número. Ahora bien, ¿por qué funciona?

Voy a empezar por el caso en que al multiplicar por *tres* se obtiene un número par. Para que esto haya sucedido, el número original que uno eligió ya era *par* ***antes*** de haberlo multiplicado por tres. Es decir, multiplicarlo o no por tres no altera la paridad. Luego, el número original que uno eligió *tiene* que haber sido de la 'forma' (2k). Recuerde entonces que si bien al número original lo llamamos X, *tiene* que haber sido X = 2k. Avancemos desde acá. Al multiplicarlo por *tres* se obtiene el número 6k. Al dividirlo por *dos* (que es lo primero que me piden que haga), se obtiene el número 3k. Luego hay que multiplicarlo por *tres otra vez*. Se obtiene 9k. Y acá llega el momento de dividirlo por *nueve*. Al hacerlo, al dividir 9k por *nueve*, se ¡obtiene el número *k*! Luego, como indicaba antes, el *número original se obtiene como el* ***doble*** *del número al que se llega, que había sido k*. Y efectivamente el original era (es):

$$X = 2k$$

O sea, ya sabemos por qué sucede que se recupera el número que queremos si al hacer el primer paso (multiplicar por tres) queda un número *par*.

Supongamos que quedó un número impar. Esto quiere decir que el número original *tiene que haber sido impar* ***antes*** *de haber-*

lo multiplicado por tres. Luego, el número original tiene que ser de la forma $(2k + 1)$. Avancemos.

Primero, hay que multiplicarlo por *tres*. Se tiene:

$$(2k + 1)3 = 6k + 3$$

Como resulta impar, pedíamos sumarle *uno* y después dividirlo por dos. O sea, el número ahora es

$$(6k + 3) + 1$$

y luego, hay que dividirlo por *dos*:

$$(6k + 4)/2 = 3k + 2$$

Al multiplicarlo por *tres* otra vez, fíjese que se obtiene:

$$3(3k + 2) = 9k + 6$$

Acá ya *casi* llegamos. Al tener $(9k + 6)$ y dividirlo por *nueve*, el resultado *va a ser k* (si uno ignora el *resto*). Y efectivamente, *eso es exactamente lo que necesitamos*, porque al *encontrar el número k*, uno sabe que el original era *(2k + 1)*.

Es decir, las instrucciones lo *conducen* a uno (que va haciendo cuentas totalmente *desprevenido* de la *trama* que hay atrás) hasta llegar al número original.

Última observación

Anteriormente figuran las cuentas que uno puede hacer para corroborar por qué funciona todo bien. Sin embargo, son cuentas que hice *yo*. No creo que a usted le sirvan. Lo que *sí* estoy seguro que le va a servir es si se sienta usted, con un lápiz y un papel, y se dispone a tratar de pensar en soledad por qué la forma de recuperar el número es la que yo propuse. Pero no me crea a mí: hágalo por las suyas. Verá que es mucho más entretenido y, además, tiene el valor de haberlo hecho *usted*, no pedirlo prestado. En todo caso, ¿para qué le serviría si llegado el momento necesita una herramienta que alguna vez le prestó alguien, pero ahora ese *alguien* no está cerca? ¿No es preferible descubrir uno mismo cómo funciona?

Problemita 'abierto'

Quiero proponerle un cambio. Sí, un cambio. Sígame por acá y le explico.

Cada vez que planteo un problema, mi idea es invitarla/invitarlo a que piense la solución. Me imagino que usted asume, aunque no esté escrito explícitamente, que la solución existe, que yo la sé y que seguramente aparecerá luego en el texto. Podría suceder que yo no pueda escribir todos los detalles de la *tal* solución, pero es como si hubiera una suerte de acuerdo tácito: yo le sugiero que piense algo, usted lo piensa y, le salga o no, usted asume que en alguna parte esa respuesta existe.

Esta vez quiero hacer un cambio. Le voy a proponer pensar algo sobre lo que no tengo una respuesta. Más aún: no es que yo —en particular— no sepa cómo explicar el fenómeno que voy a describir, sino que *creo que nadie lo sabe*.

En algún sentido, la investigación en matemática en su mayor parte sucede de esa forma: no sólo no sabemos cómo se resuelven los problemas sino que algunas veces ni siquiera sabemos cómo hay que formularlos. De allí la fascinación que genera trabajar en esta actividad en forma cotidiana. Aquí no hay lugar para el aburrimiento ni para la rutina. Es un trabajo que requiere de creatividad, consistencia, persistencia, pasión… Además ofrece una recompensa única: el placer de descubrir, de ‘hacer’ caminos donde no había nada. En fin, podría escribir muchas páginas sobre lo que significa ‘hacer matemática’. Pero me desvié. Sigo.

Si bien encontré varias contribuciones en internet sobre el tema, me pareció que lo mejor ha sido escrito por el matemático inglés Ian Stewart, uno de los candidatos a reemplazar a Martin Gardner (como el más importante *difusor* de la matemática recreativa). Sus libros son realmente espectaculares y sus artículos son una verdadera delicia, independientemente del tópico que aborde.

Si me baso en lo que leí de Stewart más lo que yo busqué (y no encontré) en internet, la explicación no se conoce hasta hoy (marzo del año 2015), pero bien podría ser que no haya habido mucha gente interesada en el tema o bien que nadie haya hecho un esfuerzo suficiente para encontrar una solución, porque en definitiva, quizás el problema no valga la pena.

Antes de pasar al problema propiamente dicho, quiero hacer una observación más: como usted verá, el planteo es realmente muy sencillo. Sería bueno que pudiera conseguir una calculadora o tener acceso a una computadora con un programa sencillo para hacer multiplicaciones de números que, si bien no son tan grandes, evitan el tedio de tener que hacer las operaciones *a mano*. Dicho esto, el resto es un camino totalmente abierto para lo que usted tenga ganas de hacer. Acá voy.

Tome el número 123.456.789. Multiplíquelo por 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 y 9 y anote los resultados. Yo la/lo ayudo y anoto…

1	123.456.789
2	246.913.578
3	*370.370.367*

4	493.827.156
5	617.283.945
6	*740.740.734*
7	864.197.523
8	987.654.312
9	*1.111.111.101*

Fíjese en los resultados que se van obteniendo. Si usted revisa la lista, verá que al multiplicarlo por cualquier número *que no sea múltiplo de tres* (como el propio número *tres*, el *seis* o el *nueve*), se obtiene un número que contiene *todos* los dígitos del uno al nueve, en algún orden, ¡pero sin el cero! En los otros tres casos (que destaqué con itálica) el patrón se pierde, ya no están todos los dígitos y, encima, aparece un *cero* que no figura en los otros resultados.

