MÉTODOS DE RESOLUCIÓN DE SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

Se distinguen tres métodos **algebraicos** de resolución de sistemas:

- Sustitución
- Igualación
- Reducción

Notas:

1) Es importante insistir en que la solución de un sistema es **una pareja de valores.** Es decir la solución son dos números reales, uno de ellos es el valor de una de las incógnitas (la 'x' en la mayoría de los ejercicios) y el otro el valor de la otra (normalmente la 'y'). Es un error muy frecuente el que alumnos como vosotros den por terminado el ejercicio al encontrar el valor de la primera incógnita.

2) Cada uno de los métodos que vamos a ver a continuación debe dar el mismo resultado aplicado al mismo sistema. Si no es así es que hay algún error.

Casos especiales

También puede ocurrir que el sistema en cuestión no tenga solución o que tenga infinitas. Esto lo debes haber visto al estudiar los sistemas desde un punto de vista geométrico. Desde esta perspectiva tenemos dos rectas del plano y tres posibilidades:

- las rectas *se cortan en un punto* (sistema **compatible determinado**),
- las rectas son *coincidentes* (sistema **compatible indeterminado**)
- las rectas son *paralelas* (sistema **incompatible)**.

El siguiente cuadro nos muestra una clasificación de los sistemas lineales.

SISTEMAS LINEALES

$$\begin{cases} \text{Compatibles} & \begin{cases} - \text{ Determinados} & (\text{solución única}) \\ - \text{ Indeterminados} & (\text{infinitas soluciones}) \end{cases} \\ (\text{tienen solucion}) & \\ \text{Incompatibles} & \\ (\text{no tienen solución}) & \end{cases}$$

Para poder distinguir unos casos de otros, al resolver el sistema de forma algebraica, debemos seguir los pasos indicados según el método. Al llegar al final podemos encontrarnos una de las cuatro situaciones siguientes:

- ***a x = b***, con 'a' y 'b' dos números reales cualesquiera. En este caso no hay problema al despejar x y el sistema tiene una única solución. Es, por tanto, *compatible determinado*.

- ***a x = 0***, con 'a', un número real cualquiera. En este caso al despejar x nos quedaría $x = \frac{0}{a} = 0$. Por tanto el sistema tiene también una única solución.

- ***0 x = b***, (ó 0 = b), con 'b' un número real cualquiera $b \neq 0$. En este caso no es posible despejar 'x' pues la operación de dividir entre cero es imposible (también puede interpretarse que 0 no puede ser igual a no cero). Luego el sistema no tiene solución. Es *incompatible.*

- ***0 x = 0***, (ó 0 = 0). En este caso cualquier valor de x satisface la igualdad y , por tanto, el sistema tiene infinitas soluciones que son los infinitos puntos de las rectas coincidentes. Así el sistema es *compatibe indeterminado*. Este es el caso más complicado de resolver. Se suele resolver haciendo x = t, $t \in \mathbb{R}$ y despejando y en función de 'x'. Veremos algún ejemplo más adelante.

1.Método de Sustitución

Consiste en despejar una incógnita en una de las ecuaciones y sustituir en la otra. A continuación explicamos claramente los pasos:

MÉTODO DE SUSTITUCIÓN

1º) Se despeja **una** de las incógnitas en **una** de las ecuaciones.

2º) Se sustituye la expresión de esta incógnita en la otra ecuación. Obtenemos así una ecuación con una sola incógnita.

3º) Se resuelve esta ecuación.

4º) El valor obtenido se sustituye en la ecuación en la ecuación del paso 1º.

5º) Se comprueba la solución en el sistema inicial para asegurarnos de que el resultado es correcto.

Ejemplos:

1º) Este es un ejemplo muy básico.

$$\begin{cases} x+y=1 \\ x-y=5 \end{cases}$$

$1)\ x=1-y \qquad$ (despejamos x en la primera)

$2)\ (1-y)-y=5 \qquad$ (sustituimos en la segunda)

$3)$ Ahora resolvemos la ecuación en y:

$$1-y-y=5 \ \rightarrow\ 1-2y=5 \ \rightarrow\ 1-5=2y \ \rightarrow$$
$$\rightarrow\ -4=2y \ \rightarrow \frac{-4}{2}=y \ \rightarrow\ -2=y$$

$4)$ Sustituimos en $1)$ para hallar x:
$x=1-(-2)=1+2=3$

$5)$ Ahora comprobamos:
$3+(-2)=3-2=1$ Se cumple la primera.
$3-(-2)=3+2=5.$ Se cumple la segunda.