La primera tentación que uno tiene (creo) es decir: ¿por qué voy a parar las multiplicaciones en el número *nueve*? ¿Por qué no seguir? Hagámoslo entonces. Sigamos multiplicando el número original (123.456.789) ahora por 10, 11, 12, 13, 14, etc. ¿Qué sucederá ahora?

Pasa esto:

10	1.234.567.890
11	1.358.024.679
12	*1.481.481.468*
13	1.604.938.257
14	1.728.395.046
15	*1.851.851.835*
16	1.975.308.624

17	2.098.765.413
18	2.222.222.202

Antes de leer lo que sigue, fíjese si encuentra algo que le llame la atención. No me siga a mí porque los caminos por los que yo fui no me condujeron a nada nuevo. Siéntase libre para hacer *sus* propias conjeturas.

Al multiplicar el número original ahora por 10, 11, 12… hasta el 18, y mirar los resultados, puedo proponer algunas observaciones:

1. Al multiplicar por números de *dos dígitos*, como por ejemplo 123.456.789 por *diez*, ahora no sólo aparecen *todos* los dígitos del 1 al 9, sino que se agrega el *cero*. Lo mismo sucede cuando uno lo multiplica por 11. Fíjese (por favor) que en este caso, resulta el número 1.358.024.679. Este número contiene *todos* los dígitos ahora, del 0 al 9… *todos*.
2. Tal como sucedía al multiplicar 123.456.789 por *tres, seis y nueve* (todos múltiplos de tres), la situación se repite ahora al multiplicarlo por 12, 15 y 18: vuelve a desaparecer la *belleza y la armonía* de los otros productos o, si usted prefiere, para no ser *tan poético*, ahora *no aparecen todos los dígitos* como en los otros casos.

Al llegar acá quiero detenerme porque *sucede algo* ***raro***. Cuando uno multiplica 123.456.789 por 19, se obtiene:

19	**2.345.678.991**

¿Por qué escribí *raro*? Porque ahora ya no estoy multiplicando por un múltiplo de *tres* (19 no lo es). Sin embargo, ahora no están *todos los dígitos* del 0 al 9, sino que justamente, *falta el cero* y aparecen dos números *nueve*.

Y mire la siguiente lista:

20	2.469.135.780
21	2.592.592.569
22	2.716.049.358
23	2.839.506.147
24	2.962.962.936
25	3.086.419.725
26	3.209.876.514
27	3.333.333.303

Supongo que uno podría decir que *es esperable* que al multiplicarlo por múltiplos de tres (como 21, 24 y 27) no aparezcan todos los dígitos (como había sucedido antes), pero con los restantes, el 20, 22, 23, 25 y 26, *todo se cumple como al principio*.

Y al llegar acá no tengo más nada que escribir. Siéntase libre para buscar alguna explicación de por qué sucede este fenómeno.

1. ¿Por qué pasa lo que pasa con los múltiplos de *tres*?
2. ¿Por qué *desaparece toda la belleza y armonía que había hasta acá cuando uno multiplica por 19*? ¿Qué tiene el número 19 para que lo distinga de los anteriores?
3. Si usted avanza aún más, verá que el 19 no es el único que produce ese efecto, sino el *primero*: aparecerán muchos más.

Como no se conoce la explicación de por qué sucede todo lo que usted vio hasta acá, la idea es que alguien pueda buscar y encontrar alguna razón que lo justifique.

Por último: ¿será *determinante* descubrir la respuesta? Lo más probable es que ***no***… pero ¿qué importa? Si uno es capaz de encontrar la solución a un problema que hasta ahora nunca nadie pudo, ¿no debería ser suficiente? ¿Y quién dice que encontrar esa explicación no coopere para resolver otros problemas? De eso se trata, ni más ni menos… del placer de encontrar un pequeño tesoro.

Nota

A continuación figuran los resultados que se obtienen al multiplicar 123.456.789 por los primeros 100 números. No espere de mi parte *ninguna pregunta más*. Solamente agrego esta lista para evitar que usted tenga que hacer las cuentas si le interesa seguir pensando. En todo caso, el artículo debería terminar en el párrafo anterior.

1	123.456.789
2	246.913.578
3	*370.370.367*
4	493.827.156
5	617.283.945
6	*740.740.734*
7	864.197.523
8	987.654.312
9	*1.111.111.101*
10	1.234.567.890
11	1.358.024.679
12	*1.481.481.468*

13	1.604.938.257
14	1.728.395.046
15	*1.851.851.835*
16	1.975.308.624
17	2.098.765.413
18	*2.222.222.202*
19	**2.345.678.991**
20	2.469.135.780
21	*2.592.592.569*
22	2.716.049.358
23	2.839.506.147
24	*2.962.962.936*
25	3.086.419.725
26	3.209.876.514
27	*3.333.333.303*
28	**3.456.790.092**
29	**3.580.246.881**
30	*3.703.703.670*
31	3.827.160.459
32	3.950.617.248
33	*4.074.074.037*
34	4.197.530.826
35	4.320.987.615
36	*4.444.444.404*
37	**4.567.901.193**
38	**4.691.357.982**
39	*4.814.814.771*

40	4.938.271.560
41	5.061.728.349
42	*5.185.185.138*
43	5.308.641.927
44	5.432.098.716
45	*5.555.555.505*
46	5.679.012.294
47	5.802.469.083
48	*5.925.925.872*
49	6.049.382.661
50	6.172.839.450
51	*6.296.296.239*
52	6.419.753.028
53	6.543.209.817
54	*6.666.666.606*
55	6.790.123.395
56	6.913.580.184
57	*7.037.036.973*
58	7.160.493.762
59	7.283.950.551
60	*7.407.407.340*
61	7.530.864.129
62	7.654.320.918
63	*7.777.777.707*
64	7.901.234.496
65	8.024.691.285
66	*8.148.148.074*

67	8.271.604.863
68	8.395.061.652
69	*8.518.518.441*
70	8.641.975.230
71	8.765.432.019
72	*8.888.888.808*
73	9.012.345.597
74	9.135.802.386
75	*9.259.259.175*
76	9.382.715.964
77	9.506.172.753
78	*9.629.629.542*
79	9.753.086.331
80	9.876.543.120
81	*9.999.999.909*
82	10.123.456.698
83	10.246.913.487
84	*10.370.370.276*
85	10.493.827.065
86	10.617.283.854
87	*10.740.740.643*
88	10.864.197.432
89	10.987.654.221
90	*11.111.111.010*
91	11.234.567.799
92	11.358.024.588
93	*11.481.481.377*
94	11.604.938.166

95	11.728.394.955
96	$\boxed{\textit{11.851.851.744}}$
97	11.975.308.533
98	12.098.765.322
99	$\boxed{\textit{12.222.222.111}}$
100	12.345.678.900

¿Qué número es el que sigue?[73]

Voy a proponer un problema que 'no me gusta'. Lo hago 'casi' en contra de mi voluntad, porque hay muchísima gente que disfruta en pensarlos.

Primero, voy a escribir el planteo y después, una vez conocida la 'solución', quiero exponer las razones por las que discrepo con esta categoría de problemas.

Por ejemplo, si yo escribiera los siguientes números:

1 2 3 4 5 6 7 8

y le preguntara: si usted tuviera que agregar uno más a esta sucesión, ¿qué número pondría después? O podría presentarlo así: ¿qué número *esperaría* usted que le siga al *ocho*, después de haber leído todos los que lo precedieron?

Por supuesto, la tentación (obvia) es decir: el número que sigue *tiene* que ser el *nueve*.

Otro ejemplo. Si yo propusiera esta sucesión de números:

1 3 5 7 9 11…

73. Este problema apareció en un test de aptitud que tomaron en los laboratorios de Google y fue distribuido entre los estudiantes en el otoño del año 2004.

y preguntara lo mismo que antes (¿qué número sería *esperable* que siga?), la respuesta más frecuente sería: el número *trece*.

Éstos son casos más o menos sencillos, pero como se imagina hay muchísimas variantes y las respuestas *esperables* no son tan *fáciles* de deducir. Por ejemplo, si yo le diera esta sucesión de números:

0 1 3 7 15 31 63… (*)

¿cuál sería el número *esperable* luego del 63? ¿Quiere tomarse un instante para pensar en soledad?

En cualquier caso, voy a escribir acá una '*solución*': decida usted si sigue leyendo o prefiere pensar por su cuenta.

En todo caso, para avanzar, pensemos juntos en la siguiente sucesión:

1 2 4 8 16 32 64…

Estos números, son las *primeras potencias de 2*. Es decir, si uno escribe los distintos valores que aparecen cuando uno calcula:

2^0 2^1 2^2 2^3 2^4 2^5 2^6…

obtiene[74]:

1 2 4 8 16 32 64… (**)

74. El número $2^0 = 1$. En realidad, si uno toma *a*, un número real cualquiera pero DISTINTO DE CERO, y lo eleva a la *cero*, el resultado es *uno*. O sea, $a^0 = 1$, cualquiera sea *a* (no nulo).

Ahora lea los números que aparecen en (*) y trate de descubrir qué conexión tienen con los que aparecen en (**).

Intuyo que usted detecta que los que aparecen en (*) son los mismos que figuran en (**) pero a los que les **he restado 'uno'**.

Es decir, uno construye los números que aparecen en (*) calculando las sucesivas potencias del número 2 y luego les resta un *uno*.

Ahora, llega el momento de plantear el problema del que empecé a hablar antes. Lo que voy a hacer es escribir una sucesión de números y le voy a proponer que trate de *intuir* cuál es el *próximo* (que debería seguir).

Acá van:

1 11 21 1211 111221 312211… (***)

Ahora le toca a usted.

'*Solución*'

A diferencia de lo que me sucede cuando quiero escribir la *solución* a un problema, en este caso me siento vulnerable: si bien voy a contestar la pregunta, le propondré un número que uno podría *esperar* que sea el siguiente, yo creo que se podrían encontrar muchísimas formas más de continuar con la sucesión que figura en (***). Pero de eso me voy a ocupar luego.

Fíjese en los números que aparecen en (***) y léalos en voz alta. Como no estoy con usted, no lo podemos hacer juntos, pero voy a escribir acá lo que usted debería estar leyendo, tomándome la licencia de agregar algunos 'plurales' y poniendo el artículo 'un' en lugar de 'uno'.

1. Uno
2. Un Uno
3. Dos Unos
4. Un Dos… Un Uno
5. Un Uno… Un Dos… Dos Unos
6. Tres Unos… Dos Dos… Un Uno

¿Por qué lo hice? Es que si usted se fija en (***), verá que la sucesión de números está armada 'leyendo' la cantidad de 'unos' o 'dos' o 'tres' que hay.

Empecemos juntos. Primero, hay un 'uno' y por eso, el segundo número de la sucesión es 11 (como si estuviera diciendo 'un uno'). Ahora, para el siguiente número, hay que 'leer' el número 11, pero ***no*** como si fuera un 'once' sino señalando que hay 'dos' números 'uno'. Por eso, el siguiente es '21'. ¿Cómo seguir? Ahora, hay 'un número dos' y 'un número uno'. Por lo tanto, el próximo número será: 1211 (un dos, un uno). ¿Y el próximo? 'Un uno', 'un dos' y 'dos unos'. Por lo tanto, hay que escribir: 111221.

Ahora creo que está claro cómo se va conformando la sucesión. El siguiente será: 'tres unos', 'dos dos' y 'un uno'. O sea: 312211.

Ahora estamos en condiciones de contestar la pregunta original del problema. El número que 'sería esperable' que siguiera es: 13112221.

Es que al 'leer' el número 312211, uno dice: 'un tres', 'un uno', 'dos dos', 'dos unos': 13112221.

Voy a parar acá porque creo que está claro cómo habría que seguir (si es que uno tuviera *muchísimo* tiempo y no supiera muy bien qué hacer con él).

Ahora quiero cumplir con mi promesa y escribir por qué no me gustan estos problemas.

Primero, porque contienen ‘en algún lugar’ una ‘trampa’. Si usted revisa lo que desarrollé antes, verá que en algunos casos escribí el número ‘uno’ y en otros, utilicé el artículo ‘un’. Algunas veces usé los plurales (porque necesitaba escribir ‘dos unos’, por ejemplo) y en otros casos, no. Ya con esto sería más que suficiente para no incluirlo entre los problemas a pensar. Siento que en alguna parte hay una suerte de ‘estafa’ al lector, a *usted*, que con buena fe está buscando cómo construir la sucesión, y descubre que en el camino yo le estoy *poniendo el pie*. No me gusta hacer eso, ni en un problema de matemática ni en la vida en general.

Segundo punto y muy importante. Cada vez que se espera que uno ‘agregue’ un número a una sucesión, y se supone que uno tiene que ‘descubrir’ cuál es, termina siendo *también* una situación ambigua. ¿Por qué?

Fíjese en el primer ejemplo que escribí. Si yo pongo (como hice antes):

1 2 3 4 5 6 7 8…

la tentación es decir (y supongo que en este caso usted estará de acuerdo) que el número que sigue es el *nueve*.

SIN EMBARGO (así, con mayúscula), yo podría decir: “No, no esperaba que usted dijera el *nueve*”. La sucesión, en realidad, es así:

1 2 3 4 5 6 7 8 1 2 3 4 5 6 7 8 1 2 3 4 5 6 7 8 1 2 3 4 5 6 7 8…

O sea, la sucesión empieza con los primeros *ocho* números naturales y después se repite indefinidamente. Es decir, ¡no va el número *nueve*!: va el número 1 otra vez, y después el 2, y después el 3, etc. Escribir *nueve* constituye UNA forma de seguir, pero de ninguna manera *la única*… ¡ni mucho menos!