2º) Aquí puede verse que siempre hay que buscar cuál es la incógnita más fácil de despejar.

$$\begin{cases} 2x+y=-7 \\ 4x-2y=-10 \end{cases}$$

$1)\ y=-7-2x$ (despejamos y en la primera)

$2)\ 4x-2(-7-2x)=-10$ (sustituimos en la segunda)

$3)$ Ahora despejamos x:

$$4x+14+4x=-10 \rightarrow 8x=-10-14 \rightarrow 8x=-24 \rightarrow$$
$$\rightarrow x=\frac{-24}{8} \rightarrow x=-3$$

$4)$ Sustituimos en $1)$ para hallar y
$y=-7-2(-3)=-7+6=-1$

$5)$ Ahora comprobamos:
$2(-3)+(-1)=-6-1=-7.$ Se cumple la primera.

$4(-3)-2(-1)=-12+2=-10.$ Se cumple la segunda.

3º) Si es igual de difícil despejar una incógnita u otra, la elección es vuestra. Además nada impide que las soluciones no sean números enteros.

$$\begin{cases} 4x-3y=3 \\ 2x+6y=-1 \end{cases}$$

$$1)\, x=\frac{-1-6y}{2} \qquad (\text{despejamos x en la primera})$$

$$2)\, 4(\frac{-1-6y}{2})-3y=3 \qquad (\text{sustituimos en la segunda})$$

$3)$ Ahora despejamos y:

$$2(-1-6y)-3y=3 \;\rightarrow\; -2-12y-3y=3 \;\rightarrow\; -2-15y=3 \;\rightarrow$$
$$\rightarrow\; -2-3=15y \;\rightarrow \frac{-5}{15}=y \;\rightarrow\; y=-\frac{1}{3}$$

$4)$ Sustituimos en $1)$ para hallar x:

$$x=\frac{-1-6(\frac{-1}{3})}{2}=\frac{-1+2}{2}=\frac{1}{2}$$

$5)$ Ahora comprobamos:

$$4(\frac{1}{2})-3(-\frac{1}{3})=2+1=3 \qquad \text{Se cumple la primera.}$$

$$2(\frac{1}{2})+6(-\frac{1}{3})=1-2=-1. \qquad \text{Se cumple la segunda.}$$

2.Método de Igualación

En este método se despeja la misma incógnita en ambas ecuaciones y se igualan las expresiones. Estos son los pasos:

MÉTODO DE IGUALACIÓN

1º) Se despeja la misma incógnita en ambas ecuaciones.

2º) Se igualan las expresiones. Resultando así, una ecuación con una sola incógnita.

3º) Se resuelve esta ecuación.

4º) El valor obtenido se sustituye en cualquiera de las dos expresiones del paso 1º.

5º) Se comprueba la solución en el sistema inicial para asegurarnos de que el resultado es correcto.

Ejemplo:

1º) Empecemos con un ejemplo muy sencillo.

$$\begin{cases} x+2y=8 \\ x+\ y=3 \end{cases}$$

$1)\ x=8-2y \qquad (\text{despejamos } x \text{ en la primera})$

$\quad x=3-y \qquad (\text{despejamos } x \text{ en la segunda})$

$2)\ 8-2y=3-y \qquad (\text{igualamos las dos expresiones})$

$3)$ Resolviendo:

$8-3=-y+2y \rightarrow 5=y$

$4)$ Sustituimos para hallar x:

$x=8-2\cdot 5=8-10=-2$

$5)$ Ahora comprobamos:

$-2+2\cdot 5=-2+10=8 \qquad$ Se cumple la primera

$-2+5=3 \qquad$ Se cumple la segunda

2º) En este ejemplo despejar 'x' es un poco más complicado y necesita de fracciones. Las soluciones, sin embargo, son enteras.

$$\begin{cases} 2x+3y=6 \\ -3x-2y=1 \end{cases}$$

$$1)\, 2x=6-3y \ \rightarrow \ x=\frac{6-3y}{2} \qquad \text{(despejamos x en la primera)}$$

$$-2y-1=3x \ \rightarrow \ x=\frac{-2y-1}{3} \qquad \text{(despejamos x en la segunda)}$$

$$2)\, \frac{6-3y}{2}=\frac{-2y-1}{3} \qquad \text{(igualamos las dos expresiones)}$$

3) Resolviendo:

$$6\left[\frac{6-3y}{2}=\frac{-2y-1}{3}\right] \rightarrow 3(6-3y)=2(-2y-1) \rightarrow 18-9y=-4y-2 \rightarrow$$

$$\rightarrow 18+2=-4y+9y \rightarrow 20=5y \rightarrow y=\frac{20}{5} \rightarrow y=4$$

4) Sustituimos para hallar x:

$$x=\frac{6-3\cdot 4}{2}=\frac{6-12}{2}=\frac{-6}{2}=-3$$

5) Ahora comprobamos:

$$2\cdot(-3)+3\cdot 4=-6+12=6 \qquad \text{Se cumple la primera}$$

$$-3(-3)-2\cdot 4=9-8=1 \qquad \text{Se cumple la segunda}$$

3º) En este último ejemplo, las soluciones son fracciones:

$$\begin{cases} 5x+2y=0 \\ 10x-2y=3 \end{cases}$$

$1)\ 2y=-5x \ \rightarrow \ y=\dfrac{-5x}{2}$ (despejamos y en la primera)

$10x-3=2y \ \rightarrow \ y=\dfrac{10x-3}{2}$ (despejamos y en la segunda)

$2)\ \dfrac{-5x}{2}=\dfrac{10x-3}{2}$ (igualamos las dos expresiones)

3) Resolviendo:

$$2\left[\frac{-5x}{2}=\frac{10x-3}{2}\right] \rightarrow 1(-5x)=1(10x-3) \rightarrow -5x=10x-3 \rightarrow$$

$$\rightarrow -5x-10x=-3 \rightarrow -15x=-3 \rightarrow x=\frac{-3}{-15}=\frac{1}{5}$$

4) Sustituimos para hallar y:

$$y=\frac{-5(\frac{1}{5})}{2}=\frac{-1}{2}$$

5) Ahora comprobamos:

$5(\frac{1}{5})+2(\frac{-1}{2})=1-1=0$ Se cumple la primera

$10(\frac{1}{5})-2(\frac{-1}{2})=2+1=3$ Se cumple la segunda

3.Método de Reducción

En este método se preparan las dos ecuaciones para que una de las incógnitas tenga el mismo coeficiente en ambas pero con distinto signo. Al sumar las ecuaciones nos queda una ecuación con una sola incógnita.

MÉTODO DE REDUCCIÓN

1º) Se preparan convenientemente las dos ecuaciones (multiplicándolas por los números que convenga).

2º) Se suman las dos ecuaciones desapareciendo así una incógnita.

3º) Se resuelve la ecuación que resulta.

4º) El valor obtenido se sustituye en una de las ecuaciones iniciales y se resuelve.

5º) Se comprueba la solución en el sistema inicial para asegurarnos de que el resultado es correcto.

Ejemplos:

Veamos varios ejemplos:

1º) Como siempre, el primer ejemplo es muy fácil. En este caso no hay que preparar las ecuaciones.

$$\begin{cases} x+\cancel{2y}=0 \\ x-\cancel{2y}=8 \end{cases} \quad +$$

$$2x+0y=8$$

En este caso las ecuaciones ya están preparadas. Por tanto al sumar directamente desaparece la 'y'. Llegamos así al paso tercero.

$3)\ 2x=8 \ \rightarrow \ x=\dfrac{8}{2}=4$

4) Sustituimos ahora en la primera ecuación:

$$4+2y=0 \ \rightarrow \ 2y=-4 \ \rightarrow \ y=\frac{-4}{2}=-2$$

5) Comprobamos ahora la solución : $\boxed{x=4 \quad ; \quad y=-2}$

$4+2(-2)=4-4=0$ Se cumple la primera ecuación

$4-2(-2)=4+4=8$ Se cumple la segunda ecuación

2º) Aquí, la cosa se complica un poco. Ya es necesario preparar la primera ecuación.

$$\begin{cases} x+3y=-4 \\ 3x-4y=27 \end{cases} \xrightarrow{x(-3)} \begin{cases} -\cancel{3x}-9y=12 \\ \cancel{3x}-4y=27 \end{cases} +$$

$$0x-13y=39$$

Hemos preparado las ecuaciones multiplicando la primera por -3.
Al sumar desaparece la 'x'.
Llegamos así al paso tercero.