Fíjese que yo podría seguir de esta otra forma:

1 2 3 4 5 6 7 8 8 7 6 5 4 3 2 1 1 2 3 4 5 6 7 8 8 7 6 5 4 3 2 1…

Es decir, *otra* forma de seguir podría ser llegar hasta el 'ocho' en forma ascendente, y después, repetirlo y empezar 'a bajar' hasta llegar al *uno* otra vez, y después, reproducir nuevamente esos dieciséis números.

Por supuesto, estas dos maneras de continuar son las que se me ocurrieron a mí, pero usted podría *crearse **sus*** propias maneras… ¡y todas estarán bien! Incluso si tiene ganas de continuar escribiendo *¡¡¡cualquier cosa!!!!*

Podría seguir así (voy a poner entre paréntesis los números que agrego):

1 2 3 4 5 6 7 8 (793857283) (93857) (15) (0)
(1425378429385729385)…

Puedo seguir como quiera, y *SIEMPRE* constituirá una sucesión.

Es por eso que creo que la segunda observación es la que merece mayor atención. Cuando a una persona me pide 'a mí' que *diga cómo debería seguir una sucesión como la que escribí originalmente*, mi respuesta, inexorablemente es 'cualquiera', porque en todo caso, lo que me están preguntando es si yo puedo 'adivinar' o 'descubrir' lo que esa persona pensó, pero de ninguna forma hay *una única manera de continuar*.

Para terminar: la pregunta original es *ambigua*, **no tiene solución única**. Por lo tanto, pretender que uno encuentre respuesta es intentar algo imposible.

Ahora sí me siento más tranquilo. Cumplí con aquellos que me pedían que incluyera en alguna oportunidad problemas de este tipo y, al mismo tiempo, logré —espero/creo— expresar mi disgusto y discrepancia.

¿Y usted? ¿Qué posición prefiere tomar?

ABC + ABC + ABC = BBB

El siguiente problema me gusta porque tiene un enunciado breve y todo lo que hace falta es *pensar diferentes escenarios posibles*. Verá que es entretenido en ese sentido.

La pregunta es ésta: ¿se pueden encontrar *tres dígitos* ***distintos*** A, B y C de manera tal que se cumpla esta igualdad?:

$$\begin{array}{rcl} & ABC & \\ + & ABC & (*) \\ & \underline{ABC} & \\ & BBB & \end{array}$$

Todo lo que hay que hacer es reflexionar sobre las distintas posibilidades al ir variando los dígitos. Una observación (importante): los tres dígitos tienen que ser *distintos*. Por ejemplo, si no se pidiera esa condición, entonces podríamos tomar los tres números iguales a *cero*, y listo.

Ahora le toca a usted.

Respuesta

Voy a explorar con usted las posibilidades para C. O sea, le propongo que vayamos recorriendo juntos los posibles valores que podría tomar C y ver si hay alguno que permita conservar la igualdad que figura en (*), teniendo la precaución de que los tres números (A, B y C) sean todos *distintos*.

Supongamos que C fuera igual a cero. ¿Podría suceder esto? Le sugiero que piense usted junto conmigo, de manera tal que en algún momento, pueda independizarse de mí y avanzar en soledad.

a) Sigo. Si C = 0, entonces al mirar la igualdad (*), resultaría que al sumar tres veces *cero*, el número B que figura abajo, como suma, no podría terminar en B: en ese caso, si C = 0, necesitaríamos que B *también* fuera igual a cero, y esto está descartado. Luego, C *no puede ser cero*.

b) Ahora exploremos lo que pasaría si C = 1. En ese caso, al empezar a sumar (como en (*)), resultaría que B tiene que ser igual a *tres* (ya que allí figura que (C + C + C) = 3). Pero si B fuera igual a 3, mirando la segunda columna de (*), resultaría que (3+3+3) = 3 también (porque en este caso, el valor de B sería 3), pero después necesitaríamos que sea *nueve*. Luego, el caso C = 1 hay que descartarlo también.

c) Ahora veamos si C = 2. En ese caso, al sumar tres veces C, obtendríamos que B = 6. Pero después, en la segunda columna de (*), deduciríamos que (B + B + B) = 6 + 6 + 6 = 18, por lo que tendríamos que *dejar* un número ocho. En ese caso, no se cumpliría la igualdad (*), porque B debería ser un ocho por un lado y un seis por otro. Luego, hay que descartar que C = 2 también.

d) Estudiemos ahora C = 3. En ese caso, (3 + 3 + 3) = 9, por lo que deduciríamos que B = 9. Entonces, mirando la segunda columna, tendríamos que (9 + 9 + 9) = 27, por lo que deberíamos *dejar* un número siete, pero B debería ser 9 por un lado y 7 por otro. Luego, también hay que descartar C = 3.

e) ¿Podría ser C = 4? Haciendo el mismo ejercicio que en los casos anteriores, por un lado (4 + 4 + 4) = 12, por lo que uno deduciría que B tiene que ser *dos*, pero deberíamos 'llevar' un uno para la segunda columna. Si B fuera igual a dos, entonces sumándolo tres veces obtendríamos *seis*, y agregando el uno que traíamos de la primera columna, deberíamos obtener *siete*. Y esto no es posible. Luego, hay que descartar C = 4.

f) Veamos si C puede ser igual a 5. En ese caso, al sumar la tercera columna, obtendríamos (5 + 5 + 5) = 15, por lo que B debería ser cinco también, y esto no es posible ya que los tres dígitos tienen que ser distintos.

g) Ahora pasemos a analizar C = 6. Aquí (6 + 6 + 6) = 18, por lo que 'llevaríamos' un uno para la segunda columna, y B debería ser *ocho*. Pero si B fuera igual a 8, entonces al sumar los integrantes de la segunda columna (que son todos iguales a B), tendríamos (8 + 8 + 8) = 24, más uno que traíamos de la primera columna, sería 25. Por esta razón, B debería ser cinco, y esto no es posible. Luego, hay que descartar C = 6.

h) Veamos el caso C = 7. Como antes, (7 + 7 + 7) = 21, por lo que resultaría que B = 1 (y deberíamos 'llevar' un *dos* para la segunda columna). Entonces, si ponemos B = 1 en la segunda columna, sumaríamos (1 + 1 + 1) = 3, más los *dos* que 'traíamos' de la primera columna, tendríamos B = 5, lo que no puede ser.

i) Ahora, caso C = 8. Aquí (8 + 8 + 8) = 24. Se obtendría que B = 4, y 'llevamos' *dos* para la segunda columna. Al sumar los tres miembros de la segunda columna (que son todas letras B), tendríamos (4 + 4 + 4) = 12. Pero como 'traíamos' dos de la primera columna, ¡ahora sí podemos seguir! Es decir, en este caso, hasta acá, no hay contradicción. Sumamos los tres números cuatro en la segunda columna, más los dos que traíamos de la primera, y tenemos 14. Ahora, 'llevamos' uno para la primera columna, y si decidimos que A = 1, entonces ¡todo cierra! Hemos encontrado entonces tres números A = 1, B = 4 y C = 8, de manera tal que si uno suma 148 tres veces, el resultado es 444, que es *tres veces B*.

j) Último caso *posible*. ¿Qué pasaría si C = 9? De la tercera columna, se tendría que (9 + 9 + 9) = 27. Se deduce que B = 7. Pero si pongo B = 7 y sumo tres veces el número siete, tenemos 21. Si sumáramos el *dos* que 'traemos' de la columna anterior, deduciríamos que B tendría que ser igual a *tres*, lo que no es posible.

Moraleja: ¡el único resultado posible es A = 1, B = 4 y C = 8!

Reflexión final

La particularidad que tiene este ejercicio es que el análisis es *directo*. Todo lo que hay que hacer es evaluar las distintas posibilidades (tal como hicimos antes). La deducción dependió de lo *exhaustivo* del análisis. Exploramos *todos* los casos posibles, y descubrimos que había *una sola combinación posible* que validaba el resultado que figura en (*).

En algún sentido, es un ejercicio *diferente* de los que aparecen habitualmente, pero es muy útil cuando uno necesita recorrer un largo espectro de posibilidades. Puede que sea tedioso, pero la garantía está dada: al terminar el recorrido, o bien uno encuentra la solución o bien estamos en condiciones de decir que *no existe*. No es poco[75].

---

75. Luego de leer el problema (y la solución) Carlos D'Andrea me propuso que incluyera una variante. Acá voy: "¿Qué pasaría si uno **permitiera** que los dígitos se repitieran?". Es decir, en el enunciado original yo me ocupé en **enfatizar** que los tres números, A, B y C, son *distintos entre sí*. La nueva pregunta ahora es: ¿Existen A, B y C, tres números enteros, no necesariamente distintos entre sí, de manera tal que (ABC + ABC + ABC) = BBB?

El Mago, Carolina, Martín y las 64 monedas. Un problema dificilísimo

Me encuentro en una situación complicada. El problema del que quiero escribir me gusta muchísimo, lo considero hiperatractivo, pero al mismo tiempo me parece difícil. Más aún: me parece *muy difícil*. ¿Qué hacer? ¿No lo incluyo? ¿No lo comparto? ¿Quién dice que yo tengo razón? ¿Cómo saber que es mejor 'guardármelo' para mí? En definitiva, ¿cómo lo encontré yo?

La historia fue así. Noviembre del año 2014. Mucha gente tiene la generosidad de ofrecerme problemas que han visto en algún lugar y que quieren distribuirlos para que *todos* podamos disfrutarlos. Es una suerte de 'sociedad invisible'. Estamos todos unidos, como 'cruzados' o 'atravesados' por un hilo invisible que nos hace compañeros. Carlos Sarraute es uno de los más activos participantes y a mí me entusiasma verlo tan comprometido con esta 'causa'.

El correo electrónico de Carlos decía que había tenido que hacer un trámite bancario, sabía que no le quedaría más remedio que estar parado en una cola por más de una hora, y que había un problema que había visto que lo tendría 'entretenido'. Y así fue. Me escribió el enunciado y, como corresponde, en dos mensajes separados me contó la solución.

El propio Carlos terminó su último mensaje diciendo: “Sé que es un problema muy difícil, pero cuando uno lo lee piensa que es *imposible* encontrar la solución. De todas formas, pensé que te interesaría conocerlo. Decidí qué es lo que creés que habría que hacer”.

Bien, decidí que lo quiero escribir. Y acá estoy. Después de haber pensado durante mucho tiempo cómo plantearlo, esto es lo que se me ocurrió. Eso sí: una vez que lo lea, piense que si lee la solución, se priva de *pensar algo que es una suerte de desafío*. ¿De qué le serviría leerla si no le dedicó ningún tiempo? Mi idea es tratar de convencerla/convencerlo de que el atractivo de este tipo de problemas es llegar a entender dónde están las dificultades. Y de eso se trata. En fin, suficiente de mi parte. Éste es el enunciado que me envió Carlos. Los nombres elegidos le pertenecen. Esto casi seguro que tienen alguna relación afectiva con él y por eso los respeté.

> Carolina y Martín paseaban por una plaza, cuando ven a una persona mayor haciéndoles señas desde el sector de mesas de ajedrez. Cuando se acercaron a él descubrieron que estaba disfrazado de mago. Los tomó a ambos de un brazo y les dijo que les propondría un desafío.
>
> —Vos —le dijo a Martín—, andá a la otra punta de la plaza. No podés mirar nada de lo que hagamos Carolina y yo.
>
> ”Voy a tomar 64 monedas y las voy a distribuir al azar una encima de cada casilla[76]. Algunas serán ‘caras’ y otras ‘cecas’, sin seguir ningún ‘patrón’ en particular. A vos —le dice a Carolina—, te voy a señalar una moneda entre las 64. Después, te voy a dar una oportunidad para que des vuelta **una sola** de ellas y la transformes de

76. Se sobreentiende (espero) que “encima de cada casilla” significa “de cada casilla de un tablero de ajedrez de 8×8”.

cara a ceca, o viceversa. Cuando hayas terminado, lo llamamos a Martín y sin que vos le hagas ninguna seña ni nada, él tendría que ser capaz (mirando el tablero) de descubrir cuál fue la moneda que yo te señalé. Cualquier acuerdo y/o estrategia que quieran establecer, tendrá que ser **antes** de que Martín se vaya al otro extremo de la plaza. ¿Se animan?

Ambos se quedan conversando un rato y después de deliberar, deciden aceptar la propuesta del Mago. Siguen las instrucciones y, cuando Martín vuelve, señala la moneda correcta. ¿Cómo hicieron?

Ahora, como siempre, le toca a usted. Acépteme que haga otra vez la misma observación de antes: es un problema muy difícil, sí, pero al mismo tiempo, si usted logra *avanzar* en la dirección correcta, créame que se va a sentir muy bien. Planteado así, sin haber pensado *nada*, parece imposible. Sin embargo, hay una forma de resolverlo. O mejor dicho, hay *por lo menos* una forma de poder resolverlo. La puede encontrar a continuación: la decisión es suya.

Si me permite una sugerencia, el número 64 (de casillas que tiene un tablero de ajedrez) tiene una importancia relativa. En todo caso, *lo único esencial al problema* es que 64 es una potencia de *dos*, pero si prefiere, empiece pensando el problema con un tablero con menos casillas, digamos cuatro o 16. Después usted mismo verá que se puede generalizar a un tablero cuadrado cualquiera en donde el número de filas sea una potencia de dos. Ahora sí, yo me retiro…

Solución

Voy a comenzar suponiendo que el problema está planteado para un tablero de 2×2. Como sugerí en la parte final del planteo, el hecho de que el número de filas (y columnas) sea una potencia de dos, sugiere que usemos números binarios.