$3)\ -13y=39 \ \rightarrow\ y=\dfrac{39}{-13}=-3$

4) Sustituimos ahora en la primera ecuación:

$x+3(-3)=-4 \ \rightarrow\ x-9=-4 \ \rightarrow\ x=-4+9=5$

5) Comprobamos ahora la solución : $\boxed{x=5 \quad ; \quad y=-3}$

$5+3(-3)=5-9=-4$ Se cumple la primera ecuación
$3(5)-4(-3)=15+12=27$ Se cumple la segunda ecuación

3º) En este tercer ejemplo, hay que preparar las dos ecuaciones. Es el caso más complicado.

$$\begin{cases} 3x+4y=5 \xrightarrow{x\,2} \\ -2x-5y=-8 \xrightarrow[x\,3]{} \end{cases} \begin{cases} 6x+8y=10 \\ -6x-15y=-24 \end{cases} +$$

$$0x-7y=-14$$

Hemos preparado las ecuaciones multiplicando la primera por 2, y la segunda por 3.
Al sumar desaparece la 'x'.
Llegamos así al paso tercero.

$3)\ -7y=-14 \ \rightarrow\ y=\dfrac{-14}{-7}=2$

4) Sustituimos ahora en la primera ecuación:

$3x+4y=5 \ \rightarrow\ 3x+4(2)=5 \ \rightarrow\ 3x+8=5 \ \rightarrow\ 3x=5-8 \ \rightarrow\ x=\dfrac{-3}{3}=-1$

5) Comprobamos ahora la solución : $x=-1 \quad ; \quad y=2$

$3(-1)+4(2)=-3+8=5$ Se cumple la primera ecuación
$-2(-1)-5(2)=2-10=-8$ Se cumple la segunda ecuación

4. Ejemplos de casos especiales

1º) En este ejemplo, vemos un caso en el que el sistema es *Incompatible*. El sistema se ha resuelto por Igualación.

$$\begin{cases} 5x+2y=0 \\ 10x+4y=4 \end{cases} \qquad (\text{IGUALACIÓN})$$

$$1)\, 2y=-5x \;\rightarrow\; y=\frac{-5x}{2} \qquad (\text{despejamos } y \text{ en la primera})$$

$$4y=4-10x \;\rightarrow\; y=\frac{4-10x}{4} \qquad (\text{despejamos } y \text{ en la segunda})$$

$$2)\, \frac{-5x}{2}=\frac{4-10x}{4} \qquad (\text{igualamos las dos expresiones})$$

3) Resolviendo:

$$4\left[\frac{-5x}{2}=\frac{4-10x}{4}\right] \rightarrow 2(-5x)=1(4-10x) \rightarrow -10x=4-10x \rightarrow$$

$$\rightarrow -10x+10x=4 \rightarrow 0x=4 \rightarrow x=\text{Imposible}$$

4) Por tanto:

$y=\text{Imposible}$

EL SISTEMA NO TIENE SOLUCIÓN. ES INCOMPATIBLE

Lo importante aquí es que entiendas los que ocurre cuando se llega a una expresión del tipo 0x = b. Da igual el método que se utilice. También es importante analizar el sistema original. Si lo observas detenidamente te darás cuenta de que ya desde el comienzo se plantea una situación imposible pues si 5x + 2y = 0, entonces 10x + 4y = 2 ·(5x + 2y)= 2 · 0 = 0. Es decir no es posible que si 5x + 2y = 0, 10x + 4y = 4.

En líneas generales si una de las ecuaciones resulta de multiplicar los coeficientes de las incógnitas por un número y el término independiente no se multiplica, el sistema resultante será Incompatible.

2º) Este segundo ejemplo es de un sistema *Compatible Indeterminado*. Es el caso que más trabajo os cuesta resolver.

$$\begin{cases} 2x+y=-2 \\ 4x+2y=-4 \end{cases}$$

1) Despejamos y de la primera:
$y=-2-2x$

2) Sustituimos en la segunda:
$4x+2(-2-2x)=-4$

3) Resolvemos:
$4x-4-4x=-4 \rightarrow 4x-4x=-4+4 \rightarrow$
$\rightarrow 0x=0 \rightarrow x=t, \text{ con } t\in\mathbb{R}$

4) Sustituimos en 1) para hallar y:
$y=-2-2x \rightarrow (x=t) \rightarrow y=-2-2t, \ t\in\mathbb{R}$

Sistema compatible indeterminado con infinitas soluciones:

$$\begin{cases} x=t \\ y=-2-2t \end{cases} \quad \text{con } t\in\mathbb{R}$$

Las soluciones se hallarían dando valores a t.