Pongámosle nombre a cada una de las casillas de este tablero imaginario usando la numeración binaria:

00	01
10	11

A las monedas que voy a colocar allí las voy a llamar entonces: M_{00}, M_{01}, M_{10} y M_{11}.

M_{00}	M_{01}
M_{10}	M_{11}

Por supuesto, cada moneda puede estar en la posición de cara (C) o ceca (X). Para seguir con la misma idea, les voy a poner un número para indicar en qué posición está la moneda que está sobre una casilla. Si la 'cara' está para arriba, voy a poner un *uno*. Si se ve 'ceca', voy a poner un *cero*.

Ahora bien: volvamos al planteo del problema. Carolina está con el Mago. Martín no está: no puede ni ver ni escuchar nada. Las monedas ya están distribuidas sobre el tablero. El Mago le va a señalar a Carolina *una sola de las monedas*. Lo único que puede hacer Carolina, antes de llamarlo a Martín, es *dar vuelta una sola* de las monedas. Lo notable es que con la modificación de esa moneda *necesita contener* ***toda*** *la información* que Carolina le va a pasar a Martín. ¿Cómo hacer?

Supongamos que el Mago le mostró a Carolina la casilla que está arriba a la izquierda en la primera fila. Es la casilla que tiene la moneda M_{00}. ¿Cómo hace Carolina para 'avisarle' a Martín que es la moneda que está ubicada allí? ¿Cómo hacer para comunicarle la *posición* '00' dando vuelta una sola moneda? Peor aún: Martín no pudo ni siquiera ver la posición de las monedas antes de irse por lo que ni siquiera puede detectar *cuál es la moneda que Carolina dio vuelta*.

Es por todo esto que el problema parece *tan difícil*, o mejor dicho, es por todo esto que el problema ES tan difícil.

Voy a poner un ejemplo, y a mostrarle lo que se puede hacer. A partir de allí, entre usted y yo podemos 'construir' la solución para este caso particular y luego ver si logramos generalizarlo a un tablero de 64 casillas. Pero sigo con el caso de un tablero de 2×2.

Supongamos que las monedas dispuestas por el Mago en el tablero tienen estos valores:

Ceca	Cara
Cara	Ceca

De acuerdo con lo que establecimos antes, a las caras les corresponde un número *uno* y a las cecas, un número *cero*. Por lo tanto, es como si estuviéramos frente a un tablero con estos números:

0	1
1	0

Figura 1

Como dije anteriormente, el Mago le señaló a Carolina la posición en donde está la moneda M_{00}, que en este caso está en la posición de ‘ceca’. Pero lo que *importa* a los efectos del ‘truco’ es que Carolina encuentre alguna forma de avisarle a Martín que el Mago eligió ese lugar.

Carolina debe indicarle —de *alguna* forma— que la posición es 00. ¿Cómo hacer? Carolina *no puede* decirle a Martín que *sume* o que *multiplique* los números que aparecen en las filas o en una determinada fila, o en una columna, o lo que sea, ya que la distribución en caras y cecas puede variar. Se necesita encontrar algún método de comunicación entre Carolina y Martín de manera tal que cuando Carolina *de vuelta una sola moneda*, con ese único cambio, Martín *sepa* que la posición que señaló el Mago es la 00.

Por el momento, voy a ‘crear’ un *par de números*, que voy a llamar

$$D_2D_1$$

donde cada uno puede ser, o bien un cero o bien un uno. Es decir, las posibilidades son:

$$00, 01, 10 \text{ o } 11$$

Esto es fácil, pero ¿para qué? ¿De quién o quiénes va a depender?

Hacemos así:

$$D_2 = M_{10} + M_{11}$$
$$D_1 = M_{01} + M_{11} \quad (*)$$

Fíjese que los valores de M_{00}, M_{10}, M_{01} y M_{11} pueden ser o bien ‘ceros’ o bien ‘unos’. Como *no quiero* que ni D_1 ni D_2 sean números diferentes de 0 o de 1, *necesito* pedir algo extra: que si los dos números que intervienen en (*) son los dos ***unos***, entonces, la suma sea CERO. Es decir, si los dígitos que intervienen son dos ceros, o bien un cero y un uno, entonces, la suma da lo que corresponde. Pero si LOS DOS SON 'UNOS', entonces la suma ¡da cero!

En el caso que nos ocupa, tal como aparecen en la Figura 1, los números que se obtienen son los siguientes:

$$D_2 = M_{10} + M_{11} = 1 + 0 = 1$$
$$D_1 = M_{01} + M_{11} = 1 + 0 = 1$$

Es decir, en este caso, el *par* D2D1 resulta ser el *par* 11.

Fíjese que lo que nos gustaría, o mejor dicho, lo que *le gustaría a Carolina* es que ese par fuera el 00, porque *ése* fue el lugar que le señaló el Mago. ¿Cómo hacer ahora para, *dando vuelta una sola moneda del tablero*, modificar este par para que se transforme en 00?

Lo que necesita Carolina es que, al dar vuelta *esa sola moneda*, **cambien los dos dígitos**. Entonces, Carolina ***da vuelta la moneda que figura en la posición 11***. Fíjese lo que sucede:

Ceca	Cara
Cara	Cara

Por lo tanto, ahora el tablero resultaría así:

0	1
1	1

Mire lo que pasa con los números D_2 y D_1. Si uno recurre a (*), obtiene:

$$D_2 = M_{10} + M_{11} = 1 + 1 = 0$$
(recuerde que hemos modificado la forma de 'sumar')

Por su parte,

$$D_1 = M_{01} + M_{11} = 1 + 1 = 0$$

Curiosamente, los dos dígitos D_1 y D_2 ahora pasaron de valer los dos 'unos' a valer ambos 'ceros'. Por lo tanto, cuando Martín vuelva, haga las sumas que corresponden y *calcule* D_1 y D_2, se encontrará con el 00 que es… ¡exactamente la posición que el Mago le indicó a Carolina!

Practiquemos con otro ejemplo. Supongamos que la distribución original de las monedas era *todas caras* y el Mago le señala a Carolina la posición 11.