Por ejemplo:

Si $t=1 \rightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=-2-2\cdot 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=-4 \end{cases}$

Si $t=-2 \rightarrow \begin{cases} x=-2 \\ y=-2-2\cdot(-2) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x=-2 \\ y=-2+4 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x=-2 \\ y=2 \end{cases}$

....
....
....
....
Y así para los infinitos valores de t

Este ejemplo se ha resuelto por sustitución pero hubiera dado igual resolverlo por cualquier otro método. Lo importante es que al llegar a 0x=0 ó 0y=0, nos encontramos con un sistema compatible indeterminado y a partir de ese momento el ejercicio se terminaría igual en cualquiera de los tres casos. Si observas detenidamente el sistema original, te darás cuenta de que la segunda ecuación resulta de multiplicar la primera por 2. Según esto la información de la primera y la segunda ecuación es la misma. Por eso toda solución de la primera ecuación lo es de la segunda y viceversa.

En líneas generales si una de las ecuaciones resulta de multiplicar todos los coeficientes (de las incógnitas y del término independiente) por un número, el sistema resultante será Compatible Indeterminado.

 José Antonio Ortega Ortega

EJERCICIOS PROPUESTOS

Cuando se plantea un sistema, no siempre está en la forma $\begin{cases} ax+by=c \\ dx+ey=f \end{cases}$

Pero esto no debe asustarte. Si has entendido bien los métodos, lo importante es que veas en cada método los pasos que es necesario dar para llegar al final.

1. Resuelve por sustitución:

a) $\begin{cases} x-2y=5 \\ 3x-2y=19 \end{cases}$

b) $\begin{cases} y=3 \\ \dfrac{5x}{2}+\dfrac{2y}{3}=17 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 3x-2y=9 \\ 2x-y=5 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 3x+2y=6 \\ x=-20+3y \end{cases}$

e) $\begin{cases} 5x-4y=0 \\ 10x+2y=5 \end{cases}$

f) $\begin{cases} 2x+16=2y \\ 2y-3x=16 \end{cases}$

2. Resuelve por igualación:

a) $\begin{cases} 2x+y=2 \\ 3x+y=5 \end{cases}$

b) $\begin{cases} y=\dfrac{x+2}{3} \\ 2x-4y=2 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 5x+y=3 \\ 2x-y=-3 \end{cases}$

d) $\begin{cases} y=-5x+1 \\ y=\dfrac{3x-11}{2} \end{cases}$

e) $\begin{cases} x-2y=13 \\ x+5y=-8 \end{cases}$

f) $\begin{cases} 6x-4y=3 \\ 3x+8y=4 \end{cases}$

3. Resuelve por reducción:

a) $\begin{cases} 5x+2y=4 \\ 3x-2y=12 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x-2y=13 \\ 3x-3y=24 \end{cases}$

c) $\begin{cases} -2x+y=-15 \\ 3x-2y=26 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 7x+y=-4 \\ 7x+2y=-10 \end{cases}$

e) $\begin{cases} 2x+3y=1 \\ -3x-2y=-14 \end{cases}$

f) $\begin{cases} x-2y=5 \\ 3x-2y=19 \end{cases}$

4. En los siguientes sistemas se pide que razones antes de resolverlos para decidir si el sistema será compatible determinado, compatible indeterminado o incompatible. Resuelve sólo los casos en que el sistema sea compatible indeterminado:

a) $\begin{cases} x+y=-4 \\ x+y=-10 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 3x+\ \ y=-4 \\ x+2y=-10 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x+\ \ y\ =-4 \\ 3x+3y=-12 \end{cases}$

d) $\begin{cases} -3x+y=2 \\ 5x+2y=4 \end{cases}$

e) $\begin{cases} 7x+\ \ y=-4 \\ 14x+2y=5 \end{cases}$

f) $\begin{cases} 3x-2y=\ 6 \\ -6x+4y=-12 \end{cases}$

5. Los siguientes sistemas están incompletos. Complétalos de forma que ocurra lo que se indica en cada uno:

a) $\begin{cases} \square x+6y=\square \\ 2x+3y=-2 \end{cases}$

compatible indeterminado

b) $\begin{cases} -3x+y=\ \square \\ \ 5x+\square y=\ 7 \end{cases}$

solución x=3 ; y=-4

c) $\begin{cases} -3x+y=2 \\ \square x+\ \ y=7 \end{cases}$

Incompatible

d) $\begin{cases} \square x-\ \ y=-1 \\ -8x+2y=\square \end{cases}$

solución x= $\frac{1}{2}$; y=3

e) $\begin{cases} x+5y=2 \\ -x+\square y=\square \end{cases}$

compatible indeterminado

f) $\begin{cases} 2x-5y=-3 \\ 4x-\square y=\square \end{cases}$

Incompatible