Como son todas caras, el tablero queda así (en números):

1	1
1	1

Luego, los valores de D_2 y D_1 se calculan así:

$$D_2 = M_{10} + M_{11} = 1 + 1 = 0 \quad (**)$$
$$D_1 = M_{01} + M_{11} = 1 + 1 = 0$$

Si Carolina *no tocara ninguna moneda*, Martín vendría, haría las mismas sumas que figuran en (**), y el par que obtendría es el 00. Y estaría mal, porque el Mago le marcó a Carolina el lugar 11. Pero Carolina tiene una chance más: puede dar vuelta *una moneda*. Ella querrá hacerlo de manera tal que ahora el par

D_2D_1 pase de ser 00 a ser 11. O sea, tiene que modificar *los dos dígitos*. Luego, lo que debe hacer es ¡dar vuelta la moneda que está en el lugar 11! En ese caso, se modificarán tanto D_1 como D_2, y ambos pasarán de ser 'ceros' a 'unos'. ¡Y eso es exactamente lo que quiere Carolina que pase!: cuando da vuelta la moneda que figura en el lugar 11, la hace cambiar de 'cara' a 'ceca'. El tablero tiene ahora un *cero* en la casilla de la segunda fila y segunda columna. Es decir, ahora $M_{11} = 0$. Cuando Martín haga las sumas de (**), se encontrará con

$$D_2 = M_{10} + M_{11} = 1 + 0 = 1$$
$$D_1 = M_{01} + M_{11} = 1 + 0 = 1$$

Luego, el par D_2D_1 es el par 11… ¡que es *exactamente* lo que Carolina quería avisarle a Martín que le indicó el Mago: el lugar 11!

¿Cuál es la *idea* que subyace detrás de todo esto? De entrada, el Mago dispone las monedas de una determinada forma (caras o cecas) estableciendo una distribución de *unos y ceros*. Con esta distribución, tanto Carolina como Martín *saben* cómo calcular 'su' par D_2D_1. Cuando Martín vuelve, él sabe cómo 'fabricarse' el par D_2D_1 y ése le indicará la posición que señaló el Mago. Carolina, a su vez, tiene la posibilidad de *dar vuelta una sola moneda para que cambie el mensaje para Martín.* ¿Cómo hace?

1. Si quiere cambiar D_1 solamente, tiene que dar vuelta M_{01}.
2. Si quiere cambiar D_2 solamente, tiene que dar vuelta M_{10}.
3. Si quiere cambiar ambos, tanto D_1 como D_2, entonces tiene que dar vuelta M_{11}.
4. Por supuesto, si *no quiere cambiar nada*, entonces, ¡no modifica nada y deja todo como está!

Bien, ahora creo que usted tiene una idea no sólo del grado de dificultad que tiene el problema (¡muy difícil!) sino que —creo— está escrito el 'germen' sobre qué hacer cuando uno tiene un tablero de 64 monedas. ¿Qué habrá que modificar para ajustarlo al nuevo tamaño de tablero? ¿Podrá ser ahora nada más que *un par* D_2D_1 el que esté en juego?

Si tiene ganas de pensar usted en soledad, la/lo dejo para que lo haga. Si no, yo sigo a continuación.

Supongamos que ahora uno tiene un tablero de 64 casillas. Hace la distribución de las 64 monedas. Cada una de ellas puede estar en la posición de cara o ceca, lo que establece una distribución de *unos* (para cada 'cara') y *ceros* (para cada 'ceca').

¿Cómo se 'llaman' las diferentes casillas del tablero? Las puedo denominar así. Supongamos que empiezo a numerarlas de arriba abajo y de izquierda a derecha.

Antes, con un tablero de 2 × 2, teníamos esta configuración:

M_{00}	M_{01}
M_{10}	M_{11}

Ahora, con un tablero de 8 × 8, tenemos la siguiente:

$\mathbf{M_{000000}}$	M_{000001}	M_{000010}	M_{000011}	M_{000100}	M_{000101}	M_{000110}	M_{000111}
M_{001000}	M_{001001}	M_{001010}	M_{001011}	M_{001100}	M_{001101}	M_{001110}	M_{001111}
M_{010000}	M_{010001}	M_{010010}	M_{010011}	M_{010100}	M_{010101}	M_{010110}	M_{010111}
M_{011000}	M_{011001}	M_{011010}	M_{011011}	M_{011100}	M_{011101}	M_{011110}	M_{011111}
M_{100000}	M_{100001}	M_{100010}	M_{100011}	M_{100100}	$\mathbf{M_{100101}}$	M_{100110}	M_{100111}
M_{101000}	M_{101001}	M_{101010}	M_{101011}	M_{101100}	M_{101101}	M_{101110}	M_{101111}
M_{010000}	M_{110001}	M_{110010}	M_{110011}	M_{110100}	M_{110101}	M_{110110}	M_{110111}
M_{111000}	M_{111001}	M_{111010}	M_{111011}	M_{111100}	M_{111101}	M_{111110}	M_{111111}

Figura 2

Esta distribución o denominación parece *muy confusa*, pero no lo es: se trata en realidad de escribir en forma binaria los números que van desde el 0 hasta el 63 (que son en total 64 números). Le propongo en todo caso que, en lugar de *emborracharse con esta sopa de letras*, revise cada uno de esos números y verá que el *patrón* es verdaderamente muy sencillo una vez que uno *descubre* de qué se trata.

A partir del momento en el que usted se sienta cómoda/o con esta notación, se trata de hacer lo mismo que hicimos en el caso de un tablero de 2 × 2, ahora con un tablero de 8 × 8. En lugar de tener un *par* que es el que indique la posición que el Mago le señala a Carolina, necesitamos un *sexteto* de números (que deberán ser o bien ceros o bien unos). Por ejemplo, si el sexteto fuera el 000000, se trataría del lugar que figura en la primera fila y la primera columna. Si fuera el número 100101, se trata del que figura en la quinta fila y sexta columna (ambas posiciones están destacadas en la Figura 2).

Ahora hace falta *definir* el sexteto $D_6D_5D_4D_3D_2D_1$.

El dígito D_1 será el que tiene '***prendido***' el primer 'bit', es decir:

$$D_1 = M_{000001} + M_{000011} + M_{000101} + \ldots + M_{111111}$$

Si usted se fija, verá que el número D_1 se obtiene *sumando* los dígitos que figuran columna por medio, empezando por la primera fila hasta llegar a la última. Se suman en total 32 números.

Ahora, miremos lo que sucede con el dígito D_2.

D_2 es la suma de las monedas que tienen 'prendido' el segundo bit, o sea:

$$D_2 = M_{000010} + M_{000011} + M_{000110} + \ldots + M_{111111}$$

Igual que antes, corrobore que D_2 se obtiene salteando, en principio, las dos primeras columnas pero sumando (empezando desde la primera fila y yendo de izquierda a derecha y de arriba abajo) las columnas 3 y 4, salteando las 5 y 6, sumando las 7 y 8. Eso ofrece sumar

$$M_{000010} + M_{000011} + M_{000110} + M_{000111}$$

Después, hay que hacer lo mismo con la segunda fila: saltear las primeras dos columnas, sumar los dígitos que figuran en las columnas 3 y 4, salteando después las 5 y 6, pero sumando las 7 y 8. Esto significa:

$$M_{001010} + M_{001011} + M_{001110} + M_{001111}$$

Y así seguimos hacia abajo, siempre salteando las columnas 1 y 2, y las 5 y 6, pero sumando los que figuran en las columnas 3, 4, 7 y 8.

De otro modo, para obtener D_2, uno podría sumar directamente los dígitos que figuran en las columnas 3, 4, 7 y 8.

Para generar D_3, lo que hay que hacer es sumar todas las posiciones que tienen '***prendido***' el tercer dígito contando desde la derecha. Por lo tanto, uno tiene que sumar *todos los dígitos que figuran en las columnas* 5, 6, 7 *y* 8.

Para obtener D_4, hay que sumar todas las posiciones que tienen '***prendido***' el cuarto dígito contando desde la derecha (hacia la izquierda). Esto correspondería a sumar las filas 2, 4, 6 y 8.

Para generar D_5, hay que sumar las posiciones que tengan '***prendido***' el quinto dígito (contando de derecha a izquierda). En este caso, sería sumar los dígitos que figuran en las filas 3, 4, 7 y 8.

Por último, el dígito D_6 se obtiene sumando todas las posiciones de las filas 5, 6, 7 y 8.

Miremos este ejemplo.

1	1	0	0	1	1	1	1
0	0	0	1	0	0	0	1
1	0	0	1	1	1	1	1
1	1	1	0	0	1	1	1
1	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	0	**0**	0	0	1
1	1	1	1	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	1

Ahora calculemos (en lugar del par D_2D_1) el *sexteto* $D_6D_5D_4D_3D_2D_1$:

D_1 = Suma de todos los números que aparecen en las columnas 2, 4, 6 y 8 = 0 (recuerde que 1 + 1 = 0).
D_2 = Suma de todos los números que aparecen en las columnas 3, 4, 7 y 8 = 1.
D_3 = Suma de todos los números que aparecen en las columnas 5, 6, 7 y 8 = 0.
D_4 = Suma de todos los números que aparecen en las filas 2, 4, 6 y 8 = 1.
D_5 = Suma de todos los números que aparecen en las filas 3, 4, 7 y 8 = 1.
D_6 = Suma de todos los números que aparecen en las filas 5, 6, 7 y 8 = 0.

Luego, la 'tira' de seis dígitos es:

011010

Si el Mago resolviera *indicarle a Carolina* la posición 111010, o sea, donde está la moneda M_{111010}, lo que Carolina necesita hacer es *cambiar* la tira de seis dígitos *solamente* en la primera posición, la que ocupa el D_6. Para eso, tiene que dar vuelta la moneda que figura en M_{100000}. Esa moneda en este momento está en posición de 'cara' (ya que figura un *uno*), es decir que al darla vuelta, Carolina la pondrá en 'ceca' y, por lo tanto, quedará un *cero*.

1	1	0	0	1	1	1	1
0	0	0	1	0	0	0	1
1	0	0	1	1	1	1	1
1	1	1	0	0	1	1	1
0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	0	**0**	0	0	1
1	1	1	1	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	1

Figura 3

Al haber hecho esta modificación (y le pido que usted lo compruebe para su propia tranquilidad), fíjese que ahora la *nueva* tira $D_6D_5D_4D_3D_2D_1$ será:

111010

que es *exactamente* lo que queríamos lograr.

Última comprobación. Suponga que la Figura 3 es la nueva configuración del tablero. O sea, las monedas están dispuestas como aparecen en la Figura 3. Después de los cálculos que hicimos anteriormente (y le pido que usted se siente un ratito y que haga las cuentas para comprobarlo), la *tira*

$$D_6D_5D_4D_3D_2D_1 = 111010$$

Supongamos que el Mago le indica a Carolina la moneda que está en la posición M_{111111}. ¿Qué moneda tendría que dar vuelta ella para que su compañero, cuando retorne, pueda deducir cuál es?

La/lo dejo en soledad un instante para que pueda pensar. La respuesta sigue acá.

Como la tira es 111010, y se quiere llegar a 111111, Carolina ***tiene*** que modificar tanto D_3 (que es cero y ella quiere que sea un uno) y el D_1, que también es *cero* y ella quiere que sea uno. Luego, tiene que 'dar vuelta' la moneda M_{000101}.

Hagámoslo juntos. El tablero queda ahora así (en donde *resalté* la moneda que di vuelta):

1	1	0	0	1	**0**	1	1
0	0	0	1	0	0	0	1
1	0	0	1	1	1	1	1
1	1	1	0	0	1	1	1
0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	0	**0**	0	0	1
1	1	1	1	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	1

La moneda a dar vuelta es M_{000101}. Estaba puesta en *uno* y Carolina la dio vuelta y la puso en *cero*. Calcule ahora los 'nuevos' D_1, D_2, D_3, D_4, D_5 y D_6, y verá que obtiene *todos* los valores iguales a *uno*, que es lo que queríamos.

Moraleja

¿Difícil? Es muy muy difícil, más que nada, porque es muy difícil que a uno se le ocurra esta idea. ¿Imposible? No, no es imposible si uno descubre y se entrena con el ejemplo del tablero de 2×2. ¿Se me ocurrió a mí? No, me contó esta solución Carlos Sarraute.

¿Por qué la escribí? Porque creo que alguna vez, en alguna de estas comunicaciones e historias que escribo y/o relato por televisión, o en el diario o en alguno de los libros, *tiene* que aparecer un grado de dificultad distinto de los habituales.

¿La/lo desanimó? No debería. ¿Por qué? Porque uno, luego de entrenarse durante mucho tiempo y de atravesar dificultades de este tipo utilizando la numeración binaria y la forma de 'descubrir' cómo modificar *un solo dígito* trae aparejadas modificaciones 'en cadena', decía, uno logra 'entender un poco más de qué se trata este tipo de problemas'.

Por todo esto creo que abordar esta clase de dificultades es un modo de entrenarse. Y es por eso que si bien es posible que uno no utilice *nunca* un recurso como este, siempre es muy bueno haberse enfrentado alguna vez, o muchas veces, con problemas que requieran este tipo de estas herramientas. Quizás, aunque ni usted ni yo lo sepamos, algún día le será útil.

Por último, no puedo menos que sugerirle algo: piense cómo generalizar este problema. Es decir, ¿qué pasaría si uno modificara el número de filas y columnas del tablero? Manténgalo siempre como un cuadrado, pero fíjese qué pasaría si en lugar de ser de 8×8, fuera de 16×16 o de 32×32 o, en todo caso, $2^m \times 2^m$. ¿De cuántos dígitos tendrá que ser la 'tira'? ¿Cambia mucho la solución del problema? Ésta debería ser la parte más sencilla. Después de tropezar con la dificultad central (como creo que hemos hecho aquí), el resto debería ser más sencillo. Usted dirá.

Índice